

# Memoria de investigación

Jorge Cortés  
Applied Mathematics and Statistics  
Baskin School of Engineering  
University of California at Santa Cruz  
United States

Email: [jcortes@ucsc.edu](mailto:jcortes@ucsc.edu)  
<http://www.ams.ucsc.edu/~jcortes>

En los últimos cuarenta años el campo del control ha sido testigo de avances increíbles, haciendo posibles mejoras tecnológicas con descubrimientos en los principios fundamentales y en las matemáticas. Hoy en día, las oportunidades para aplicar los principios de control son enormes. La computación, la comunicación y la estimación son cada vez más baratas y ubicuas. Esto afectará pronto a nuestra sociedad e influenciará casi todos los aspectos de nuestra vida tal y como la conocemos. Los desarrollos futuros en las áreas de transporte y espacio, tecnologías de la información y redes, maquinas inteligentes y robots, biología y medicina, y materiales y fabricación requerirán una expansión significativa del conjunto de herramientas de control disponibles en la actualidad<sup>1</sup>. Mi investigación en *control geométrico para la planificación de movimientos y coordinación de sistemas autónomos* busca contribuir a estas apasionantes aplicaciones por medio del desarrollo de herramientas matemáticas para incrementar las habilidades, la fiabilidad y las capacidades de los sistemas robóticos.

A continuación, describo brevemente las líneas de investigación en las que he trabajado hasta la fecha. El documento adjunto, titulado “control geométrico para la planificación de movimientos y coordinación de sistemas autónomos”, aborda en profundidad algunas de estas líneas. En cada párrafo, señalo las publicaciones más significativas relacionadas con el tema de investigación correspondiente. Una visión de conjunto completa de mi trabajo en Mecánica Geométrica, con especial énfasis en los sistemas noholónomos, puede encontrarse en J. Cortés. *Geometric Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems*, volume 1793 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, New York, 2002.

**Coordinación y control cooperativo.** En años recientes, hemos visto un gran esfuerzo investigador centrado en problemas de planificación y control de movimientos para sistemas formados por múltiples agentes. Una capacidad fundamental de las futuras redes de sensores móviles y ajustables será la habilidad de realizar de manera cooperativa tareas espacialmente distribuidas. Estas redes de vehículos autónomos podrán adaptarse a entornos cambiantes y situaciones dinámicas, ofrecerán servicios a prueba de fallos, y operarán va rutas de comunicación ad-hoc con ancho de banda limitado. Los desafíos científicos que plantean estas tecnologías emergentes son enormes y emocionantes. Para lograr las capacidades deseables de estas redes, el objetivo de mi investigación es el desarrollo de un marco matemático que permita modelar, analizar, validar y controlar estas tecnologías. Nos planteamos diseñar algoritmos de control cooperativos que tomen en cuidadosa consideración todas las ligaduras de la red de sensores móviles: estos algoritmos deben ser distribuidos, asíncronos, adaptables, y su corrección debe ser verificada formalmente. Nuestra aproximación técnica a estos problemas está basada en herramientas de Geometría Computacional, Localización de Facilidades, Análisis no Diferenciable e Investigación Operativa. Estos problemas exhiben profundas relaciones con cuestiones clásicas en Optimización Geométrica, como por ejemplo los problemas de cubrimiento por

---

<sup>1</sup>R. M. Murray, editor. *Control in an Information Rich World*. SIAM, Philadelphia, 2003. Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics and Systems.

discos y empaquetamiento de esferas, y con problemas clásicos de la Robótica basada en el comportamiento, como la caracterización del comportamiento asintótico de una red de robots evolucionando bajo la ley “aléjate de tu vecino más cercano” en un entorno acotado. En mi investigación en estas áreas, pongo un énfasis fundamental en los principios matemáticos detrás de los problemas prácticos, y en el desarrollo de nuevas herramientas y resultados que ayuden a resolver los desafíos científicos a los que nos enfrentamos.

### **Modelos, nociones de complejidad y herramientas matemáticas para redes móviles**

- F. Bullo and J. Cortés. Adaptive and distributed coordination algorithms for mobile sensing networks. In V. Kumar, N. E. Leonard, and A. S. Morse, editors, *Cooperative control. (Proceedings of the 2003 Block Island Workshop on Cooperative Control)*, volume 309 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 43–62. Springer Verlag, New York, 2004
- J. Cortés. Motion coordination algorithms resulting from classical geometric optimization problems. In K. Tas, D. Krupka, D. Baleanu, and O. Krupkova, editors, *Proceedings of the International Workshop on Global Analysis*, volume 729 of *AIP Conference Proceedings Series*, pages 54–68. American Institute of Physics, New York, 2004
- S. Martínez, F. Bullo, J. Cortés, and E. Frazzoli. On synchronous robotic networks – Part I: models, tasks and complexity notions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, March 2005. Submitted
- S. Martínez, F. Bullo, J. Cortés, and E. Frazzoli. On synchronous robotic networks – Part II: on synchronous robotic networks – Part II: time complexity of rendezvous and deployment algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, March 2005. Submitted
- J. Cortés. Finite-time convergent gradient flows with applications to motion coordination. *Automatica*, September 2005. Submitted
- S. Martínez, J. Cortés, and F. Bullo. Motion coordination with distributed information. *IEEE Control Systems Magazine*, 2005. Submitted

### **Algoritmos distribuidos para el despliegue de redes móviles en entornos convexos y no-convexos**

- J. Cortés, S. Martínez, T. Karatas, and F. Bullo. Coverage control for mobile sensing networks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(2):243–255, 2004
- J. Cortés and F. Bullo. Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(5):1543–1574, 2005
- J. Cortés, S. Martínez, and F. Bullo. Spatially-distributed coverage optimization and control with limited-range interactions. *ESAIM. Control, Optimisation & Calculus of Variations*, 11(4):691–719, 2005
- A. Ganguli, J. Cortés, and F. Bullo. Maximizing visibility in nonconvex polygons: Nonsmooth analysis and gradient algorithm design. *SIAM Journal on Control and Optimization*, March 2006. To appear
- A. Ganguli, J. Cortés, and F. Bullo. Distributed coordination algorithms for visually-guided robots. In *Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics*, New York, NY, July 2006. Submitted

### **Algoritmos distribuidos para el encuentro de redes móviles**

- J. Cortés, S. Martínez, and F. Bullo. Robust rendezvous for mobile networks via proximity graphs in arbitrary dimensions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(7), 2006. To appear
- A. Ganguli, J. Cortés, and F. Bullo. On rendezvous for visually-guided agents in a nonconvex polygon. In *IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 5686–5691, Seville, Spain, December 2005

**Mecánica noholónoma.** Los sistemas sujetos a ligaduras noholónomas están ampliamente extendidos en numerosos dominios científicos y comerciales, incluyendo la robótica, la locomoción y la exploración espacial. En mi investigación, he puesto el énfasis en una aproximación interdisciplinar al estudio de la dinámica, explotando la particular estructura geométrica que exhibe esta clase de sistemas. Los resultados incluyen el análisis del papel especial que juega la simetría en la evolución del sistema, la caracterización de la existencia de medidas invariantes para sistemas de Chaplygin, y la identificación de dinámicas continuas y discretas cuando las ligaduras noholónomas tienen rango variable.

- J. Cortés and M. de León. Reduction and reconstruction of the dynamics of nonholonomic systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(49):8615–8645, 1999
- F. Cantrijn, J. Cortés, M. de León, and D. Martín de Diego. On the geometry of generalized Chaplygin systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 132:323–351, 2002
- F. Cantrijn and J. Cortés. Cosymplectic reduction of constrained systems with symmetry. *Reports on Mathematical Physics*, 49(2-3):167–182, 2002
- J. Cortés, M. de León, D. Martín de Diego, and S. Martínez. Mechanical systems subjected to generalized non-holonomic constraints. *Royal Society of London. Proceedings Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 457(2007):651–670, 2001
- J. Cortés and A. Vinogradov. Hamiltonian theory of constrained impulsive motion. *Journal of Mathematical Physics*, 2006. To appear
- J. Cortés, M. de León, J. C. Marrero, and E. Martínez. Nonholonomic Lagrangian systems on Lie algebroids. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2005. Submitted

**Integración geométrica.** El objetivo es diseñar integradores numéricos que tengan en cuenta las propiedades geométricas de los sistemas dinámicos (conservación de la energía, integrales primeras, preservación del volumen, etc). El uso de estos métodos en aplicaciones tales como la reorientación de satélites y la dinámica molecular es indispensable para obtener aproximaciones consistentes con las soluciones. Dada la juventud de este campo, hay numerosas cuestiones todavía por abordar. Mi aproximación a este problema hace uso de principios y métodos variacionales de la Mecánica Geométrica para desarrollar algoritmos numéricos para sistemas sujetos a ligaduras noholónomas.

- J. Cortés and S. Martínez. Non-holonomic integrators. *Nonlinearity*, 14(5):1365–1392, 2001
- J. Cortés. Energy conserving nonholonomic integrators. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, pages 189–199, 2003. Added volume

**Control geométrico de sistemas infra-actuados.** Un sistema infra-actuado tiene menos actuadores que grados de libertad. El interés por controlar sistemas infra-actuados proviene de dos consideraciones: (i) en el caso del fallo de un actuador en un robot con tantos actuadores como grados de libertad, si éste está dotado de algoritmos de control para operar el sistema infra-actuado resultante, puede reaccionar ante el malfuncionamiento y seguir realizando la tarea programada. Los algoritmos de control dotan de mayor seguridad y robustez a los sistemas robóticos; (ii) la habilidad para controlar sistemas infra-actuados hace posible diseñar sistemas más económicos minimizando el uso de componentes mecánicos costosos, tales como actuadores y transmisiones, y reemplazándolos con algoritmos de control sofisticados. Mi investigación en este campo se ha centrado en: (i) la obtención de condiciones necesarias y suficientes que garantizan la controlabilidad del sistema, y el análisis del papel que la simetría puede jugar en la simplificación de estos criterios; (ii) el desarrollo de expansiones en serie describiendo la evolución de las trayectorias del sistema. La estructura de homogeneidad de estos sistemas sienta las bases para la aproximación técnica, que utiliza elegantes resultados de Combinatoria, Análisis Complejo y funciones generadoras; (iii) el desarrollo de estrategias eficientes para la planificación de trayectorias de sistemas autónomos con el objetivo de resolver los problemas de reconfiguración de punto a punto, interpolación de estados y estabilización asintótica exponencial.

