

## ANÁLISIS MATEMÁTICO DE ALGUNOS PROBLEMAS DE CONTACTO

JOSÉ R. FERNÁNDEZ

Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela,  
Facultade de Matemáticas, Campus Sur s/n, 15782 Santiago de Compostela, España

jramon@usc.es

*Dedicado a la memoria de mi padre: José Ramón Fernández Lazcano (1946–2006)*

### Resumen

En este artículo se realiza una revisión de los resultados obtenidos por el autor en el estudio de diferentes problemas de contacto en elasticidad, elasto-piezolectricidad, viscoelasticidad o elasto-viscoplasticidad. Para cada problema se consideró diversos aspectos como la existencia y unicidad de solución débil y su regularidad, el análisis numérico de aproximaciones obtenidas mediante el método de los elementos finitos y, cuando fuera necesario, el esquema de Euler, y, por último, su implementación en ordenador.

**Palabras clave:** *Viscoelasticidad, elasto-viscoplasticidad, respuesta normal, Signorini, rozamiento, elementos finitos, estimaciones del error, resultados numéricos.*

**Clasificación por materias AMS:** 65M12 65M15 65N12 65N15 74M15 74R05 74C10 74D10

### 1 Introducción

Desde el punto de vista de la Ingeniería hace mucho tiempo que se consideran problemas de contacto de materiales, siendo numerosas las referencias que trataron, fundamentalmente, la modelación o la resolución numérica de estos problemas (véanse, por ejemplo, [34, 35, 46, 49, 50, 58] y las referencias allí citadas). En la industria aparecen con frecuencia situaciones que se pueden modelar de esta forma: por ejemplo, el contacto de los sistemas de frenado

---

Fecha de recepción: 26/10/2007. Aceptado (en forma revisada): 09/11/2007.

El autor quiere agradecer especialmente al profesor Juan M. Viaño, de la Universidade de Santiago de Compostela, su constante apoyo y su colaboración en la obtención de muchos de los resultados presentados en este artículo.

con las ruedas o de estas con la carretera, y diferentes procesos de creación de metales o de su manufacturación.

Durante los últimos años, el estudio matemático de los problemas de contacto en sus diferentes campos (existencia y unicidad de solución débil y su regularidad, el análisis numérico de sus aproximaciones y su implementación en ordenador, etc) ha experimentado un creciente interés. Desde uno de los primeros artículos debido a Signorini ([52]) en el que se planteó, por primera vez, un problema de contacto en elasticidad con una base rígida, pasando por su análisis matemático en [33] y el desarrollo más profundo, incluyendo más materiales y otras condiciones, realizado en la clásica referencia [21], hasta la actualidad mucho ha cambiado y es por ello que podemos hablar de una *Teoría Matemática de la Mecánica del Contacto*. En este trabajo se recogen los resultados obtenidos por el autor en esta línea de investigación, fundamentalmente en su vertiente del análisis numérico, y por otros investigadores en problemas relacionados.

El artículo se divide en cuatro partes principales. En la Sección 2 se presentan las diferentes leyes constitutivas (elasticidad o elasto-piezoelectricidad, viscoelasticidad y elasto-viscoplasticidad) y las condiciones de contacto que dan lugar a los problemas que se considerarán en el resto del trabajo, así como una breve descripción de dos fenómenos mecánicos que suelen presentarse en los procesos de contacto: el daño del material y la adherencia de la superficie de contacto. En la Sección 3 se describen los principales problemas que se han estudiado en el campo de la elasticidad, con mención especial a las aplicaciones biomédicas, y de la elasto-piezoelectricidad. Algunos problemas de contacto en viscoelasticidad se introducen en la Sección 4, incluyendo el daño del material, la adherencia de la superficie o los efectos de inercia, y, finalmente, en elasto-viscoplasticidad y en el caso cuasiestático, en la Sección 5.

## 2 Modelos mecánicos: leyes constitutivas y condiciones de contacto

### 2.1 Leyes constitutivas

La relación entre las tensiones en el cuerpo y las deformaciones resultantes caracteriza el tipo de material que compone el cuerpo y se describe mediante una ley constitutiva. De esta forma, determina las deformaciones del cuerpo como consecuencia de la acción de fuerzas volúmicas o superficiales. En esta sección, y en el resto de la memoria, únicamente consideraremos el contexto de *pequeñas deformaciones*.

Denotemos por  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ), representando la configuración de referencia de un cuerpo deformable que puede entrar en contacto con un obstáculo. Sea  $\Gamma$  su frontera exterior, dividida en tres partes disjuntas y medibles que denotamos por  $\Gamma_D$  (frontera Dirichlet),  $\Gamma_N$  (frontera Neumann) y  $\Gamma_C$  (frontera de contacto). Además, suponemos que en el dominio  $\Omega$  actúan fuerzas volúmicas de densidad  $\mathbf{f}_B$  y que en  $\Gamma_N$  se prescriben fuerzas superficiales de densidad  $\mathbf{f}_N$ .

Sean  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones,  $\mathbf{u}$  el campo de desplazamientos y  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  el

tensor de deformaciones linealizado dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))_{i,j=1}^d, \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

A continuación describimos brevemente los cuatro tipos de materiales considerados (es decir, las cuatro leyes constitutivas que los definen):

- Recordemos, en primer lugar, la clásica ley constitutiva que define un material elástico lineal (también conocida como ley de Hooke, véase [21]):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

donde  $\mathcal{C}$  es un tensor de cuarto orden acotado, simétrico y definido positivo.

- Si suponemos que los efectos debidos al campo eléctrico son importantes, entonces el material se supone elasto-piezoeléctrico y la correspondiente ley constitutiva se escribe como ([21, 53]):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \text{Estudiante}^* \mathbf{E}(\varphi),$$

donde  $\mathbf{E}(\varphi)$  representa el campo eléctrico ( $\varphi$  es el potencial eléctrico) dado por

$$E_i(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, d,$$

y  $\text{Estudiante}^* = (e_{ijk}^*)_{i,j,k=1}^d$  denota el traspuesto del tensor piezoeléctrico de tercer orden  $\text{Estudiante} = (e_{ijk})_{i,j,k=1}^d$ . Recordemos que

$$e_{ijk}^* = e_{kij}, \quad \text{para todo } i, j, k = 1, \dots, d.$$

- Si el material se supone viscoelástico, la ley constitutiva se expresa mediante la siguiente relación (véanse [21, 39]):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

donde  $\mathcal{A}$  es un tensor de cuarto orden acotado, simétrico y definido positivo que contiene las propiedades de viscosidad del material y  $\mathcal{C}$  es una función Lipschitziana. Si suponemos que los operadores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  son lineales, entonces la relación anterior se conoce como ley de Kelvin-Voigt ([21]):

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{\mathbf{u}}),$$

donde  $c_{ijkl}$ ,  $a_{ijkl}$  son los coeficientes de elasticidad y viscosidad, respectivamente. También podemos incluir los efectos eléctricos y se hablaría, entonces, de un material electro-viscoelástico.

Además, si suponemos que la “memoria del material” es importante (es decir, las deformaciones en instantes anteriores modifican el estado

actual), entonces el término de viscosidad se reemplaza por (véanse [21, 47]):

$$\int_0^t \mathcal{A}(t-s)\varepsilon(\mathbf{u}(s)) ds.$$

- En [20] se describe mecánicamente, desde un punto de vista experimental, el comportamiento de un tipo de materiales, llamados elasto-viscoplásticos, que se pueden definir a partir de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{C}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u})),$$

donde  $\mathcal{G}$  es una función constitutiva no lineal que contiene las propiedades viscoplásticas del material.

Leyes constitutivas dependientes del tiempo de esta forma han sido utilizadas para la modelación de materiales como caucho, metales, pasta de papel o rocas (véanse [20, 40] y las referencias allí citadas). Un ejemplo clásico de función viscoplástica  $\mathcal{G}$  es la ley de Perzyna introducida en [21].

## 2.2 Condiciones de contacto

Además del tipo de material (o ley constitutiva), la otra cuestión que determina la naturaleza de los problemas de contacto es el tipo de contacto que se puede establecer con el obstáculo. Denotamos por  $\boldsymbol{\nu}$  el vector unitario normal y exterior a la frontera  $\Gamma_C$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  el conjunto de vectores unitarios tangentes a  $\Gamma_C$ , y definimos la función  $g$  que representa la distancia que separa el cuerpo del obstáculo, medida en la dirección del vector  $\boldsymbol{\nu}$ , el desplazamiento normal  $u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$ , la tensión normal  $\sigma_\nu = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}$ , el desplazamiento tangencial  $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu\boldsymbol{\nu}$  y la tensión tangencial  $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu\boldsymbol{\nu}$ . Además, en el caso bidimensional, denotamos por  $u_\tau$  y  $\sigma_\tau$  las proyecciones en la dirección del vector tangente; es decir,  $u_\tau = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$  y  $\sigma_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}$ .

Las siguientes condiciones de contacto se pueden definir en la parte de la frontera  $\Gamma_C$ :

- *Contacto bilateral*: se supone que el cuerpo y el obstáculo están siempre pegados (es decir,  $g = 0$  y  $u_\nu = 0$ ).
- *Condición de contacto con respuesta normal*: el obstáculo se supone deformable. De acuerdo a [42, 48], se supone que existe una relación semilineal entre la tensión normal y la penetración  $u_\nu - g$  en la forma:

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu - g),$$

donde  $p$  es una función que mide la penetración en el obstáculo. Como una variación de esta condición, podemos considerar la llamada *condición de respuesta normal amortiguada*, que se escribe de la forma  $-\sigma_\nu = p(\dot{u}_\nu)$ . Esta condición se puede utilizar, por ejemplo, para modelar situaciones como la excavación de pozos en zonas rocosas.

- *Condiciones de Signorini*: el obstáculo se supone ahora rígido. Se escriben en la forma  $u_\nu \leq g$  (no hay penetración),  $\sigma_\nu \leq 0$  (sólo hay reacción) y la condición complementaria  $\sigma_\nu(u_\nu - g) = 0$  (sólo hay reacción si hay contacto y viceversa).
- *Rozamiento o fricción*: es una fuerza que, al producirse el contacto, se opone al movimiento tangencial. En las siguientes secciones, en el contexto bidimensional, este se supondrá de la forma:

$$\begin{aligned} |\sigma_\tau| &\leq h(t). \\ \text{Si } |\sigma_\tau| &= h(t) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0; \dot{u}_\tau = -\lambda \sigma_\tau. \\ \text{Si } |\sigma_\tau| &< h(t) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0. \end{aligned}$$

Debemos observar que cuando  $h(t) = \text{constante}$ , las condiciones anteriores se conocen como *ley de rozamiento de Tresca* (véase [21]), y cuando  $h(t) = \mu p_T(u_\nu - g)$  ( $\mu > 0$  constante) es un caso particular de la ley de rozamiento de Coulomb. Además, si suponemos que la *fuerza de rozamiento es despreciable* esta condición se escribe como  $\sigma_\tau = \mathbf{0}$ , y el problema de contacto se dice sin rozamiento.

### 2.3 Daño del material

En los últimos años existe un creciente interés por determinar la variación de las propiedades mecánicas del material al someterlo a un proceso mecánico repetitivo. En muchos materiales como el *cemento*, se ha observado un decrecimiento de su capacidad de carga como consecuencia de la aparición de microfracturas internas. Por supuesto, este es un tema de gran importancia ya que afecta al funcionamiento, a la calidad o a la duración de algunas máquinas o de sus componentes.

Desde el punto de vista de la ingeniería este tema ha sido muy abordado (véase, por ejemplo, [35] y las numerosas referencias allí citadas). Sin embargo, sólo recientemente se han estudiado matemáticamente diversos modelos de daño que intervienen en problemas de contacto. En nuestro caso, los que hemos considerado están basados en el introducido por Frémond y Nedjar ([36]). La idea principal es la definición de una función de daño,  $\zeta$ , que en el caso unidimensional elástico coincide con el cociente entre el “módulo de Young efectivo” (es decir, el módulo de Young que tiene el material en cada instante) y el módulo de Young del material sin estar sometido a ningún esfuerzo. De esta definición se deduce que esta función está en el intervalo  $[0, 1]$ , verificando que cuando  $\zeta = 1$  el material no está dañado, cuando  $\zeta = 0$  está completamente dañado y cuando  $0 < \zeta < 1$  hay un daño parcial. De acuerdo a [36], el modelo mecánico del daño se formula mediante la siguiente inclusión parabólica diferencial y no lineal:

$$\dot{\zeta} - \kappa \Delta \zeta + \partial I_{[0,1]}(\zeta) \ni \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \zeta),$$

donde  $I_{[0,1]}$  denota la función indicatriz del intervalo  $[0, 1]$ ,  $\kappa$  es la difusión de las microfracturas (por simplicidad, suponemos que es constante) y  $\phi$  representa

la función que mide la generación de daño. Finalmente, se ha demostrado en [13, 44] que se puede sustituir la inclusión precedente por una ecuación diferencial en derivadas parciales suponiendo ciertas hipótesis sobre la función  $\phi$ . Se utiliza un teorema de comparación que permite, bajo estas condiciones, demostrar que la función del daño pertenece al intervalo  $[0, 1]$  y, por tanto, la función indicatriz no es necesaria.

## 2.4 Adherencia de la superficie

Los procesos de adherencia, o adhesión, son muy importantes en muchos procesos industriales donde partes de su maquinaria, normalmente no metálicas, están pegadas. Existen muchos artículos desarrollados en el campo de la Ingeniería que tratan problemas de este tipo. En nuestro caso, seguimos los trabajos de Frémond (véase, para más detalles, [35]). La idea principal es la definición de una variable superficial,  $\beta$ , llamada *función de adherencia* que describe la densidad puntual de las uniones activas en la zona de contacto. Esta función toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ , de tal forma que cuando  $\beta = 0$  no hay uniones activas (es decir, no hay adherencia), cuando  $\beta = 1$  las uniones están todas activas (la adherencia es total) y cuando  $0 < \beta < 1$ , sólo una parte de las uniones está actuando y la adherencia es parcial.

En la literatura hay muchos modelos que representan la evolución de esta función de adherencia (véase la reciente monografía [51] para más detalles). Por ejemplo, en [1] la evolución de esta función estaba regida por la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\beta} = -\gamma_\nu \beta ((-R(u_\nu))_+)^2,$$

donde  $R$  es una función de truncamiento y  $\gamma_\nu > 0$  es un coeficiente de adherencia. En este caso, describe un proceso irreversible donde sólo el “despegue” de la superficie tiene lugar (la función  $\beta$  es siempre decreciente). En [29] se consideró que el pegamento también puede recuperarse (la función también puede crecer) y se modificó, de forma adecuada, la anterior ecuación diferencial.