- J. Cortés, S. Martínez, J. P. Ostrowski, and H. Zhang. Simple mechanical control systems with constraints and symmetry. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(3):851–874, 2002
- J. Cortés, S. Martínez, and F. Bullo. On nonlinear controllability and series expansions for Lagrangian systems with dissipative forces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8):1396–1401, 2002
- S. Martínez and J. Cortés. Motion control algorithms for simple mechanical systems with symmetry. *Acta Applicandae Mathematicae*, 76(3):221–264, 2003

**Mecánica Geométrica y Control.** La Mecánica Geométrica y la teoría de control de sistemas no lineales son dos áreas científicas que han estado ligadas tradicionalmente. Ideas de una disciplina han abonado el terreno para desarrollar importantes descubrimientos en la otra, y viceversa. A lo largo de mi investigación, he prestado

especial atención a la profunda relación entre el problema de control óptimo y la geometría de los problemas variacionales constreñidos, incorporando herramientas clásicas de la Mecánica Geométrica como el teorema de Noether o las simetrías infinitesimales en el análisis y la descripción de las soluciones óptimas. También he investigado condiciones bajo las cuales un sistema de control no lineal afín en los inputs puede realizarse como un sistema de control gradiente con respecto a una métrica pseudo-Riemanniana apropiada. Esta caracterización es un elegante complemento al tradicional esfuerzo por caracterizar la realización de sistemas Hamiltonianos de control, que tiene sus raíces en la década de los 80. La importancia de ambas clases de sistemas proviene de su ubicuidad en una gran variedad de contextos físicos e industriales. Otras herramientas provenientes de la Geometría Diferencial, tales como el producto simétrico o la noción de algebroides de Lie, juegan un papel fundamental en el desarrollo de un marco general que englobe la reducción de los sistemas de control respetando la estructura de sus ecuaciones.

- J. Cortés, M de León, D. Martín de Diego, and S. Martínez. Geometric description of vakonomic and nonholonomic dynamics, comparison of solutions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(5):1389–1412, 2003
- J. Cortés and E. Martínez. Mechanical control systems on Lie algebroids. *IMA Journal on Mathematical Control and Information*, 21(4):457–492, 2004
- J. Cortés and S. Martínez. The consistency problem in optimal control: the degenerate case. *Reports on Mathematical Physics*, 51(2/3):171–186, 2003
- J. Cortés, A. J. van der Schaft, and P. E. Crouch. Characterization of gradient control systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(4):1192–1214, 2005
- J. Cortés, M. de León, J. C. Marrero, D. Martín de Diego, and E. Martínez. A survey on Lagrangian mechanics and control on Lie algebroids and Lie groupoids. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2006. To appear

# Control geométrico para la planificación de trayectorias y la coordinación de sistemas autónomos

Jorge Cortés  
Applied Mathematics and Statistics  
Baskin School of Engineering  
University of California at Santa Cruz  
United States

Email: [jcortes@ucsc.edu](mailto:jcortes@ucsc.edu)  
<http://www.ams.ucsc.edu/~jcortes>

## Resumen

La teoría de control nos dota de los principios y métodos necesarios para diseñar sistemas que mantengan un rendimiento adecuado adaptándose de manera automática a los cambios del entorno. La teoría de control matemático aborda problemas fundamentales para los sistemas de control haciendo énfasis en los principios generales y las propiedades comunes. Mi investigación persigue desarrollar herramientas matemáticas (geométricas, analíticas y numéricas) que permitan mejorar la destreza, la eficiencia y la autonomía en las áreas de locomoción y manipulación robóticas. Las aplicaciones incluyen redes de sensores móviles, plataformas autónomas en entornos espaciales, terrestres, acuáticos y aéreos, y mecanismos que se mueven vía ligaduras noholónomas e impactos. Desde una perspectiva general, esta investigación unifica conceptos y métodos de Mecánica Geométrica (geometría Riemanniana, geometría simpléctica, mecánica analítica), Robótica y Teoría de Sistemas (control cooperativo, análisis no-diferenciable, sistemas no lineales), Investigación Operativa (emplazamiento de recursos, optimización geométrica) y Ciencias de la Computación (geometría computacional, algoritmos distribuidos).

## 1. Introducción

En un futuro no muy lejano, las nuevas generaciones de robots y vehículos autónomos van a jugar un papel cada vez más importante en aplicaciones sociales, científicas y comerciales. Ejemplos de estos sistemas incluyen robots móviles de interior; vehículos anfibios y todo-terreno; robots espaciales para construcción y servicio; y robots con patas, robots-serpiente, robots-pezuña y otros robots biomiméticos. Estos sistemas robóticos estarán gobernados por dinámicas híbridas no lineales y se moverán en entornos cambiantes y probablemente inseguros. Interaccionarán con su entorno vía ligaduras de rodamiento, impactos y fuerzas viscosas. Los avances tecnológicos en computación, procesos de fabricación y comunicaciones harán que estos dispositivos puedan operar con niveles cada vez mayores de autonomía y destreza.

Tales sistemas estarán controlados mediante esquemas jerárquicos que les permitirán operar autónomamente, interactuar y cooperar con otros robots, y recibir órdenes de un operador humano. Una de las capacidades más básicas e importantes de un robot será la habilidad para planificar y ejecutar con seguridad sus propios movimientos. Esta capacidad es crucial para poder desarrollar lenguajes de progra-

mación robótica más sofisticados y poder realizar comportamientos grupales tales como la creación de formaciones y la manipulación cooperativa.

*Los escenarios futuros y las novedosas aplicaciones de estos robots autónomos hacen necesario el desarrollo del conjunto de herramientas de control actualmente disponibles.*

En esta memoria nos concentramos en los siguientes problemas: (1) la planificación de trayectorias de un sistema autónomo y (2) la coordinación de grupos de sistemas autónomos para realizar de manera cooperativa una tarea específica. Mi investigación se inscribe dentro de la necesidad de un marco matemático apropiado para la formulación, el análisis y el diseño de leyes de control y algoritmos que resuelvan estos problemas.

## Control geométrico para la planificación de trayectorias de sistemas autónomos

En la actualidad, los problemas de planificación y seguimiento de trayectorias permanecen aún sin resolver para sistemas mecánicos infra-actuados. Un sistema se dice *completamente actuado* si tiene tantos controles como grados de libertad, es decir, puede *modificar* directamente cualquier componente de su configuración. Un sistema se dice *infra-actuado* si tiene menos controles que grados de libertad (ver Figura 1). Cuando estudiamos la dinámica de un sistema infra-actuado, antes siquiera de plantearse la pregunta “¿cómo desplazar el robot del punto A al punto B?” (*planificación de trayectorias*), uno debe resolver la cuestión de si *es posible* que el robot pueda desplazarse del punto A al punto B (*controlabilidad*). Una vez respondida afirmativamente esta pregunta, y como paso intermedio para poder abordar la planificación de trayectorias, es útil plantearse otras cuestiones tales como “¿qué movimiento realiza el robot si utilizamos estas o aquellas fuerzas de control?” o “¿qué tipo de trayectorias puede describir el robot *con facilidad*?”. Resolver estas preguntas es un paso indispensable para desarrollar soluciones en entornos con obstáculos y en ambientes desconocidos que tengan en cuenta la posibilidad de colisiones y ofrezcan una navegación segura del robot.

El interés por controlar sistemas infra-actuados proviene principalmente de dos consideraciones:

- (i) en el caso del fallo de un actuador en un robot completamente actuado, si éste está dotado de algoritmos de control para operar el sistema infra-actuado resultante, puede reaccionar ante el malfuncionamiento y seguir realizando la tarea programada. Los algoritmos de control avanzados dotan por tanto de mayor seguridad y robustez a los sistemas robóticos. Esto es especialmente importante en entornos remotos o peligrosos, donde la recuperación o la reparación del robot no es siempre posible, y en entornos donde la continuidad de la tarea que realiza el robot es crítica, como por ejemplo en una cadena industrial de montaje;
- (ii) la habilidad para controlar sistemas infra-actuados hace posible diseñar sistemas más económicos minimizando el uso de componentes mecánicos costosos, tales como actuadores y transmisiones, y reemplazándolos con algoritmos de control sofisticados. Normalmente los actuadores son mecanismos caros. Por el contrario, el coste del cálculo de algoritmos de control avanzados es mucho menor, con la ventaja adicional de que el resultado puede reutilizarse. Cuando sea posible, trasladaremos la complejidad del sistema de la parte mecánica al software de control. Esto puede ser especialmente importante

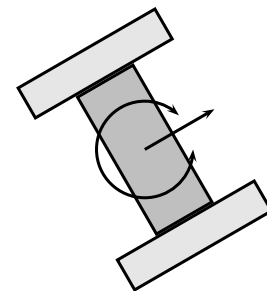


Figura 1: El unicycle es un ejemplo de sistema infra-actuado: posee tres grados de libertad (posición y orientación en el plano), pero sólo dos actuadores (movimiento hacia adelante/atrás y rotación sobre sí mismo).

cuando consideramos la producción de un gran número de robots, por ejemplo. Otra peculiaridad importante es que hoy en día muchos sistemas, como los vehículos acuáticos y terrestres, son infra-actuados por diseño.

Tanto desde un punto de vista teórico como práctico, los sistemas infra-actuados plantean muchos problemas de control no triviales, incluyendo los siguientes: el análisis de las propiedades de controlabilidad (obtener condiciones necesarias o suficientes que garanticen que un sistema infra-actuado puede ser controlado efectivamente), el desarrollo de expansiones en serie y el análisis perturbativo (para describir la respuesta de un sistema infra-actuado a un forzamiento específico), y el diseño de estrategias de planificación de movimientos (reconfiguración punto a punto, estabilización, seguimiento de trayectorias, etc.). A pesar de la dificultad intrínseca de todos estos problemas, queremos incidir a lo largo de esta memoria en el siguiente *mantra*: cabe esperar grandes avances científicos de una mejor comprensión de la estructura interna de las ecuaciones que gobiernan la evolución de los sistemas infra-actuados. Esta visión desde los fundamentos de las ecuaciones ayuda en el estudio de varios aspectos importantes, incluyendo la modelización, el análisis y el diseño.