## 3 Problemas de contacto en elasticidad y elasto-piezoelectricidad

Los problemas de contacto en elasticidad ya fueron estudiados en los años 70-80 (la existencia y unicidad de solución, así como su regularidad, pueden verse en [21], y el análisis numérico y su implementación en ordenador en [55]; véase [41] para un análisis detallado). Nuestra contribución se centró en la aplicación de estos tipos de problemas en la simulación de los siguientes procesos en Ortodoncia:

1. El cálculo de las líneas de máxima tensión para la localización de fracturas de mandíbula tras recibir un impacto ([38, 56]). Este fenómeno se modeló como un problema dinámico de Signorini en elasticidad.

2. La reducción de fracturas mandibulares mediante miniplacas corticales ([25]). Este proceso se representó como un problema de contacto entre tres cuerpos elásticos: las dos partes de la mandíbula fracturada y las miniplacas. En la Figura 1 se muestran, como ejemplo, los resultados obtenidos tras un golpe lateral en una mandíbula fracturada en la zona sinfisaria (parte media) y reducida con una o dos miniplacas. Los resultados obtenidos sugieren que dos miniplacas conllevan una mayor estabilidad estructural y una reducción de los esfuerzos internos (producto de impactos externos).

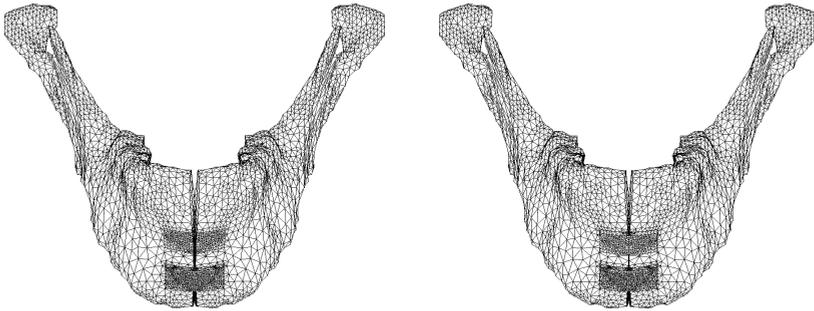


Figura 1: Deformaciones tras un golpe en la zona sinfisaria en una mandíbula reducida con una o dos miniplacas.

3. El comportamiento de un implante dental en la mandíbula al estar sometido a una serie de fuerzas como, por ejemplo, una mordida ([37]). Este problema se modeló como un problema de contacto con condiciones de Signorini en elasticidad.

Esta contribución se describió con detalle en [57] y debemos destacar que fue galardonada con el Premio SĒMA de Divulgaci3n Matemática 2005.

Desde el punto de vista matemático, es muy importante la introducci3n del daño en el estudio de problemas elásticos ya que presenta una serie de dificultades que constituyen todavía problemas abiertos (incluso si no hay contacto). Así, por ejemplo, en [23] se consideró un problema unidimensional donde el desplazamiento se puede despejar en funci3n de la variable daño y se estudió su comportamiento dependiendo de varios parámetros. Recientemente, en colaboraci3n con el profesor Kenneth L. Kuttler (Brigham Young University, EEUU) se han aplicado nuevas técnicas de operadores pseudomon3tonos ([43]) en el estudio de problemas elásticos con daño (véanse, por ejemplo, [13, 44]), sin considerar, por el momento, el contacto con un obstáculo.

Durante los últimos años se ha comenzado a estudiar un tipo especial de materiales en los que el efecto eléctrico tiene una gran importancia. Son los llamados materiales elasto-piezoeléctricos. La piezoelectricidad es la capacidad de ciertos cristales, como el cuarzo, algunos materiales cerámicos ( $\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{LiNbO}_3$ , PZT-5A, etc) o incluso el hueso humano, para producir una corriente eléctrica cuando están sometidos a esfuerzos internos. El efecto piezoeléctrico

está caracterizado por el acoplamiento entre las propiedades mecánicas y eléctricas del material: se ha observado que la aparición de cargas eléctricas en algunos cristales estaba motivada por la acción de fuerzas, volúmicas o superficiales, y recíprocamente, la acción de este campo eléctrico generaba deformaciones o tensiones internas en el cuerpo. Este tipo de materiales aparece comunmente en la industria como interruptores en electroacústica o equipos de medida. En [5], y como continuación a [54], se estudiaron numéricamente dos problemas de contacto de un cuerpo elasto-piezoeléctrico suponiendo que el obstáculo era rígido (condiciones de Signorini) o deformable (condición de respuesta normal).

#### 4 Problemas de contacto en viscoelasticidad

El análisis matemático de los problemas de contacto cuasiestáticos (es decir, con efectos de inercia despreciables), y que incluían materiales viscoelásticos se inició en [21]. El comportamiento se supone lineal y se estudian problemas asociados a diferentes condiciones (con y sin rozamiento, sólido rígido o deformable, etc). En la reciente monografía [39] se retomaron estos problemas para extenderlos al caso no lineal y se proporcionaron, además, su análisis numérico y se mostraron resultados numéricos que confirmaron la precisión de los algoritmos que los resolvían. En este tipo de problemas, y suponiendo que no hay rozamiento, hemos estudiado el contacto de un obstáculo deformable con una condición de respuesta normal amortiguada ([30]), con un obstáculo deformable analizando el efecto de la adherencia en la superficie de contacto ([19]), entre dos cuerpos viscoelásticos con daño y adherencia ([28]) y con un obstáculo deformable incluyendo los efectos térmicos ([7]). En [4] se presenta un caso abstracto que incluye el problema de contacto con un sólido deformable o un sólido rígido. Recientemente, en [16] hemos introducido un algoritmo que permite, en el caso bidimensional, la resolución de problemas de contacto con rozamiento, aplicándolo al caso de un problema de contacto viscoelástico con la ley de Tresca.

Sin embargo, dado que, en cierta medida, estos resultados son extensiones o generalizaciones de otros estudios previos, una mayor novedad consiste en suponer que los problemas son dinámicos. Es decir, que los efectos de inercia no son despreciables. Como ejemplo, podemos considerar el problema de contacto dinámico con respuesta normal en viscoelasticidad y con daño. Denotando por  $\mathbb{S}^d$  el espacio de tensores simétricos de orden 2 en  $\mathbb{R}^d$ , este se escribe de la forma siguiente (véase [8]):

*Encontrar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , el campo de tensiones  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , y la función daño  $\zeta : \Omega \times [0, T] \rightarrow [\zeta_*, 1]$  tales*

que:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_B \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \zeta) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2)$$

$$\dot{\zeta} - \kappa \Delta \zeta + \partial I_{[\zeta_*, 1]}(\zeta) \ni \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \zeta) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{en } \Gamma \times (0, T), \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, T), \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_N \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, T), \quad (6)$$

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu - g) \quad \text{en } \Gamma_C \times (0, T), \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_C \times (0, T), \quad (8)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0 \quad \text{en } \Omega. \quad (9)$$

Como podemos ver, la ecuación de equilibrio (1) contiene el término de inercia ( $\rho$  representa la densidad del material) ya que el problema se supone dinámico. Además, se postula la existencia de un valor inferior  $\zeta_* > 0$  para la función daño ya que, por debajo de este, la densidad de microfisuras es demasiado grande y no tiene sentido considerar el material como elástico.