En general, el problema de la planificación de trayectorias puede formularse como un problema de optimización no lineal, donde los parámetros de control son coeficientes de ciertas funciones básicas (por ejemplo, splines, polinomios, series de Fourier truncadas) y las trayectorias del sistema se obtienen integrando las ecuaciones del movimiento. Sin embargo, esta aproximación no puede aplicarse ciegamente. La calidad de las soluciones depende de manera fundamental de la selección inicial del control y del óptimo local resultante. El número de óptimos locales y el tamaño de sus regiones de atracción son difícilmente caracterizables *a priori*. Además, la evaluación de la función objetivo y de las ligaduras a menudo necesita de simulaciones computacionalmente costosas, lo que resulta en una convergencia lenta. Los métodos de optimización gradiente son inherentemente locales, y más apropiados cuando se conoce una solución aproximada. Por otro lado, los métodos de programación dinámica pueden conseguir soluciones globalmente óptimas, pero también son computacionalmente costosos y desde luego no son implementables en tiempo real. Las búsquedas aleatorias basadas en heurísticas [22, 25] renuncian a la optimalidad o la completitud con el objetivo de reducir el tiempo medio de cálculo.

*Una idea básica a lo largo de mi investigación ha sido explorar la rica estructura geométrica de los sistemas mecánicos para identificar los principios fundamentales que encierra su comportamiento dinámico.*

Nuestra perspectiva a la hora de aproximarnos al problema de la planificación de trayectorias para sistemas infra-actuados se basa en el estudio de la rica estructura de las ecuaciones del movimiento. El tratamiento que exponemos en la Sección 2 es intrínseco (independiente del sistema de coordenadas elegido para representar el problema) y general (válido para una amplia familia de sistemas, en lugar de para ejemplos concretos). Al mismo tiempo, el enfoque se basa en magnitudes y objetos que tienen una clara relevancia física. A lo largo de la narrativa, nos gustaría ilustrar como la combinación de diferentes herramientas matemáticas resulta clave a la hora de establecer resultados útiles en un amplio rango de aplicaciones; y, recíprocamente, como problemas concretos del mundo real impulsan y guían el desarrollo de nuevos resultados matemáticos.

## Control geométrico para la coordinación de sistemas autónomos

La coordinación de sistemas autónomos está adquiriendo una gran importancia en numerosas áreas de la ingeniería. El despliegue de grandes grupos de sensores móviles y vehículos autónomos está convirtiéndose en una realidad gracias a los avances tecnológicos en redes y en miniaturización de sistemas electro-mecánicos. Estas y otras tecnologías emergentes han ido llenando rápidamente el vacío

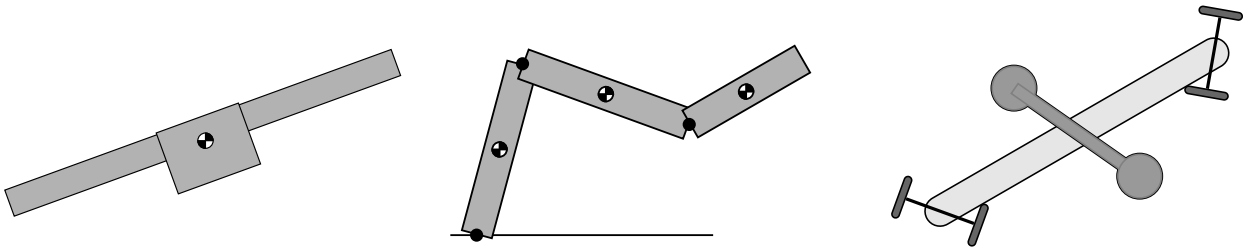


Figura 2: Los sistemas robóticos infra-actuados aparecen en multitud de entornos. De izquierda a derecha, un modelo plano (vertical) del despegue y aterrizaje de un avión (PVTOL), un manipulador robótico y el snakeboard.

que existía para poder fabricar grandes cantidades de pequeños dispositivos, altamente autónomos, baratos y energéticamente eficientes, equipados con las capacidades de comunicarse entre sí, medir y estimar fenómenos físicos en su entorno, procesar los datos que adquieren y decidir su movimiento con la información procesada. En un futuro cercano, este tipo de dispositivos, coordinados en grupo, comunicándose por medio de redes ad hoc, llevarán a cabo una variedad de complejas tareas en entornos aéreos, acuáticos, espaciales y terrestres. En dominios científicos y comerciales, sensores y vehículos coordinados desarrollarán operaciones de búsqueda y rescate, reconocimiento, recogida y fusión de datos, control medioambiental para la detección y la estimación de polución, etc. Las ventajas potenciales que resultarán de utilizar colecciones de sensores son numerosas. Por ejemplo, ciertas tareas son difíciles, si no imposibles, cuando son realizadas por un solo agente. Además, un grupo de agentes ofrece de manera inherente una resistencia más robusta ante fallos de los agentes individuales o de los canales de comunicación.

Una muestra de las aplicaciones previstas de estas redes de sensores son sistemas de control medioambiental (por ejemplo, grupos portátiles de sensores químicos y biológicos que pueden detectar contaminantes tóxicos en un entorno), sistemas de despliegue rápido en situaciones catastróficas (terremotos, avalanchas, etc.), redes autónomas en aplicaciones biológicas (por ejemplo, para el monitoreo de especies en peligro de extinción o la validación de modelos climáticos y oceanográficos), y control y vigilancia de estructuras civiles como puentes, edificios, etc. Estos escenarios futuros motivan el estudio de algoritmos para la autonomía, la adaptación y la coordinación de redes de sensores.

Los movimientos grupales coordinados son también un fenómeno ampliamente observado en los sistemas biológicos. Algunas especies de peces pasan su vida en bancos como mecanismo de defensa contra los predadores. Otras viajan en grupo para proteger un área que reclaman como propia. Las bandadas de pájaros son capaces de volar en grandes grupos y actuar como si fueran un solo animal. Otros animales exhiben comportamientos colectivos sorprendentes cuando buscan y seleccionan comida. Algunos de estos comportamientos incluyen a animales individuales estableciendo zonas de influencia en su entorno y a especies que desarrollan áreas de exploración conjunta. Estos sistemas biológicos poseen extraordinarias capacidades dinámicas sin ningún líder aparente. Estos fascinantes comportamientos coordinados emergen mientras cada individuo sólo tiene un conocimiento parcial del estado del sistema y decide sus movimientos según lo que observa de sus vecinos más cercanos.

La complejidad de tales sistemas móviles presenta nuevos desafíos en la frontera entre la *comunicación*, la *computación* y el *control*. Aunque la tecnología suministra los componentes físicos de tales redes de sensores, y aunque estos sistemas tendrían un impacto positivo en numerosas aplicaciones, los beneficios potenciales de tales sistemas no se han *materializado* todavía.

*A día de hoy, la limitación fundamental es la falta de entendimiento para coordinar los dispositivos*



*individuales en un todo coherente.*

Dicho de otra manera, no existen metodologías sistemáticas para controlar sistemas distribuidos y fiables a gran escala, tales como una red de sensores desarrollando tareas complejas. Como consecuencia de estas limitaciones tecnológicas, existe una fuerte necesidad por expandir el conjunto de paradigmas y herramientas actualmente disponibles para el diseño de redes escalables de sensores y la verificación formal de su rendimiento.

### **Problemas de cubrimiento y emplazamiento óptimo de sensores**

Tomemos un ejemplo concreto para hacernos una idea más clara. Consideremos el siguiente escenario: supongamos que tenemos una red de agentes móviles, cada uno de ellos con capacidad para, de manera autónoma, procesar datos, estimar su entorno inmediato, comunicarse información y planificar sus propios movimientos. Supongamos también que cada uno de los agentes tiene cierta información acerca de los eventos que pueden ocurrir en el entorno y deben ser atendidos: digamos que cada agente sabe en qué zonas su presencia es más importante y en qué zonas lo es menos. Dado este escenario, pedimos a la red móvil que realice la tarea de posicionarse en el entorno y repartirse éste en zonas de influencia disjuntas, todo de manera óptima.

Como el lector puede imaginar, hay muchas maneras de resolver el problema. Una posibilidad sería implementar el siguiente algoritmo: los agentes de la red comunican la información que tienen acerca del entorno a un ordenador central, que junto con los datos acerca de las dimensiones del entorno y el número de agentes, determina la solución óptima para el emplazamiento de los agentes y la partición del entorno. Después, el ordenador central comunica a cada agente cuál

*Los algoritmos de coordinación de sistemas autónomos y redes de sensores móviles deben ser adaptativos, distribuidos, asíncronos y asintóticamente correctos.*

es la posición a la que debe moverse, y cada uno de ellos ejecuta el movimiento correspondiente. A primera vista, este algoritmo tiene varias desventajas: la primera (¡y fundamental!) es que si el ordenador central falla por alguna razón, la ejecución de todo el algoritmo se viene abajo. Otra desventaja viene dada por la dependencia del tamaño de la red: si contamos con 10 agentes, es posible que el ordenador central pueda solucionar el problema de optimización en un tiempo razonable. Sin embargo, si tuviéramos 100 o 1000, el tiempo de cálculo haría impracticable la ejecución del algoritmo. Aún cabe señalar el inconveniente de la *rigidez* de la estrategia: si la distribución de los eventos a cubrir en el entorno por los agentes cambia, el algoritmo tardaría en adaptarse, dado que primero habría que transmitir la nueva información al ordenador central, después calcular los nuevos emplazamientos, y finalmente transmitirlos de vuelta a cada uno de los agentes. Hay también otras desventajas asociadas a fallos de los agentes individuales o en la comunicación entre los agentes y el ordenador central.

Los inconvenientes que acabamos de señalar se pueden resumir en una característica básica: el algoritmo que hemos propuesto es *centralizado*. Las decisiones acerca de la ejecución del mismo han de ser tomadas por el ordenador central, lo cual en muchas situaciones hace que la ejecución sea lenta, poco flexible y sujeta a fallos. A la hora de diseñar algoritmos de coordinación para llevar a cabo tareas como las que hemos descrito, es importante tener en consideración todas las ligaduras presentes en el comportamiento de la red. Los algoritmos deben ser:

**Adaptativos:** los algoritmos de coordinación deben dotar a la red de la habilidad para responder y adaptarse a diversas tareas, ambientes dinámicos y topologías variables (debido a llegadas, salidas o fallos de agentes individuales). La red ha de ser capaz de reaccionar a gran variedad de condiciones cambiantes.

**Distribuidos:** los algoritmos de coordinación deben depender de la menor cantidad posible de información global, y en cambio, es deseable que el comportamiento de cada agente dependa sólo de información local. Los algoritmos distribuidos tienen la ventaja de ser escalables (es decir, funcionan en redes formadas por un número arbitrario de agentes y satisfacen las limitaciones de ancho de banda en las comunicaciones), y robustos ante los fallos en la comunicación o el mal funcionamiento de los agentes individuales. A medida que la red evoluciona, las relaciones de vecindad cambian. Por tanto, los algoritmos distribuidos para grafos de comunicación fijos (habituales, por ejemplo, en computación paralela y en ciertos tipos de aplicaciones en internet) no son aplicables a este tipo de situaciones dinámicas.

**Asíncronos:** los algoritmos de coordinación deben ser implementables de manera asíncrona. Esto significa que los agentes de la red pueden estar evolucionando con distintas velocidades, y con diferentes capacidades de computación y comunicación. Además, no existe un *reloj global* para toda la red, sino que cada agente evoluciona de acuerdo a su propia noción de tiempo. Casi en cualquier escenario real, la información se propaga entre los agentes con cierto retraso, y además éste nunca es el mismo. Estas características hacen a la vez crucial y complicado establecer garantías formales acerca del comportamiento de la red.

**Corrección asintótica verificable:** Mientras se completa la tarea asignada, los algoritmos de coordinación han de garantizar una convergencia segura frente a posibles fallos en el sistema (colisiones, atascos de comunicación, fallos de los dispositivos en cada robot, etc.). La importancia de la verificación formal crece con la dimensión y la complejidad de la red de robots considerada.

En la Sección 3 describimos nuestra aproximación al problema de emplazamiento óptimo de sensores desde esta perspectiva. De nuevo, el mensaje que queremos transmitir es que un estudio profundo de la estructura matemática de los problemas de control ayuda a obtener soluciones satisfactorias; y viceversa, para avanzar en la resolución del problema, necesitamos explorar nuevas herramientas matemáticas y desarrollar nuevos resultados.

## 2. Control geométrico de sistemas autónomos individuales

La mayoría de los dispositivos robóticos que hemos mencionado hasta ahora se pueden caracterizar por su estructura Lagrangiana común. Normalmente, estos sistemas exhiben simetrías y su movimiento está constreñido por el entorno en el que operan a través de ligaduras en las velocidades. En esta sección, introducimos un lenguaje de modelización general para sistemas autónomos infra-actuados. Después nos centraremos en el estudio de los aspectos de controlabilidad, expansiones en serie y planificación de trayectorias.

### Modelización de sistemas robóticos

El lector que no esté familiarizado con las nociones de variedad diferenciable, campo vectorial y conexión afín puede consultar [1, 18, 24]. Sea  $Q$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional representando las posibles configuraciones del sistema autónomo. Denotemos por  $C^\infty(Q)$  el conjunto de funciones diferenciables definidas sobre  $Q$  con valores reales, y por  $\mathfrak{X}(Q)$  el conjunto de campos vectoriales sobre  $Q$ . Elijamos coordenadas locales  $(q^1, \dots, q^n)$ , y denotemos por  $\{\partial/\partial q^i\}_{i=1}^n$  la correspondiente base de campos vectoriales generando localmente el espacio tangente  $TQ$ . Para un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(Q)$ , localmente escribiremos  $X = \sum_{i=1}^n X^i(q)\partial/\partial q^i$ . Nuestro punto de partida para estudiar la dinámica y el

control de los sistemas robóticos son las ecuaciones controladas de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones se pueden escribir localmente como

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i(q) \dot{q}^j \dot{q}^k = -M^{ij}(q) \frac{\partial V}{\partial q^j} + k_j^i(q) \dot{q}^j + Y_1^i(q) u_1(t) + \dots + Y_m^i(q) u_m(t), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

donde seguimos la convención de sumar sobre los índices repetidos y

- (i) la función  $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$  corresponde a la *energía potencial*,
- (ii) el tensor  $k : TQ \rightarrow TQ$ ,  $k(q, \dot{q}) = k_j^i(q) \dot{q}^j$ , corresponde a las *fuerzas de rozamiento o de damping*,
- (iii) la métrica Riemanniana  $\mathcal{G} : TQ \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , con representación local  $\mathcal{G}(\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial q^j}) = M_{ij}(q)$ , corresponde a la inercia del sistema definiendo su *energía cinética*,
- (iv)  $\{\Gamma_{jk}^i : i, j, k = 1, \dots, n\}$  son los  $n^3$  símbolos de Christoffel, definidos mediante la formula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} M^{mk} \left( \frac{\partial M_{mj}}{\partial q^i} + \frac{\partial M_{mi}}{\partial q^j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q^m} \right), \quad (2)$$

donde  $M^{mk}$  es la componente  $(m, k)$  de la matriz  $M^{-1}$ , y,

- (v)  $\{F_a \mid a \in \{1, \dots, m\}\}$  son los  $m$  campos de covectores input  $m$ , y  $\{Y_a = M^{-1}F_a \mid a \in \{1, \dots, m\}\}$  son los  $m$  campos vectoriales input. Las funciones  $\{u_a \mid a \in \{1, \dots, m\}\}$  corresponden a las señales de control que podemos elegir para actuar sobre la dinámica del sistema.

Los sistemas infra-actuados tienen menos actuadores,  $m$ , que grados de libertad  $n > m$ . Puede haber también otras limitaciones en las señales de control: por ejemplo, los actuadores pueden tener limitada su magnitud y/o su tasa, o quizás sólo pueden generar señales binarias o unilaterales (como en el caso de los motores de un satélite).

La noción de conexión afín nos ofrece una manera intrínseca de describir la dinámica de los sistemas robóticos. Una *conexión afín*  $\nabla : \mathfrak{X}(Q) \times \mathfrak{X}(Q) \rightarrow \mathfrak{X}(Q)$  asigna a dos campos vectoriales  $X, Y$  sobre  $Q$ , un tercer campo vectorial  $\nabla_X Y$ , llamado *derivada covariante de  $Y$  con respecto a  $X$* . Dada una métrica Riemanniana  $\mathcal{G}$  sobre  $Q$ , existe una única conexión afín  $\nabla^{\mathcal{G}}$  asociada a  $\mathcal{G}$  de manera natural. Esta conexión se llama *conexión de Levi-Civita* y está determinada por la fórmula

$$\mathcal{G}(\nabla_X^{\mathcal{G}} Y, Z) = \frac{1}{2} \left( X(\mathcal{G}(Y, Z)) + Y(\mathcal{G}(Z, X)) - Z(\mathcal{G}(X, Y)) + \mathcal{G}(Y, [Z, X]) - \mathcal{G}(X, [Y, Z]) + \mathcal{G}(Z, [X, Y]) \right).$$

En coordenadas locales, tenemos que

$$\nabla_X^{\mathcal{G}} Y = \left( \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} X^j + \Gamma_{jk}^i X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad (3)$$

es decir, los símbolos de Christoffel de la ecuación en (2) definen unívocamente la conexión de Levi-Civita, y viceversa, puesto que  $\Gamma_{jk}^i \partial / \partial q^i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^j}}^{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^k}$ .

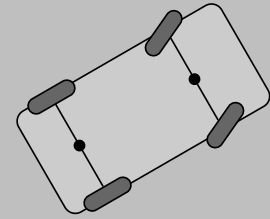
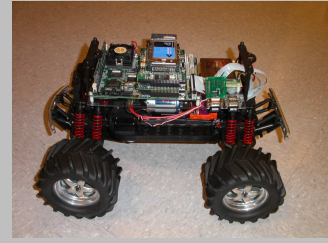
En términos de la conexión de Levi-Civita, las ecuaciones de Euler-Lagrange (1) para un sistema sujeto a una fuerza conservativa  $M^{-1}dV$ , una fuerza de rozamiento o de damping  $k$  y campos vectoriales input  $Y_1, \dots, Y_m$  pueden re-escribirse como

$$\nabla_{\dot{q}}^{\mathcal{G}} \dot{q} = M^{-1}dV(q) + k(q, \dot{q}) + \sum_{a=1}^m Y_a(q) u_a(t). \quad (4)$$

La ecuación (4) es una versión libre de coordenadas de la ecuación (1). Una observación crucial es el hecho de que los sistemas sujetos a *ligaduras noholónomas* también pueden ser modelados por medio de conexiones afines.

**Viñeta 1 (Rover)**

Vehículo todoterreno equipado con un ordenador portátil, GPS y comunicación inalámbrica desarrollado en el Agile and Coordinated Vehicle Laboratory de la University of Illinois at Urbana-Champaign, y modelo de su movimiento en el plano horizontal. Aquí no consideramos fuerzas de rozamiento. Asumamos que el centro de masas está situado en el punto medio del eje trasero. La configuración del sistema está dada por  $(x, y, \theta, \gamma) \in SE(2) \times S^1$ , donde  $(x, y)$  es la posición del centro de masas del vehículo y  $\theta$  es su orientación, ambas con respecto a una base fija  $\{e_x, e_y\}$  del plano, y  $\gamma$  es la orientación de las ruedas delanteras con respecto al eje longitudinal del robot. La métrica Riemanniana es  $\mathcal{G} = m dx \otimes dx + m dy \otimes dy + (J_1 + J_2) d\theta \otimes d\theta + J_2 d\gamma \otimes d\gamma$ , con  $m$  la masa del vehículo,  $J_1$  su momento de inercia y  $J_2$  el momento de inercia de las ruedas delanteras respecto al eje vertical. Las fuerzas de control son el impulso del motor  $F^1 = h \cos \theta \cos \gamma dx + h \sin \theta \cos \gamma dy + \sin \gamma d\theta$ , donde  $h$  es la distancia entre los ejes, y el torque  $F^2 = d\gamma$  que hace cambiar la orientación de las ruedas delanteras.