Sea  $\mathbf{v}$  el campo de velocidades dado por  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t)$  y definimos los siguientes espacios variacionales:

$$\begin{aligned} V &= \{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d ; \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D \}, \\ Q &= \{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^d ; \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega) \}, \\ \mathcal{K} &= \{ \xi \in H^1(\Omega) ; \zeta_* \leq \xi \leq 1 \quad \text{c.p.d. en } \Omega \}. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Green el problema mecánico anterior se escribe de la forma siguiente:

Encontrar un campo de velocidades  $\mathbf{v} : [0, T] \rightarrow V$  y una función daño  $\zeta : [0, T] \rightarrow \mathcal{K}$  tales que  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ ,  $\zeta(0) = \zeta_0$  y para casi todo  $t \in (0, T)$ :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{v}}(t), \mathbf{w} \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q + (\mathcal{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \zeta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q \\ + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w} \rangle_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{w} \in V, \\ (\dot{\zeta}(t), \xi - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\zeta(t), \xi - \zeta(t)) \\ \geq (\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \zeta(t)), \xi - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in \mathcal{K}, \end{aligned}$$

donde los funcionales  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V'$ ,  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  se definen de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w} \rangle_{V' \times V} &= (\mathbf{f}_B(t), \mathbf{w})_{[L^2(\Omega)]^d} + (\mathbf{f}_N(t), \mathbf{w})_{[L^2(\Gamma_N)]^d} \quad \forall \mathbf{w} \in V, \quad t \in [0, T], \\ j(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Gamma_C} p(u_\nu - g) w_\nu \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V, \\ a(\xi, \psi) &= \kappa \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} \quad \forall \xi, \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

El campo de desplazamientos  $\mathbf{u}(t)$  se define como:

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(s) \, ds + \mathbf{u}_0, \quad t \in [0, T].$$

Bajo ciertas hipótesis sobre los datos, en [8] se demostró que el problema variacional anterior tiene una única solución con la regularidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1([0, T]; [L^2(\Omega)]^d), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; V'), \\ \boldsymbol{\sigma} &\in L^2(0, T; Q), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V'), \\ \zeta &\in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

La demostración de este resultado se basa en la aplicación del teorema del punto fijo de Banach y resultados conocidos de inecuaciones variacionales parabólicas y ecuaciones variacionales no lineales.

Veamos como se construye un esquema numérico completamente discretizado de este problema variacional. Primero, debemos aproximar la variable espacial. Para ello, definimos dos espacios de elementos finitos  $V^h \subset V$  y  $B^h \subset H^1(\Omega)$  que aproximen los espacios  $V$  y  $H^1(\Omega)$ , respectivamente ( $h$  es el parámetro de discretización espacial). Denotamos por  $\mathcal{K}^h = B^h \cap \mathcal{K}$  un subconjunto convexo de  $B^h$ . En segundo lugar, discretizamos las derivadas temporales (de primer orden). Sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  una partición del intervalo temporal  $[0, T]$  y denotamos por  $k = T/N$  el paso de tiempo (parámetro de discretización temporal). Finalmente, como notación, para una función continua  $f(t)$  sea  $f_n = f(t_n)$  y, para una sucesión  $\{w_n\}_{n=0}^N$ , denotamos por  $\delta w_n = (w_n - w_{n-1})/k$  las diferencias divididas.

Sean  $\mathbf{u}_0^h$ ,  $\mathbf{v}_0^h$  y  $\zeta_0^h$  aproximaciones adecuadas de las condiciones iniciales  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  y  $\zeta_0$ , respectivamente. Un esquema numérico completamente discretizado del problema variacional anterior es el siguiente (véase [8]):

*Encontrar un campo de velocidades discreto  $\mathbf{v}^{hk} = \{\mathbf{v}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$  y una función de daño discreta  $\zeta^{hk} = \{\zeta_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset \mathcal{K}^h$  tales que  $\mathbf{v}_0^{hk} = \mathbf{v}_0^h$ ,  $\zeta_0^{hk} = \zeta_0^h$  y para  $n = 1, 2, \dots, N$ :*

$$\begin{aligned} (\rho \delta \mathbf{v}_n^{hk}, \mathbf{w}^h)_{[L^2(\Omega)]^d} + (\mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h))_Q + (\mathcal{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \zeta_{n-1}^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h))_Q \\ + j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{w}^h) = (\mathbf{f}_n, \mathbf{w}^h)_V \quad \forall \mathbf{w}^h \in V^h, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (\delta \zeta_n^{hk}, \xi^h - \zeta_n^{hk})_{L^2(\Omega)} + a(\zeta_n^{hk}, \xi^h - \zeta_n^{hk}) \\ \geq (\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \zeta_{n-1}^{hk}), \xi^h - \zeta_n^{hk})_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi^h \in \mathcal{K}^h, \end{aligned} \quad (11)$$

donde el campo de desplazamientos discreto  $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$  se obtiene como:

$$\mathbf{u}_n^{hk} = \sum_{j=1}^n k \mathbf{v}_j^{hk} + \mathbf{u}_0^h, \quad n = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Bajo las condiciones de regularidad adicionales:

$$\mathbf{u} \in C^1([0, T]; V), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in C([0, T]; V'), \quad \zeta \in H^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

en [8] se demostró la siguiente estimación del error para todos  $\{\mathbf{w}_j^h\}_{j=1}^N \subset V^h$

y  $\{\xi_j^h\}_{j=1}^N \subset \mathcal{K}^h$ :

$$\begin{aligned}
& \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 + \|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\
& \quad + k \sum_{j=1}^N (\|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^{hk}\|_V^2 + \|\nabla(\zeta_j - \zeta_j^{hk})\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2) \\
& \leq c \left\{ \sum_{j=1}^N k \left( \|\dot{\mathbf{v}}_j - \delta \mathbf{v}_j\|_{V'}^2 + I_j^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1}\|_V^2 + \|\mathbf{v}_j - \mathbf{w}_j^h\|_V^2 \right) \right. \\
& \quad + \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1^h\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 \\
& \quad + \|\zeta_0 - \zeta_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\zeta_1 - \xi_1^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \max_{0 \leq n \leq N} \|\zeta_n - \xi_n^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + k^2 \\
& \quad + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|(\zeta_{j+1} - \xi_{j+1}^h) - (\zeta_j - \xi_j^h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + k \sum_{j=1}^N \|\delta \zeta_j - \dot{\zeta}_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + k \sum_{j=1}^N \|\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j), \zeta_j) - \delta \zeta_j + \kappa \Delta \zeta_j\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\zeta_j - \xi_j^h\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{w}_n^h\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 + k \sum_{j=1}^N \|\zeta_j - \xi_j^h\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{v}_j - \mathbf{w}_j^h - (\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{w}_{j+1}^h)\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 \right\},
\end{aligned}$$

donde  $I_j$  es el error de integración numérica dado por:

$$I_j = \left\| \int_0^{t_{j-1}} \mathbf{v}(s) ds - \sum_{l=1}^{j-1} k \mathbf{v}_l \right\|_V.$$

La estimación anterior es la base para obtener el orden de convergencia del algoritmo. Como un ejemplo de aplicación directa, supongamos que la solución tiene la siguiente regularidad:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} & \in H^2(0, T; V) \cap C^1([0, T]; [H^2(\Omega)]^d), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; V'), \\
\zeta & \in C([0, T]; H^2(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)).
\end{aligned}$$