¿Y qué es una ligadura noholónoma? Consideremos el caso de una moneda que rueda sin deslizar sobre una mesa. Dado que no resbala, la velocidad lineal del punto de contacto con la mesa debe ser cero en todo momento (¡de otra manera, la moneda sí se deslizaría!). Esta condición en las velocidades del sistema es un ejemplo de ligadura noholónoma. En general, todos los sistemas robóticos con ruedas están sujetos a este tipo de ligaduras. Matemáticamente, estas condiciones sobre las velocidades se formalizan por medio del concepto de distribución. Una *distribución diferenciable regular*  $\mathcal{D}$  sobre  $Q$  está formada por una colección  $\{\mathcal{D}(q) \subset T_q Q \mid q \in Q\}$  de subespacios vectoriales de  $TQ$  de la misma dimensión que depende diferenciablemente de  $q \in Q$ . Las velocidades admisibles para el sistema son las que pertenecen a la distribución  $\mathcal{D}$ . A partir de la métrica  $\mathcal{G}$ , su conexión de Levi-Civita  $\nabla^{\mathcal{G}}$  y la distribución  $\mathcal{D}$ , podemos definir una nueva conexión afín como sigue. Sean  $\mathcal{P} : TQ \rightarrow \mathcal{D}$  y  $\mathcal{Q} : TQ \rightarrow \mathcal{D}^\perp$  los proyectores  $\mathcal{G}$ -ortogonales asociados a  $\mathcal{D}$ . La conexión afín noholónoma  $\bar{\nabla}$  (cf. [10, 28, 41]) está definida por la ecuación

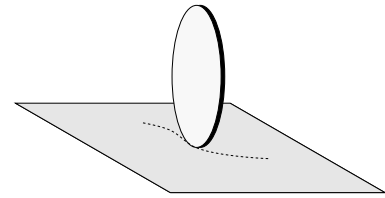


Figura 3: Una moneda rodando sin deslizar sobre un plano es un ejemplo de sistema mecánico sujeto a ligaduras noholónomas.

$$\bar{\nabla}_X Y = \mathcal{P}(\nabla_X^{\mathcal{G}} Y) + \nabla_X^{\mathcal{G}}(\mathcal{Q}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(Q).$$

Las ecuaciones de control de un sistema sujeto a una fuerza conservativa  $M^{-1}dV$ , una fuerza de rozamiento o de damping  $k$ , campos vectoriales input  $Y_1, \dots, Y_m$  y ligaduras noholónomas definidas por  $\mathcal{D}$  pueden escribirse

$$\bar{\nabla}_{\dot{q}} \dot{q} = \mathcal{P}(M^{-1}dV(q)) + \mathcal{P}(k(q, \dot{q})) + \sum_{a=1}^m \mathcal{P}(Y_a(q)) u_a(t). \quad (5)$$

Como decíamos antes, es importante reparar en que las ecuaciones (4) para sistemas sin ligaduras y las ecuaciones (5) para sistemas sujetos a ligaduras noholónomas tienen la misma estructura. Es por eso que, en general, estudiaremos la clase de *sistemas de control con conexión afín* (que engloba a los casos que acabamos de describir),

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = Y_0(q) + k(q, \dot{q}) + \sum_{a=1}^m Y_a(q) u_a(t). \quad (6)$$

## La estructura homogénea de los sistemas robóticos

La estructura fundamental del sistema de control con conexión afín es la dependencia polinómica de los diferentes campos vectoriales en las variables de velocidad  $\dot{q}$ . Esta estructura afecta al cálculo de los corchetes de Lie que involucran a los diferentes campos vectoriales. Las ecuaciones de control de la ecuación (6) pueden re-escribirse como ecuaciones diferenciales de primer orden. Denotando  $x = (q, \dot{q})$ , tenemos que

$$\dot{x} = Z_{\nabla}(x) + Y_0^{\text{lift}}(x) + k^{\text{lift}}(x) + \sum_{a=1}^m Y_a^{\text{lift}}(x)u_a(t), \quad (7)$$

donde  $Z_{\nabla} \in \mathfrak{X}(TQ)$  es el *spray geodésico* asociado a la conexión afín  $\nabla$ , y  $\{Y_a^{\text{lift}} \mid a \in \{0, 1, \dots, m\}\}$  y  $k^{\text{lift}}$  son los *levantamientos verticales* a  $TQ$  (cf. [17, 42]) de los campos vectoriales  $\{Y_a \mid a \in \{0, 1, \dots, m\}\}$  y el tensor  $k$ , respectivamente. En coordenadas locales,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -\Gamma(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Y_0(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k(q)(\dot{q}) \end{bmatrix} + \sum_{a=1}^m \begin{bmatrix} 0 \\ Y_a(q) \end{bmatrix} u_a(t),$$

donde  $\Gamma(q, \dot{q})$  es el vector cuya componente  $i$ -ésima es  $\Gamma_{jk}^i(q)\dot{q}^j\dot{q}^k$ .

Para capturar la dependencia polinómica a la que nos referíamos, necesitamos introducir la noción de homogeneidad geométrica. Un campo vectorial  $X$  sobre  $TQ$  se dice *homogéneo de grado*  $\ell \in \mathbb{Z}$  si su corchete de Lie con el campo vectorial de Liouville<sup>1</sup>  $\Delta$  verifica  $[\Delta, X] = \ell X$ . El conjunto de campos vectoriales homogéneo de grado  $\ell$  se denota como  $\mathcal{P}_{\ell}$ . Con el concepto de homogeneidad geométrica, estamos listos para presentar dos ideas simples y poderosas. Primero, todos los campos vectoriales que hemos introducido anteriormente (cf. ecuación (7)) son homogéneos para algún valor específico de  $\ell$ . De hecho,  $Z_{\nabla} \in \mathcal{P}_1$ ,  $k^{\text{lift}} \in \mathcal{P}_0$ , y  $Y_a^{\text{lift}} \in \mathcal{P}_{-1}$ . Segundo, dado que  $[\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] \subset \mathcal{P}_{i+j}$ , cualquier corchete de Lie de los campos vectoriales dados sigue siendo homogéneo. En otras palabras, el conjunto de campos vectoriales homogéneos es cerrado bajo la operación del corchete de Lie. Las propiedades de homogeneidad de los campos vectoriales de las ecuaciones de control tienen varias consecuencias en diferentes aspectos del estudio de las mismas. Una de las más importantes es el efecto en el análisis de controlabilidad y, en particular, en el cálculo de los corchetes de Lie. Por ejemplo, como consecuencia de nuestra discusión previa  $[Y_b^{\text{lift}}, [Z_{\nabla}, Y_a^{\text{lift}}]]$  es el levantamiento vertical de un campo vectorial especial definido sobre  $Q$ , que llamamos el *producto simétrico* de  $Y_b$  y  $Y_a$ . La operación del producto simétrico está asociada a una conexión afín: su definición es  $\langle Y_a : Y_b \rangle = \nabla_{Y_a} Y_b + \nabla_{Y_b} Y_a$ . En coordenadas locales,

$$\langle Y_b : Y_a \rangle = \left[ \frac{\partial Y_a^i}{\partial q^j} Y_b^j + \frac{\partial Y_b^i}{\partial q^j} Y_a^j + \Gamma_{jk}^i \left( Y_a^j Y_b^k + Y_a^k Y_b^j \right) \right] \frac{\partial}{\partial q^i},$$

con  $\Gamma_{jk}^i \partial / \partial q^i = \nabla_{\partial / \partial q^j} \frac{\partial}{\partial q^k}$ . Un cálculo directo muestra  $[Y_b^{\text{lift}}, [Z_{\nabla}, Y_a^{\text{lift}}]] = \langle Y_a : Y_b \rangle^{\text{lift}}$ . El producto simétrico caracteriza las distribuciones geodésicamente invariantes [26]: una distribución  $\mathcal{U}$  sobre  $Q$  es geodésicamente invariante para  $\nabla$  (es decir, cualquier geodesica de  $\nabla$  con velocidad inicial en  $\mathcal{U}$  describe velocidades contenidas en  $\mathcal{U}$ ) si y sólo si  $\langle X : Y \rangle \in \mathcal{U}$ , para todo  $X, Y \in \mathcal{U}$ . El producto simétrico

<sup>1</sup>El campo vectorial de Liouville [30] es el generador infinitesimal del grupo 1-paramétrico de dilataciones en  $TQ$ . Localmente,  $\Delta = \dot{q}^i \partial / \partial \dot{q}^i$ .

---

En términos locales, la caracterización de campos vectoriales homogéneos es muy intuitiva. Si  $h_{\ell}(q, \dot{q})$  denota el conjunto de funciones escalares con dependencia arbitraria de  $q$  y dependencia polinómica de  $\{\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n\}$  homogénea de grado  $\ell$  (en el sentido usual), entonces  $X = X_1^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_2^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \in \mathfrak{X}(TQ)$  es homogéneo de grado  $\ell$  si y sólo si  $X_1^i, i \in \{1, \dots, n\}$  pertenece a  $h_{\ell}$  y  $X_2^i, i \in \{1, \dots, n\}$  pertenece a  $h_{\ell+1}$ .

---

juega también un papel fundamental en casi todos los problemas de control estudiados para esta clase de sistemas, incluyendo la controlabilidad no lineal [12, 15, 29], el control óptimo [8, 27], la linealización vía feedback dinámico [37], la estabilización mediante controles disipativos [34], el diseño de algoritmos para la planificación de trayectorias y la estabilización [6, 32, 36], y el análisis de promediados y el control vibracional [4, 33]. El lector puede encontrar en [7, 10, 31] una panorámica general ilustrando todos estos aspectos en profundidad.

### 3. Coordinación de sistemas autónomos y problemas de cubrimiento

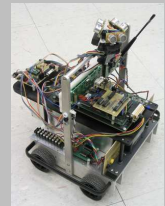
En esta sección, discutimos el problema de coordinación de sistemas autónomos y redes de sensores que realizan cooperativamente una tarea. Estamos interesados en el comportamiento de redes asíncronas que resultan de la interacción de muchos agentes. En concreto, nos centramos en el problema de cubrimiento de un entorno deseado, y de emplazamiento óptimo de los sensores en el mismo. Nuestro primer paso es definir las características de los sistemas robóticos que componen la red. Después, concretaremos las tareas que queremos que la red lleve a cabo. Esto nos llevará a analizar las propiedades del problema desde un punto de vista matemático. Finalmente, una vez que hayamos entendido la naturaleza y particularidades del mismo, diseñaremos e implementaremos algoritmos de coordinación para lograr que la red lleve a cabo el objetivo deseado.

#### Modelización de una red de agentes robóticos móviles

Empezamos esta sección dando un modelo simple de una red de agentes robóticos móviles que realizan acciones de estimación, comunicación, cálculo y control. A lo largo de la discusión, sólo consideramos modelos sencillos para la dinámica individual de cada agente. La razón detrás de esta elección es que preferimos centrarnos en los aspectos de coordinación e interacción entre los agentes. En el futuro, nuestro objetivo es considerar dinámicas individuales más complejas. Introduzcamos pues la noción de *agente robótico con capacidad de cálculo, comunicación y control* como el elemento  $i$ -ésimo de una red. El agente  $i$ -ésimo tiene un procesador con la habilidad de definir variables continuas y discretas, y realizar operaciones sobre ellas. Este agente ocupa el lugar  $p_i \in Q \subset \mathbb{R}^2$ , donde  $Q$  es un polígono convexo representando el entorno de interés. Cada agente es capaz de moverse en cualquier momento  $t \in \mathbb{R}_+$  de acuerdo a la dinámica  $\dot{p}_i(t) = u_i$ . El procesador, que tiene acceso a la posición  $p_i$  del agente, es el que determina el control  $u_i$ . El procesador tiene también acceso a un reloj local  $t_i \in \mathbb{R}_+$ , y, posiblemente, a una *sucesión programada*, es decir, una sucesión creciente de instantes  $\{T_{i,k} \in \mathbb{R}_+ \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  con  $T_{i,0} = 0$ .

#### Viñeta 2 (Robot móvil)

Robot móvil con capacidad de cálculo, estimación y control desarrollado en el Control Systems Laboratory de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign. El robot está dotado de un procesador Texas Instruments DSP 6711 de 32bit a 150MHz, de micro-controladores para planificar y ejecutar su movimiento, y de tres sensores ultrasónicos y tres sensores infrarojos para medir distancias desde un radio de 3cm hasta uno de 6 metros. Los sensores están montados en un servomotor que rota para escanear incrementalmente el área alrededor del robot. Más detalles acerca de esta arquitectura pueden encontrarse en [38].



El agente  $i$ -ésimo es capaz de transmitir información a cualquier otro agente dentro de un radio  $R_i \in \mathbb{R}_+$ . Asumimos que este radio puede ser ampliado o reducido por el agente en función de sus necesidades de comunicación. Alternativamente, también podemos considerar *agentes robóticos con capacidad de cálculo, estimación y control*, donde la capacidad de comunicación es sustituida por la capacidad para detectar y estimar la posición y el estado de cualquier agente dentro de un radio ajustable  $R_i \in \mathbb{R}_+$ .

## Evaluando el rendimiento de la red mediante funciones agregadas

Como decíamos en la Introducción, queremos que la red de sensores móviles se distribuya en el entorno, que cada uno de los agentes se posicione de manera óptima, y que entre todos ellos lleguen a un acuerdo para repartirse el entorno en zonas de influencia disjuntas, también de manera óptima. Ahora bien, ¿qué significa exactamente “óptimo”? El objetivo de esta sección es introducir los criterios para juzgar si el comportamiento de nuestra red de agentes robóticos móviles es óptimo o no.

Sea  $\phi : Q \rightarrow \mathbb{R}_+$  un función *de densidad* (medible y acotada), representando la probabilidad de que cierto evento tenga lugar en el entorno  $Q$ . A causa del ruido y la pérdida de resolución, la estimación que realiza un sensor localizado en  $p_i$  de un dato localizado en el punto  $q$  se degrada con la distancia. Por tanto,  $\|q - p_i\|$  (donde  $\|\cdot\|$  denota la distancia Euclídea) nos da una evaluación cuantitativa de cuánto de mala es la estimación. La primera función que proponemos para medir la calidad del servicio que la red de sensores nos ofrece descansa directamente en esta idea: dada la información provista por la función de densidad  $\phi$ , midamos cuál es el valor esperado de la distancia entre un punto cualquiera del entorno y el sensor de la red más cercano a este punto, es decir,

$$\mathcal{H}_C(P) = E_\phi \left( \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \|q - p_i\|^2 \right) = \int_Q \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \|q - p_i\|^2 \phi(q) dq, \quad (8)$$

donde  $P = (p_1, \dots, p_n) \in Q^n$ . Para optimizar el rendimiento de la red, el objetivo sería pues minimizar el valor de  $\mathcal{H}_C$ , es decir  $\min_{P \in Q^n} \mathcal{H}_C(P)$ . En la literatura de localización de recursos [19], este se llama el problema  $p$ -mediano. Nosotros nos referiremos a él como el *escenario del valor esperado*.

La segunda función que proponemos para medir la calidad del servicio que provee la red es complementaria a la situación anterior. Supongamos que la red no dispone ahora de información acerca de lo que está ocurriendo, o de la probabilidad de que ocurra, en el entorno. En términos formales, la red no dispone de la función de densidad  $\phi$ . En este caso, parece lógico considerar el peor caso posible, esto es, preocuparse por la mayor distancia posible desde un punto cualquiera del entorno a uno de los sensores que integran la red,

$$\mathcal{H}_{DC}(P) = \max_{q \in Q} \left\{ \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \|q - p_i\| \right\}. \quad (9)$$

Efectivamente, los puntos en  $\text{argmax} \left\{ \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \|q - p_i\| \right\} \subset Q$  son los que más tardarían en ser atendidos por los agentes en caso de que algo ocurriera allí. Para optimizar el rendimiento de la red, el objetivo es pues minimizar el valor de  $\mathcal{H}_{DC}$ , es decir  $\min_{P \in Q^n} \mathcal{H}_{DC}(P)$ . En [19, 40], este problema recibe el nombre de problema  $p$ -centro. Dada la interpretación anterior, nosotros nos referiremos a él como el *escenario del peor caso*. En [40] podemos encontrar la siguiente conjetura: *el problema  $p$ -centro es equivalente a un problema de cubrimiento por discos*, esto es, cómo cubrir una región con discos iguales de radio mínimo. Más adelante, enunciaremos un resultado que valida esta conjetura.

Finalmente, la tercera función que proponemos para medir la calidad del servicio de la red es dual al escenario del peor caso. Nuestro objetivo ahora es que la red cubra una porción lo más grande posible del entorno  $Q$ , pero que los áreas barridas por los sensores no se intersequen (por ejemplo, porque

---

Como ejemplo de una aplicación concreta, consideremos  $n$  robots móviles equipados con micrófonos intentando detectar, identificar y localizar una fuente de sonido. ¿Cómo debemos planificar el movimiento de los robots para maximizar la probabilidad de detección? Si asumimos que la fuente emite una señal conocida, el algoritmo de detección óptimo es un filtro calibrado. La fuente es detectada dependiendo de la ratio señal-ruido, que es inversamente proporcional a la distancia entre el micrófono y la fuente. Varios tipos de sensores electromagnéticos y sonoros tienen ratios señal-ruido que son inversamente proporcionales a la distancia.

---

no queremos que haya interferencias entre los sensores). En este caso parece razonable considerar las distancias de los sensores entre sí, y de los sensores con respecto a la frontera del entorno (que denotamos  $\partial Q$ ),

$$\mathcal{H}_{\text{SP}}(P) = \min_{i \neq j \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \frac{1}{2} \|p_i - p_j\|, \text{Dist}(p_i, \partial Q) \right\}. \quad (10)$$

Para optimizar el rendimiento de la red, el objetivo sería pues maximizar el valor de  $\mathcal{H}_{\text{SP}}$ , es decir  $\max_{P \in Q^n} \mathcal{H}_{\text{SP}}(P)$ . Nos referiremos a este problema como el *escenario de no-interferencia*. Una conjetura similar a la que hemos presentado arriba es que este problema puede formularse cómo un problema de empaquetamiento de esferas: cómo maximizar el cubrimiento de una región con discos iguales y disjuntos (contenidos en la región) de radio máximo. Volveremos a esta cuestión más adelante.

### Análisis de las medidas de rendimiento: abordando el problema poco a poco

En esta sección, analizamos los escenarios propuestos anteriormente, y en particular, prestamos especial atención a la estructura y las propiedades de diferenciabilidad de las funciones que queremos optimizar  $\mathcal{H}_{\text{C}}$ ,  $\mathcal{H}_{\text{DC}}$  y  $\mathcal{H}_{\text{SP}}$ , definidas en (8), (9) y (10), respectivamente. Para ir desvelando progresivamente las particularidades del problema, empezamos por el caso más sencillo, esto es, cuando nuestra red de agentes consta únicamente de un solo elemento, cuya posición denotamos por  $p \in Q$ .

En el escenario del valor esperado,  $\mathcal{H}_{\text{C}}(p)$  corresponde al momento polar de inercia del polígono  $Q$  sobre el punto  $p$ ,  $\mathcal{H}_{\text{C}}(p) = J_{Q,p}$ . Utilizando el teorema de los ejes paralelos, se puede deducir que

$$\mathcal{H}_{\text{C}}(p) = \mathcal{H}_{\text{C}}(\text{CM}(Q)) + M(Q) \|p - \text{CM}(Q)\|^2.$$

Por tanto, minimizar  $\mathcal{H}_{\text{C}}$  consiste en encontrar el centroide de  $Q$ . Una estrategia inmediata para el agente es calcular el gradiente de la función y seguir su dirección para llegar al centroide. De hecho,  $\mathcal{H}_{\text{C}}$  es diferenciable, y su gradiente es  $\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{C}}}{\partial p}(p) = 2M(Q)(p - \text{CM}(Q))$ . El único punto crítico de  $\mathcal{H}_{\text{C}}$  es  $\text{CM}(Q)$ , es decir,  $\partial \mathcal{H}_{\text{C}}/\partial p(p) = 0$  si y sólo si  $p = \text{CM}(Q)$ .

En el escenario del peor caso,  $\mathcal{H}_{\text{DC}}(p)$  corresponde a la distancia máxima desde  $p$  a la frontera de  $Q$ ,

$$\mathcal{H}_{\text{DC}}(p) = \text{lg}_Q(p) = \max \{ \|q - p\| \mid q \in Q \} = \max \{ \|v - p\| \mid v \in \text{Ve}(Q) \}.$$

La primera pega que encontramos es que esta función no es diferenciable, y por tanto, si quisiéramos hacer como en el caso anterior, ¿cómo minimizar  $\mathcal{H}_{\text{DC}}$  siguiendo su gradiente si este en principio no existe? Las buenas noticias son que, aunque  $\mathcal{H}_{\text{DC}}$  no sea diferenciable, *casi* lo es. De hecho, es *localmente Lipschitz* (ver Viñeta 3).