Sean los espacios de elementos finitos  $V^h$  y  $B^h$  dados por:

$$\begin{aligned}
V^h & = \{\mathbf{v}^h \in [C(\bar{\Omega})]^d; \mathbf{v}^h|_{\mathcal{T}} \in [P_1(\mathcal{T})]^d, \quad \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h, \quad \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D\}, \\
B^h & = \{\xi^h \in C(\bar{\Omega}); \xi^h|_{\mathcal{T}} \in P_1(\mathcal{T}), \quad \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h\},
\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{T}^h$  es una familia regular de triangulaciones tipo elementos finitos de  $\bar{\Omega}$  compatible con la partición de la frontera  $\Gamma = \partial\Omega$  en  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  y  $\Gamma_C$ , y definamos las condiciones iniciales discretas como:

$$\mathbf{u}_0^h = \Pi^h \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v}_0^h = \Pi^h \mathbf{v}_0, \quad \zeta_0^h = \Pi^h \zeta_0,$$

donde  $\Pi^h$  es el operador de interpolación de elementos finitos usual. Entonces el esquema numérico es linealmente convergente; es decir, existe  $c > 0$ , independiente de  $h$  y  $k$ , tal que:

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_{[L^2(\Omega)]^d} + \|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)} \right\} \leq c(h+k).$$

En [8] se estudió con detalle el problema discreto anterior. Su resolución numérica se realiza en tres pasos para cada  $n = 1, \dots, N$ . En primer lugar, se calcula la función daño reescribiendo (11) en la forma:

$$\begin{aligned} & (\zeta_n^{hk}, \xi^h - \zeta_n^{hk})_{L^2(\Omega)} + k a(\zeta_n^{hk}, \xi^h - \zeta_n^{hk}) \\ & \geq k(\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \zeta_{n-1}^{hk}), \xi^h - \zeta_n^{hk})_{L^2(\Omega)} + (\zeta_{n-1}^{hk}, \xi^h - \zeta_n^{hk})_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi^h \in \mathcal{K}^h. \end{aligned}$$

Esta es una inecuación variacional de primera clase discreta que se puede resolver aplicando un algoritmo de tipo penalización-dualidad similar al descrito en [55]. En segundo lugar, se obtiene el campo de velocidades discreto a partir de (10), teniendo en cuenta que esta ecuación variacional se escribe como

$$\begin{aligned} & (\rho \mathbf{v}_n^{hk}, \mathbf{w}^h)_{[L^2(\Omega)]^d} + k(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h))_Q + k(\mathcal{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \zeta_{n-1}^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h))_Q \\ & + k j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{w}^h) = k(\mathbf{f}_n, \mathbf{w}^h)_V + (\rho \mathbf{v}_{n-1}^{hk}, \mathbf{w}^h)_{[L^2(\Omega)]^d} \quad \forall \mathbf{w}^h \in V^h. \end{aligned}$$

Por tanto, esta da lugar a un sistema lineal que se puede resolver con el método de Cholesky. Finalmente, el campo de desplazamientos se actualiza por la expresión (12). Este algoritmo se implementó en un ordenador utilizando FORTRAN 77 y se obtuvieron distintos resultados numéricos. En uno de los ejemplos descritos en [8] el objetivo era observar la influencia del daño en el comportamiento del material. En la Figura 2 se muestra el campo de deformaciones en el tiempo final, para unos determinados datos, considerando que el material nunca está dañado (izquierda) y que está dañado (derecha). Como podemos ver, si se produce daño del material, este se vuelve más blando y las deformaciones son mayores.

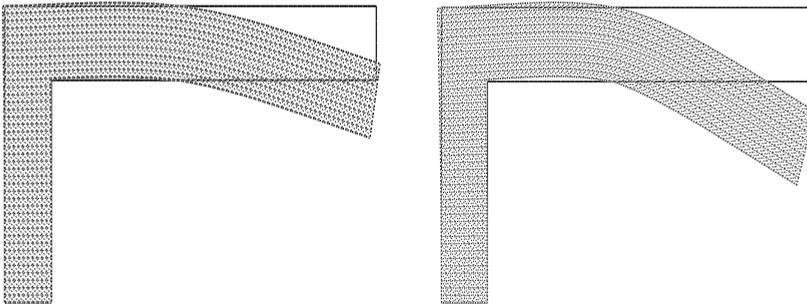


Figura 2: Deformaciones en el instante final sin daño (izquierda) y con daño (derecha).

En la ley constitutiva (2), el daño sólo afecta a la parte elástica,  $\mathcal{C}$ . Sin embargo, parece natural que este también pueda afectar, en mayor o menor

medida, a la parte viscosa. Por tanto, esta ley se reescribiría en la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \zeta \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \zeta) \quad \text{en } \Omega \times (0, T),$$

y, debido a que cuando  $\zeta = 0$  se tiene que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ , la condición de respuesta normal (7) se reemplazaría por:

$$-\sigma_\nu = \zeta p(u_\nu - g) \quad \text{en } \Gamma_C \times (0, T).$$

Estas dos condiciones vuelven el problema mucho más difícil. En [45] se demostró, usando la teoría de los operadores pseudomonótonos, que este problema, en el caso más general de incluir también la adherencia del material, tiene solución y, si además,  $|\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}})| \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ , esta es única. El análisis numérico de este problema se realizó en [14], incluyendo resultados numéricos que demuestran la convergencia y eficacia del algoritmo, así como la influencia de diferentes parámetros en las leyes constitutivas.

Problemas dinámicos que trataban la adherencia de la superficie de contacto y que incluían materiales viscoelásticos se estudiaron en [29] (se propuso un esquema de resolución numérica y se mostraron algunos resultados numéricos) y [18], donde se utilizó una condición de respuesta normal regularizada.

Suponiendo que los modelos se pueden reducir a problemas unidimensionales, se estudiaron los siguientes casos: en [2] se trató el problema de la vibración de una viga en contacto con un cuerpo rígido, que siempre permanece unido a esta, e incluyendo los efectos térmicos, en [3] se consideró el problema de contacto de una barra con un obstáculo deformable teniendo en cuenta la influencia del daño del material y los efectos térmicos, y en [15] se estudió el problema de contacto de una viga con un obstáculo deformable incluyendo el rozamiento (este se planteó utilizando bien la ley de Tresca o la ley de Coulomb). Finalmente, en [6] se consideró el problema de contacto entre un sólido electro-viscoelástico y un obstáculo deformable y en [24] se estudió el comportamiento de un “thermistor” viscoelástico (mecanismo que previene a algunos dispositivos de sufrir cortocircuitos).

## 5 Problemas de contacto en elasto-viscoplasticidad

En [39] se describen algunos de los problemas de contacto en elasto-viscoplasticidad que hemos estudiado. Los primeros resultados sobre problemas de contacto entre un cuerpo elasto-viscoplástico y un obstáculo deformable ([32]) o entre dos cuerpos elasto-viscoplásticos ([27]) se extendieron para incluir variables genéricas de estado internas ([26]), el endurecimiento del material ([22]) o el daño ([9, 17, 31]).