#### Viñeta 3 (Análisis no diferenciable)

Presentamos aquí brevemente algunas nociones de análisis no diferenciable siguiendo a [9]. Una función  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es *regular* si para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  y todo  $v \in \mathbb{R}^N$ , la derivada direccional por la derecha  $f'(x_0; v)$  existe y coincide con la derivada direccional generalizada  $f^o(x_0; v) = f'(x_0; v)$ . Una función  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es *localmente Lipschitz* si para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , existen  $L_{x_0} > 0$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $|f(x) - f(x')| \leq L_{x_0} \|x - x'\|$  para todo  $x, x' \in B(x_0, \varepsilon)$ . El teorema de Rademacher nos dice que una función localmente Lipschitz es diferenciable en casi todo punto. Si  $\Omega_f$  denota el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^N$  donde  $f$  no es diferenciable y  $S$  es cualquier conjunto de medida nula, el *gradiente generalizado* de  $f$  es  $\partial f(x) = \text{co} \{ \lim_{i \rightarrow +\infty} df(x_i) \mid x_i \rightarrow x, x_i \notin S \cup \Omega_f \}$ . Un punto  $x \in \mathbb{R}^N$  con  $0 \in \partial f(x)$  es un *punto crítico* de  $f$ . Dada una función localmente Lipschitz  $f$ , definimos el *flujo gradiente generalizado*  $\text{Ln}(\partial f) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  como el campo vectorial dado por  $x \mapsto \text{Ln}(\partial f)(x) = \text{Ln}(\partial f(x))$ , donde  $\text{Ln}(S)$  denota el elemento de menor norma en el conjunto convexo  $S$ . En general, se tiene que

- (i) Si  $f$  alcanza un mínimo o máximo local en  $x$ , entonces  $0 \in \partial f(x)$ ;
- (ii) Si  $0 \notin \partial f(x)$ , entonces existe  $T > 0$  tal que para todo  $0 < t < T$ ,  $f(x - t \text{Ln}(\partial f)(x)) \leq f(x) - \frac{t}{2} \|\text{Ln}(\partial f)(x)\|^2$ .



Por tanto, todavía podemos hablar de un flujo gradiente *generalizado*, es decir, de una dirección en cada punto de  $Q$  que nos lleva al conjunto de punto críticos. Sin embargo, este campo vectorial no es continuo en general, lo cual implica que tendremos que entender sus curvas integrales como soluciones de Filippov [21] (ver Viñeta 4). El siguiente resultado recoge los resultado acerca de las propiedades de diferenciabilidad y el flujo gradiente de este función (en el enunciado,  $\text{int } S$  denota el interior de  $S$ , y  $\text{versus}(w)$  denota el vector unitario en la dirección de  $w$ ).

#### Viñeta 4 (Soluciones de Filippov)

Para ecuaciones diferenciales con campos vectoriales discontinuos, las soluciones se definen en términos de inclusiones diferenciales [21]. Sea  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow 2^{\mathbb{R}^N}$  una aplicación con valores en subconjuntos de  $\mathbb{R}^N$ . Una *solución de la inclusión diferencial*  $\dot{x} \in F(x)$  en un intervalo  $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$  es una función absolutamente continua  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$  con  $\dot{x}(t) \in F(x(t))$  para casi todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Si  $F$  es semi-continua superiormente con valores convexos, no vacíos y compactos, entonces para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  existe al menos una solución de la inclusión diferencial con condición inicial  $x_0$ . Consideremos la ecuación  $\dot{x}(t) = X(x(t))$ , donde  $X : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es medible y esencialmente localmente acotado. Definamos la aplicación  $K[X] : \mathbb{R}^N \rightarrow 2^{\mathbb{R}^N}$ ,

$$K[X](x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(S)=0} \text{co}\{X(B_N(x, \delta) \setminus S)\},$$

donde  $\mu$  denota la medida de Lebesgue. Una *solución de Filippov* de  $\dot{x}(t) = X(x(t))$  en un intervalo  $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$  es una solución de la inclusión diferencial  $\dot{x} \in K[X](x)$ . Un conjunto  $M$  se dice *invariante débilmente* (resp. *invariante fuertemente*) para  $\dot{x}(t) = X(x(t))$  si para cada  $x_0 \in M$ , contiene una solución maximal (resp. todas las soluciones maximales).

**Proposición 3.1** ([11]) *En el escenario del peor caso, con una red compuesta de un solo agente, se tiene que*

- (i) *La función  $\mathcal{H}_{DC} = \text{lg}_Q$  es localmente Lipschitz y regular, y su gradiente generalizado es  $\partial \text{lg}_Q(p) = \text{co}\{\text{versus}(p - v) \mid v \in \text{Ve}(Q), \text{lg}_Q(p) = \|p - v\|\}$ . El único punto crítico de  $\mathcal{H}_{DC}$  es el circuncentro de  $Q$ , i.e,  $0 \in \partial \text{lg}_Q(p)$  si y sólo si  $p = \text{CC}(Q)$ ;*
- (ii) *El flujo gradiente de  $\mathcal{H}_{DC}$ , dado por  $\dot{p}(t) = -\text{Ln}(\partial \text{lg}_Q)(p(t))$ , converge asintóticamente a  $\text{CC}(Q)$ . Si además  $0 \in \text{int } \partial \text{lg}_Q(\text{CC}(Q))$ , entonces el circuncentro se alcanza en tiempo finito.*

En el escenario de no-interferencia,  $\mathcal{H}_{SP}(p)$  corresponde a la distancia mínima desde  $p$  a la frontera de  $Q$ ,

$$\mathcal{H}_{SP}(p) = \text{sm}_Q(p) = \text{mín} \{\|q - p\| \mid q \notin \text{int } Q\} = \text{mín} \{\text{Dist}_e(p) \mid e \in \text{Ed}(Q)\}.$$

Como en el caso de  $\mathcal{H}_{DC}$ , esta función no es diferenciable, sino localmente Lipschitz.

**Proposición 3.2** ([11]) *En el escenario de no-interferencia, con una red compuesta de un solo agente, se tiene que*

- (i) *La función  $\mathcal{H}_{SP} = \text{sm}_Q$  es localmente Lipschitz y regular, y su gradiente generalizado es  $\partial \text{sm}_Q(p) = \text{co}\{n_e \mid e \in \text{Ed}(Q), \text{sm}_Q(p) = \text{Dist}_e(p)\}$ , donde  $n_e$  denota el vector normal a  $e$  apuntando hacia  $\text{int}(Q)$ . Los únicos puntos críticos de  $\mathcal{H}_{SP}$  pertenecen al incentro de  $Q$ , i.e,  $0 \in \partial \text{sm}_Q(p)$  si y sólo si  $p \in \text{IC}(Q)$ . Además, si  $0 \in \text{int } \partial \text{sm}_Q(p)$ , entonces  $\text{IC}(Q) = \{p\}$ .*
- (ii) *El flujo gradiente de  $\mathcal{H}_{SP}$ , dado por  $\dot{p}(t) = \text{Ln}(\partial \text{sm}_Q)(p(t))$ , converge asintóticamente a  $\text{IC}(Q)$  en tiempo finito.*

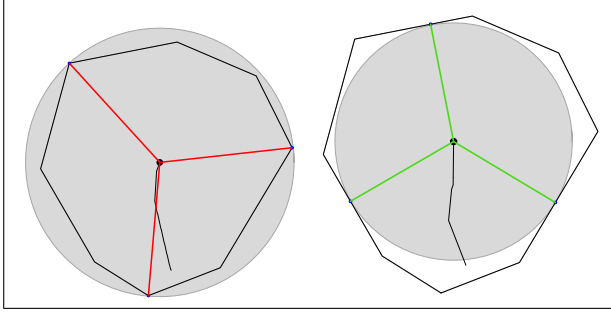


Figura 4: Flujo gradiente de  $\lg_Q$  (izquierda) y  $\text{sm}_Q$  (derecha). Los puntos donde la curva  $t \mapsto p(t)$  deja de ser diferenciable corresponden a los puntos donde existe un nuevo vértice  $v$  de  $Q$  tal que  $\|p(t) - v\| = \lg_Q(p(t))$  (respectivamente, un nuevo lado  $e$  de  $Q$  tal que  $\text{Dist}_e(p(t)) = \text{sm}_Q(p(t))$ ). De acuerdo a las Proposiciones 3.1 y 3.2, la convergencia se alcanza en tiempo finito.

## Análisis de las medidas de rendimiento: el problema general

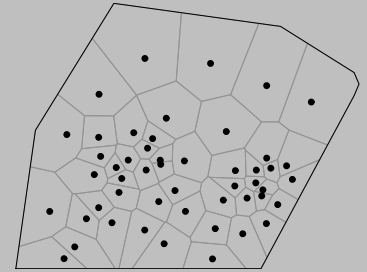
En esta sección, proseguimos con nuestro análisis de las funciones  $\mathcal{H}_C$ ,  $\mathcal{H}_{DC}$  y  $\mathcal{H}_{SP}$ , considerando los diferentes escenarios en toda su generalidad. El concepto de partición de Voronoi (ver Viñeta 5) y la comprensión que hemos desarrollado acerca del problema en el caso de una red compuesta por un solo agente nos van a resultar ahora muy útiles. En el escenario del valor esperado, la función  $\mathcal{H}_C$  admite la expresión alternativa

$$\mathcal{H}_C(P) = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \|q - p_i\|^2 \phi(q) dq,$$

es decir,  $\mathcal{H}_C(P)$  corresponde a la suma de los momentos polares de inercia de cada región de Voronoi sobre su generador correspondiente. Esta expresión muestra que el agente  $i$ -ésimo, situado en  $p_i$ , es el responsable de lo que ocurre en su región de Voronoi. El valor de  $\mathcal{H}_C$  es el resultado de la *agregación* del rendimiento de cada agente de la red. De hecho, se puede probar que la partición de  $Q$  dada por  $\mathcal{V}(P)$  es óptima entre todas las posibles particiones de  $Q$  en  $n$  subconjuntos con interiores disjuntos (ver [14, 20]).

### Viñeta 5 (Partición de Voronoi)

La *partición de Voronoi* (cf. [16, 35])  $\mathcal{V}(P) = (V_1(P), \dots, V_n(P))$  de un polígono convexo  $Q$  generada por los puntos  $P = (p_1, \dots, p_n) \in Q^n$  está definida como  $V_i(P) = \{q \in Q \mid \|q - p_i\| \leq \|q - p_j\|, \forall j \neq i\}$ . Dado que  $Q$  es convexo, la frontera de cada  $V_i$  es la unión de un número finito de segmentos. Si  $V_i$  y  $V_j$  comparten un lado, entonces  $p_i$  es un *vecino (de Voronoi)* de  $p_j$  (y viceversa). Un vértice  $v \in \text{Ve}(V_i(P))$  se dice *no degenerado* si está determinado por exactamente tres elementos (tres puntos, o dos generadores y un lado de  $Q$ , o un generador y dos lados de  $Q$ ). En caso contrario, diremos que es *degenerado*. La configuración  $P$  es *no degenerada* si todos los vértices de  $\mathcal{V}(P)$  son no degenerados. En caso contrario, es *degenerada*.