Nuevamente, aquí la contribución fundamental se centra en los problemas en los que interviene el daño del material dado que introduce las mayores novedades. Sin embargo, en los trabajos antes referenciados, debemos observar que este se supone que sólo afecta a la parte plástica, la función  $\mathcal{G}$ . Aunque se puede justificar mecánicamente (véase el libro [47]), parece natural que siguiendo las ideas de Frémond este también afecte, y de hecho es la parte principal, al

término de elasticidad. Como en la sección anterior, este problema introduce dificultades matemáticas adicionales de gran interés. En el reciente trabajo [11] hemos considerado el problema de contacto de un cuerpo elasto-viscoplástico con un obstáculo deformable incluyendo el daño del material. Este problema se escribe de la forma siguiente:

*Encontrar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , el campo de tensiones  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , y la función daño  $\zeta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que:*

$$-\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_B \quad \text{en } \Omega \times [0, T], \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{C}(\overbrace{\eta_*(\zeta)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}^{\cdot}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \eta_*(\zeta)) \quad \text{en } \Omega \times [0, T], \quad (14)$$

$$\dot{\zeta} - \kappa \Delta \zeta = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \eta_*(\zeta)) \quad \text{en } \Omega \times [0, T], \quad (15)$$

$$\zeta = 1 \quad \text{en } \Gamma \times (0, T), \quad (16)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, T), \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_N \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, T), \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0}, \quad -\sigma_\nu = p(u_\nu - g) \quad \text{en } \Gamma_C \times (0, T), \quad (19)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (20)$$

donde  $\eta_* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un operador de truncamiento dado por:

$$\eta_*(r) = \begin{cases} r & \text{si } \zeta_* < r < 1, \\ 1 & \text{si } r \geq 1, \\ \zeta_* & \text{si } r \leq \zeta_*. \end{cases}$$

En la ecuación de equilibrio (13) se ha despreciado el término de inercia y, por tanto, el problema es cuasiestático. Además, en la ley constitutiva (14) hemos incluido el daño en la parte elástica (de hecho, este está truncado ya que sino el problema podría degenerar en el caso  $\zeta = 0$ ), y la ley del daño (15) está escrita como una ecuación diferencial en derivadas parciales en lugar de una inclusión subdiferencial. Esto se puede hacer (véanse [13, 44]), suponiendo ciertas condiciones sobre la función fuente de daño  $\phi$ .

Sean  $E = H^1(\Omega)$ ,  $V$  y  $Q$  los siguientes espacios variacionales:

$$V = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d; \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D\},$$

$$Q = \{\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{d \times d}; \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq d\},$$

y denotemos por  $\mathbf{f}(\cdot)$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  y  $j(\cdot, \cdot)$  los funcionales definidos en la sección anterior. Finalmente, sea  $K$  el siguiente subconjunto de  $E$ :

$$K = \{\xi \in E; \xi = 1 \quad \text{en } \Gamma\}.$$

La formulación variacional del problema mecánico anterior se escribe de la siguiente forma:

*Encontrar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , el campo de tensiones  $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow Q$ , y la función daño  $\zeta : [0, T] \rightarrow K$  tales que  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0$ ,*

$\zeta(0) = \zeta_0$  y para casi todo  $t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \mathcal{C}(\overbrace{\eta_*(\zeta(t))\varepsilon(\mathbf{u}(t))}) + \mathcal{G}(\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \eta_*(\zeta(t))), \\ (\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{w}))_Q + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{w})_V \quad \forall \mathbf{w} \in V, \\ (\dot{\zeta}(t), \xi)_{L^2(\Omega)} + a(\zeta(t), \xi) &= (\phi(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \eta_*(\zeta(t))), \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in E. \end{aligned}$$

Bajo ciertas hipótesis sobre los datos, en [12] se demostró que el problema variacional anterior admite una única solución con la siguiente regularidad:

$$\begin{aligned} \zeta &\in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \quad \zeta(t, \mathbf{x}) \in [\zeta_*, 1] \text{ p.c.t. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T; V). \end{aligned}$$

En particular, esta regularidad implica que en el problema variacional se puede eliminar el operador de truncamiento  $\eta_*$ .

La aproximación numérica de este problema se realiza de la siguiente forma. En primer lugar, definimos tres espacios de elementos finitos  $V^h \subset V$ ,  $Q^h \subset Q$  y  $E^h \subset E$ , aproximando los espacios  $V$ ,  $Q$  y  $E$ , respectivamente, donde  $h > 0$  denota el parámetro de discretización espacial. Sea  $K^h = K \cap E^h$ .

Denotemos por  $\mathcal{P}_{Q^h} : Q \rightarrow Q^h$  el operador de proyección ortogonal sobre  $Q^h$  dado por

$$(\mathcal{P}_{Q^h}\tau, \tau^h)_Q = (\tau, \tau^h)_Q \quad \forall \tau \in Q, \tau^h \in Q^h.$$

Este operador verifica que

$$\|\mathcal{P}_{Q^h}\tau\|_Q \leq \|\tau\|_Q \quad \forall \tau \in Q.$$

Para discretizar las derivadas temporales, utilizamos una partición uniforme del intervalo temporal que denotamos por  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , y sea  $k = T/N$  el paso de tiempo. Para una función continua  $f(t)$  denotamos nuevamente por  $f_n = f(t_n)$ , y para una sucesión de valores  $\{w_n\}_{n=0}^N$  sean  $\delta w_n = (w_n - w_{n-1})/k$  sus diferencias divididas.

Sean  $\mathbf{u}_0^h, \sigma_0^h$  y  $\zeta_0^h$  aproximaciones apropiadas de las condiciones iniciales. Utilizando el esquema de Euler se obtiene el siguiente problema completamente discretizado:

Encontrar el campo de desplazamientos discreto  $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ , el campo de tensiones discreto  $\sigma^{hk} = \{\sigma_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset Q^h$  y la función de daño discreta  $\zeta^{hk} = \{\zeta_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset K^h$ , tales que  $\mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h$ ,  $\sigma_0^{hk} = \sigma_0^h$ ,  $\zeta_0^{hk} = \zeta_0^h$ , y para  $n = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} (\delta\zeta_n^{hk}, \xi^h)_{L^2(\Omega)} + a(\zeta_n^{hk}, \xi^h) &= (\phi(\varepsilon(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \eta_*(\zeta_{n-1}^{hk})), \xi^h)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi^h \in E^h, \\ \sigma_n^{hk} &= \mathcal{P}_{Q^h}(\eta_*(\zeta_n^{hk})\mathcal{C}\varepsilon(\mathbf{u}_n^{hk})) + \sigma_0^h - \mathcal{P}_{Q^h}(\eta_*(\zeta_0^h)\mathcal{C}\varepsilon(\mathbf{u}_0^h)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n k\mathcal{P}_{Q^h}\mathcal{G}(\sigma_{j-1}^{hk}, \varepsilon(\mathbf{u}_{j-1}^{hk}), \eta_*(\zeta_{j-1}^{hk})), \\ (\sigma_n^{hk}, \varepsilon(\mathbf{w}^h))_Q + j(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{w}^h) &= (\mathbf{f}_n, \mathbf{w}^h)_V \quad \forall \mathbf{w}^h \in V^h. \end{aligned}$$

Utilizando resultados conocidos de ecuaciones variacionales no lineales se puede demostrar fácilmente que el problema anterior admite una única solución.

Supongamos la siguiente regularidad de la solución continua:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in W^{1,\infty}(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; [W^{1,\infty}(\Omega)]^d), \\ \boldsymbol{\sigma} &\in W^{1,\infty}(0, T; Q), \\ \zeta &\in C([0, T]; E) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

La siguiente estimación del error se obtuvo en [11] para todos  $\{\mathbf{w}_j^h\}_{j=1}^N \subset V^h$  y  $\{\xi_j^h\}_{j=1}^N \subset E^h$ :

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q^2 + \|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} + k \sum_{j=1}^N \|\zeta_j - \xi_j^{hk}\|_E^2 \\ &\leq c \left( e_0 + \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{w}_n^h\|_V^2 + \max_{0 \leq n \leq N} \|I_n\|_Q^2 + \max_{0 \leq n \leq N} \|\zeta_n - \xi_n^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + k^2 + \sum_{j=1}^N k \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_{j-1}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{j-1}), \eta_*(\zeta_{j-1}))\|_Q^2 + \sum_{j=1}^N k \|\dot{\zeta}_j - \delta\zeta_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^N k \|\zeta_j - \xi_j^h\|_E^2 + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|\zeta_j - \xi_j^h - (\zeta_{j+1} - \xi_{j+1}^h)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

donde  $I_n$  es el siguiente error de integración:

$$I_n = \int_0^{t_n} \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \eta_*(\zeta(s))) ds - \sum_{j=1}^n k \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_{j-1}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{j-1}), \eta_*(\zeta_{j-1})),$$

y  $e_0$  es el error cometido en la aproximación de las condiciones iniciales, es decir:

$$e_0 = \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_0^h\|_Q^2 + \|\zeta_0 - \zeta_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

La estimación precedente es el punto de partida para obtener el orden de convergencia del algoritmo. Definamos los siguientes espacios de elementos finitos:

$$\begin{aligned} V^h &= \{\mathbf{w}^h \in V \cap [C(\bar{\Omega})]^d; \mathbf{w}_{|_{Tr}}^h \in [P_1(Tr)]^d, \quad Tr \in \mathcal{T}^h\}, \\ Q^h &= \{\boldsymbol{\tau}^h \in Q; \boldsymbol{\tau}_{|_{Tr}}^h \in [P_0(Tr)]^{d \times d}, \quad Tr \in \mathcal{T}^h\}, \\ E^h &= \{\xi^h \in C(\bar{\Omega}); \xi_{|_{Tr}}^h \in P_1(Tr), \quad Tr \in \mathcal{T}^h\}, \\ K^h &= \{\xi^h \in E^h; \xi^h = 1 \text{ en } \Gamma\}, \end{aligned}$$

donde  $\Omega$  se supone que es un dominio poliédrico,  $\mathcal{T}^h$  denota una triangulación tipo elementos finitos regular de  $\bar{\Omega}$ , y  $P_q(Tr)$ , para  $q = 0, 1$ , representa el espacio de polinomios de grado global menor o igual que  $q$  en  $Tr$ .

Supongamos que las condiciones iniciales discretas están definidas de la forma siguiente:

$$\mathbf{u}_0^h = \Pi^h \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}_0^h = \mathcal{P}_{Q^h} \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \zeta_0^h = \pi^h \zeta_0,$$

donde  $\pi^h : C(\overline{\Omega}) \rightarrow E^h$  es el operador de interpolación de elementos finitos usual y  $\Pi^h = (\pi_i^h)_{i=1}^d : [C(\overline{\Omega})]^d \rightarrow V^h$ .

Se puede entonces demostrar, de la estimación anterior y bajo condiciones de regularidad adicionales, que el algoritmo es linealmente convergente respecto de los parámetros de discretización  $h$  y  $k$ , es decir, existe  $c > 0$ , independiente de  $h$  y  $k$ , tal que:

$$\max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q + \|\zeta_n - \zeta_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)} \} \leq c(h + k).$$

Finalmente, veamos un ejemplo numérico que demuestra la eficacia del algoritmo de resolución. En la Figura 3 se representan la norma de von Mises del campo de tensiones y la función daño en el instante final y sobre la configuración deformada. Las zonas de máxima tensión se localizan en donde el cuerpo se flexiona y en el extremo izquierdo, que supusimos fijado, y, como podíamos esperar, las zonas de mayor daño (esto es, donde la función daño es menor) coinciden con las zonas de máxima tensión.

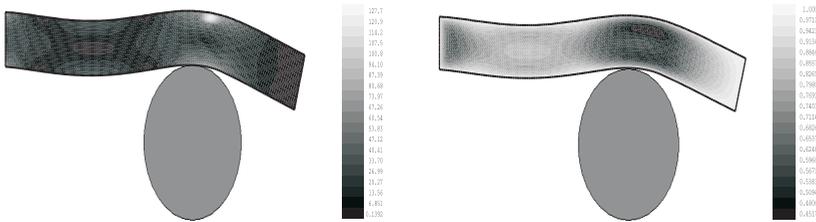


Figura 3: Norma von Mises de las tensiones y función daño en el instante final y sobre la configuración deformada.

En la Figura 4 se muestra la evolución, a lo largo del tiempo, del desplazamiento del punto  $\mathbf{x} = (9, 0)$  (nodo inferior derecho). Como podemos ver, aunque se supone que la fuerza es cíclica y siempre de la misma intensidad, este va aumentando como consecuencia de que el material resulta dañado.

## Referencias

- [1] K.T. Andrews, L. Chapman, J.R. Fernández, M. Fisackerly, M. Shillor, L. Vanerian y T. VanHouten, A membrane in adhesive contact, *SIAM J. Appl. Math.* 64(1) (2003) 152–169.
- [2] K.T. Andrews, J.R. Fernández y M. Shillor, A thermoviscoelastic beam with a tip body, *Comput. Mech.* 33(3) (2004) 225–234.
- [3] K.T. Andrews, J.R. Fernández y M. Shillor, Numerical analysis of dynamic thermoviscoelastic contact with damage of a rod, *IMA J. Appl. Math.* 70(6) (2005) 768–795.

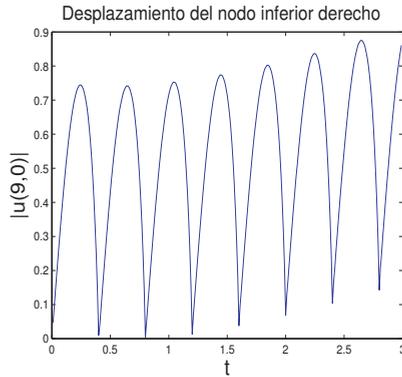


Figura 4: Evolución del desplazamiento del nodo inferior derecho.

- [4] M. Barboteu, J.R. Fernández y T.-V. Hoarau-Mantel, A class of evolutionary variational inequalities with applications in viscoelasticity, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 15(10) (2005) 1595–1617.
- [5] M. Barboteu, J. R. Fernández y Y. Ouafik, Numerical analysis of two frictionless elastic-piezoelectric contact problems, *J. Math. Anal. Appl.* 339 (2008) 905–917.
- [6] M. Barboteu, J. R. Fernández y Y. Ouafik, Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem, *Sometido*.
- [7] M. Campo y J. R. Fernández, Numerical analysis of a quasistatic thermoviscoelastic frictional contact problem, *Comput. Mech.* 35(6) (2005) 459–469.
- [8] M. Campo, J. R. Fernández, W. Han y M. Sofonea, A dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance and damage, *Finite Elem. Anal. Des.* 42 (2005) 1–24.
- [9] M. Campo, J.R. Fernández y T.-V. Hoarau-Mantel, A quasistatic viscoplastic contact problem with adhesion and damage, *Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie* 48(96)(2) (2005) 165–180.
- [10] M. Campo, J.R. Fernández y T.-V. Hoarau-Mantel, Analysis of two frictional viscoplastic contact problems with damage, *J. Comput. Appl. Math.* 196(1) (2006) 180–197.
- [11] M. Campo, J.R. Fernández y K.L. Kuttler, An elastic-viscoplastic quasistatic contact problem with damage, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196(33-34) (2007) 3219–3229..

- [12] M. Campo, J.R. Fernández y K.L. Kuttler, An elastic-viscoplastic contact problem with damage: existence and uniqueness of a weak solution, *Arch. Ration. Mech. Anal.* (en prensa).
- [13] M. Campo, J.R. Fernández, K.L. Kuttler y M. Shillor, Quasistatic evolution of damage in an elastic body: numerical analysis and computational experiments, *Appl. Numer. Math.* 57(9) (2007) 975–988..
- [14] M. Campo, J. R. Fernández, K.L. Kuttler, M. Shillor y J.M. Viaño, Numerical analysis and simulations of a dynamic frictionless contact problem with damage, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 196 (2006) 476–488.
- [15] M. Campo, J. R. Fernández, G.E. Stavroulakis y J.M. Viaño, Dynamic frictional contact of a viscoelastic beam, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 40(2) (2006) 295–310.
- [16] M. Campo, J. R. Fernández y J.M. Viaño, Numerical analysis and simulations of a quasistatic frictional contact problem with damage, *J. Comput. Appl. Math.* 192(1) (2006) 30–39.
- [17] O. Chau, J. R. Fernández, W. Han y M. Sofonea, A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance and damage, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 191 (2002) 5007–5026.
- [18] O. Chau, J. R. Fernández, W. Han y M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a dynamic frictionless contact problem with adhesion, *J. Comput. Appl. Math.* 156(1) (2003) 127–157.
- [19] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor y M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion, *J. Comput. Appl. Math.* 159(2) (2003) 431–465.
- [20] N. Cristescu y I. Suliciu, *Viscoplasticity*, Martinus Nijhoff Publishers, 1992.
- [21] G. Duvaut y J.L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics*, Springer, 1976.
- [22] J.R. Fernández, Numerical analysis of a contact problem between two elastic-viscoplastic bodies with hardening and nonmatching meshes, *Finite Elem. Anal. Design* 40(7) (2004) 771–791.
- [23] J.R. Fernández, Analysis of a one-dimensional damage model, *Numer. Methods Partial Differential Equations* 21(6) (2005) 1122–1139.
- [24] J.R. Fernández, Numerical analysis of the quasistatic thermoviscoelastic thermistor problem, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 40(2) (2006) 353–366.

- [25] J.R. Fernández, M. Gallas, M. Burguera y J.M. Viaño, A three dimensional numerical simulation of mandible fractures reduction with screwed miniplates, *J. Biomechanics* 36 (2003) 329–337.
- [26] J.R. Fernández, W. Han, M. Sofonea y J.M. Viaño, Variational and numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variables, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 54(4) (2001) 501–522.
- [27] J.R. Fernández, P. Hild y J.M. Viaño, Numerical approximation of the elastic-viscoplastic contact problem with non-matching meshes, *Numer. Math.* 94(3) (2003) 501–522.
- [28] J.R. Fernández, K.L. Kuttler y M. Shillor, Analyse numérique d'un problème de contact viscoélastique sans frottement avec adhérence et endommagement, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 341(1) (2005) 63–68.
- [29] J.R. Fernández, M. Shillor y M. Sofonea, Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion, *Math. Comput. Modelling* 37 (2003) 1317–1333.
- [30] J.R. Fernández y M. Sofonea, Numerical analysis of a frictionless viscoelastic contact problem with normal damped response, *Comput. Math. Appl.* 47(4-5) (2004) 549–568.
- [31] J.R. Fernández y M. Sofonea, Variational and numerical analysis of the Signorini's contact problem in viscoplasticity with damage, *J. Appl. Math.* 2 (2003) 87–114.
- [32] J.R. Fernández, M. Sofonea y J.M. Viaño, A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance: numerical analysis and computational experiments, *Numer. Math.* 90(4) (2002) 689–719.
- [33] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: Il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I* (8) 7 (1963/1964) 91–140.
- [34] A.C. Fisher-Cripps, *Introduction to contact mechanics*, Springer, 2000.
- [35] M. Frémond, *Non-smooth thermomechanics*, Springer, 2002.
- [36] M. Frémond y B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtual work, *Internat. J. Solids Structures*, 33 (1996) 1083–1103.
- [37] M. Gallas, M.T. Abeleira, J.R. Fernández y M. Burguera, A three-dimensional numerical simulation of dental implants as orthodontic anchorage, *European J. Orthodontics* 27 (2005) 12–16.

- [38] M. Gallas y J.R. Fernández, A 3d numerical simulation of the human mandible in standard trauma situations, *J. CraneoMax. Surgery* 3(5) (2004) 303–307.
- [39] W. Han y M. Sofonea, *Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity*, American Mathematical Society-Intl. Press, 2002.
- [40] I. Ionescu y M. Sofonea, *Functional and numerical methods in viscoplasticity*, Oxford University Press, 1993.
- [41] N. Kikuchi y J.T. Oden, *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 8, Philadelphia, PA, 1988.
- [42] A. Klarbring, A. Mikelic y Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *Internat. J. Engrg. Sci.* 26(8) (1988) 811–832.
- [43] K.L. Kuttler y M. Shillor, Set-valued pseudomonotone maps and degenerate evolution inclusions, *Commun. Contemp. Math.* 1(1) (1999) 87–123.
- [44] K.L. Kuttler y M. Shillor, Quasistatic evolution of damage in an elastic body, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 7(4) (2006) 674–699.
- [45] K.L. Kuttler, M. Shillor y J.R. Fernández, Existence and regularity for dynamic viscoelastic adhesive contact with damage, *Appl. Math. Optim.* 53(1) (2006) 31–66.
- [46] T.A. Laursen, *Computational contact and impact mechanics: fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*, Springer, 2002.
- [47] J. Lemaitre y J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1988.
- [48] J.A.C. Martins y J.T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Anal.* 11(3) (1987) 407–428.
- [49] E.T. Rabinowicz, *Friction and wear of materials*, John Wiley and Sons Ltd, 1995.
- [50] W. Sextro, *Dynamic contact problems with friction: models, methods, experiments and applications*, Springer, 2002.
- [51] M. Shillor, M. Sofonea y J.J. Telega, *Models and analysis of quasistatic contact*, Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, 2005.
- [52] A. Signorini, Sopra a une questione di elastostatica, *Atti Soc. Ital. Progresso Sci.*, 1933.

- [53] M. Sofonea y E.-H. Essoufi, A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Math. Model. Anal.* 9(3) (2004) 229–242.
- [54] M. Sofonea y Y. Ouafik, A piezoelectric contact problem with normal compliance, *Appl. Math.* 32 (2005) 425–442.
- [55] J. M. Viaño, Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad: Aproximación y resolución de los problemas discretos, *Rev. Internac. Méto. Numér. Cál. Diseñ. Ingr.* 2 (1986) 63–86.
- [56] J. M. Viaño, M. Burguera y J.R. Fernández, A 3d-fem simulation of highest stress in mandible fractures by elastic impact, *Comp. Methods Biomech. Biomed. Engrg.* 3 (2000) 273–285.
- [57] J. M. Viaño, M. Burguera, J.R. Fernández, A.D. Rodríguez-Arós y M. Campo, Simulación numérica de algunos procesos mecánicos en odontología y ortodoncia, *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* 33 (2005) 113–147.
- [58] P. Wriggers, *Computational contact mechanics*, John Wiley and Sons Ltd, 2002.

José Ramón Fernández es Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela. Ha sido Profesor Asociado y en la actualidad es Profesor Contratado Doctor en dicha Universidad.

Sus principales áreas de interés son el Análisis Numérico de las inecuaciones variacionales y sus aplicaciones en particular a problemas con origen en Mecánica del contacto, Elasto-Viscoplasticidad, Viscoelasticidad, Piezoelectricidad, etc.



Es autor de cerca de 50 artículos en revistas y ha participado en más de 40 Congresos de difusión internacional. Ha realizado estancias de investigación en las Universidades de Iowa y Oakland (EEUU) y Savoie y Perpignan (Francia), entre otras. Ha dirigido y codirigido varios trabajos de investigación a nivel predoctoral y doctoral.