Respecto a las propiedades de diferenciabilidad de  $\mathcal{H}_C$ , dado que la aplicación  $(q, P) \mapsto \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \|q - p_i\|$  es localmente Lipschitz en  $P$ , se tiene que  $\mathcal{H}_C$  es localmente Lipschitz con constante de Lipschitz  $M(Q)$ . Además, si definimos  $S = \{P \in Q^n \mid \text{existe } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ t.q. } p_i = p_j\}$ , entonces sobre  $Q^n \setminus S$  se puede ver [20, 35],

$$\frac{\partial \mathcal{H}_C}{\partial p_i}(P) = \int_{V_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \|q - p_i\|^2 \phi(q) dq = 2 M(V_i)(p_i - \text{CM}(V_i)), \quad (11)$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , donde  $P \mapsto M(V_i(P))$  y  $P \mapsto \text{CM}(V_i(P))$  son funciones continuas de  $P$ . Por tanto, la función  $\mathcal{H}_C$  es continuamente diferenciable sobre  $Q^n \setminus S$ .

Por otro lado, las funciones  $\mathcal{H}_{DC}$  y  $\mathcal{H}_{SP}$  admiten las expresiones alternativas

$$\mathcal{H}_{DC}(P) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \max_{q \in V_i} \|q - p_i\| \right\} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \lg_{V_i(P)}(p_i),$$

$$\mathcal{H}_{SP}(P) = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \min_{q \notin \text{int } V_i} \|q - p_i\| \right\} = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{sm}_{V_i(P)}(p_i).$$

Estas expresiones muestran que también las funciones  $\mathcal{H}_{DC}$  y  $\mathcal{H}_{SP}$  tienen un carácter agregado, con la partición de Voronoi jugando el papel de árbitro entre los diferentes agentes de la red. De hecho, el valor de las funciones en cada escenario es bien el máximo o el mínimo de los “costes” locales de cada uno de los agentes.

Respecto a las propiedades de diferenciabilidad, de las Proposiciones 3.1 y 3.2 sabemos que, si hacemos la abstracción de que la partición de Voronoi está fija, entonces cada uno de los costes locales es una función localmente Lipschitz. En este caso, denotaremos su gradientes generalizados como  $\partial \lg_V(p_i)|_{V=V_i(P)}$  y  $\partial \text{sm}_V(p_i)|_{V=V_i(P)}$ , respectivamente. Sin embargo, en principio nada sabemos de lo que ocurre cuando consideramos la dependencia efectiva de la partición de Voronoi  $\mathcal{V}$  de las posiciones de los agentes,  $\{p_1, \dots, p_n\}$ . Un análisis detallado y bastante complejo [11] de las funciones  $P \mapsto \lg_{V_i(P)}(p_i)$  y  $P \mapsto \text{sm}_{V_i(P)}(p_i)$  revela que, incluso cuando tenemos en cuenta la dependencia de  $\mathcal{V}(P)$  en  $P$ , las funciones son localmente Lipschitz y regulares. Sus gradientes generalizados pueden expresarse en términos muy precisos (analizando cuidadosamente el carácter degenerado o no degenerado de la partición de Voronoi), que no presentamos aquí por brevedad. Este resultado es fundamental para poder determinar las propiedades de las funciones agregadas  $\mathcal{H}_{DC}$  y  $\mathcal{H}_{SP}$ , que recogemos a continuación.

**Proposición 3.3 ([11])** *Las funciones  $\mathcal{H}_{DC}, \mathcal{H}_{SP} : Q^n \rightarrow \mathbb{R}$  son localmente Lipschitz y regulares, y sus gradientes generalizados en  $P \in Q^n$  están dados por*

$$\partial \mathcal{H}_{DC}(P) = \text{co}\{\partial \lg_{V_i(P)}(p_i) \mid i \text{ tal que } \lg_{V_i(P)}(p_i) = \mathcal{H}_{DC}(P)\},$$

$$\partial \mathcal{H}_{SP}(P) = \text{co}\{\partial \text{sm}_{V_i(P)}(p_i) \mid i \text{ tal que } \text{sm}_{V_i(P)}(p_i) = \mathcal{H}_{SP}(P)\}.$$

#### Viñeta 6 (Configuraciones de Voronoi especiales)

El *centroide* de un polígono  $W \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\text{CM}(W)$ , con respecto a una función densidad  $\phi$ , es el centro de masas de  $W$ ,

$$\text{CM}(W) = \frac{1}{\text{M}(W)} \int_W q \phi(q) dq, \quad \text{M}(W) = \int_W \phi(q) dq.$$

El *circumcentro* de un  $W$ ,  $\text{CC}(W)$ , es el centro de la esfera de menor radio que contiene a  $W$ . El *incentro* de  $W$ ,  $\text{IC}(W)$ , es el conjunto de centros de las esferas de mayor radio que están contenidas en  $W$ . Decimos que  $P \in Q^n$  es una

- *configuración de Voronoi centroidal* si satisface  $p_i = \text{CM}(V_i(P))$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
- *configuración de Voronoi circumcentro* si satisface  $p_i = \text{CC}(V_i(P))$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
- una *configuración de Voronoi incentro* si satisface  $p_i \in \text{IC}(V_i(P))$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , y una *configuración de Voronoi incentro genérica* si  $P$  es una configuración de Voronoi incentro y cada region de Voronoi tiene un único incentro.

Caracterizar la estructura y las propiedades de diferenciabilidad de las funciones en cada uno de los escenarios nos ha dado una comprensión más ajustada de los elementos importantes en cada unos de los problemas. Como veremos en la próxima sección, esto resultará clave a la hora de diseñar algoritmos para que la red realice tareas de cubrimiento de manera coordinada. En el aspecto analítico, estos resultados también nos permiten estudiar los puntos críticos de estas funciones, y establecer interesantes

conexiones con las conjeturas que mencionábamos anteriormente y con ciertas estructuras geométricas clásicas (ver Viñeta 6).

**Teorema 3.4 ([11, 14])** *Dado  $P \in Q^n$ , se tiene que,*

- (i) *si  $P$  es un punto crítico de  $\mathcal{H}_C$ , entonces  $P$  es una configuración de Voronoi centroidal;*
- (ii) *si  $P$  es no degenerada y  $0 \in \text{int } \partial\mathcal{H}_{DC}(P)$ , entonces  $P$  es un mínimo local estricto de  $\mathcal{H}_{DC}$ , es una configuración de Voronoi circumcentro, y todos los agentes tienen el mismo coste;*
- (iii) *si  $0 \in \text{int } \partial\mathcal{H}_{SP}(P)$ , entonces  $P$  es un máximo local de  $\mathcal{H}_{SP}$ , es una configuración de Voronoi incentro genérica y todos los agentes tienen el mismo coste.*

Es importante notar que los puntos (ii) y (iii) del Teorema 3.4, corresponden precisamente a la interpretación que señalábamos anteriormente: en ambos casos, optimizar la función agregada equivale a resolver un problema de optimización geométrica, bien sea el cubrimiento del entorno por discos del mismo radio, o el empaquetamiento de discos del mismo radio en el entorno.

### Diseño de algoritmos cooperativos

En esta sección, proponemos varias estrategias de coordinación para optimizar las funciones agregadas en cada uno de los escenarios. Nos preocupa, siguiendo los criterios que exponíamos en la Introducción, determinar si los algoritmos son adaptativos, distribuidos, convergentes e implementables de manera asíncrona. De acuerdo a lo que señalábamos al comienzo de la Sección 3, la dinámica de los agentes es un integrador de primer orden,  $\dot{p}_i(t) = u_i, i \in \{1, \dots, n\}$ .

A partir del análisis anterior de las propiedades de diferenciabilidad de  $\mathcal{H}_C, \mathcal{H}_{DC}$  y  $\mathcal{H}_{SP}$ , la primera estrategia que viene a la imaginación es implementar el flujo gradiente (generalizado). Consideremos pues las ecuaciones,

$$\dot{P} = -\text{Ln}(\partial\mathcal{H}_C)(P), \quad \dot{P} = -\text{Ln}(\partial\mathcal{H}_{DC})(P), \quad \dot{P} = \text{Ln}(\partial\mathcal{H}_{SP})(P).$$

Alternativamente, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , podemos escribir

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}_C}{\partial p_i}(p_1, \dots, p_n), \quad \dot{p}_i = -\pi_i(\text{Ln}(\partial\mathcal{H}_{DC})(p_1, \dots, p_n)), \quad \dot{p}_i = \pi_i(\text{Ln}(\partial\mathcal{H}_{SP})(p_1, \dots, p_n)),$$

donde  $\pi_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$  denota la proyección natural a la componente  $i$ -ésima. Se puede demostrar que el conjunto  $Q^n \setminus S$  es invariante para el primer flujo, y que, por tanto, este sistema dinámico corresponde a un flujo gradiente estándar. El segundo y tercer campo vectorial son discontinuos, y sus soluciones deben entenderse en el sentido de Filippov (ver Viñeta 4). El elemento de menor norma de un conjunto convexo puede calcularse eficientemente [3], pero no existen expresiones cerradas en general. También se puede ver que  $Q^n$  es fuertemente invariante para ambos campos vectoriales (cf. [11]). Usando del principio de invarianza de LaSalle [2, 23, 39], podemos concluir el siguiente resultado acerca de la convergencia de la estrategia gradiente.

**Proposición 3.5 ([5])** *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (i) *En el escenario del valor esperado, el algoritmo  $\dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}_C}{\partial p_i}(p_1, \dots, p_n) = 2M(V_i)(\text{CM}(V_i) - p_i), i \in \{1, \dots, n\}$ , garantiza la convergencia asintótica de la posición  $P$  de los agentes de la red al conjunto de puntos críticos de  $\mathcal{H}_C$ .*

- (ii) En el escenario del peor caso, el algoritmo  $\dot{p}_i = -\pi_i(\text{Ln}(\partial\mathcal{H}_{\text{DC}})(p_1, \dots, p_n))$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , garantiza la convergencia asintótica de la posición  $P$  de los agentes de la red al conjunto de puntos críticos de  $\mathcal{H}_{\text{DC}}$ .
- (iii) En el escenario de no-interferencia, el algoritmo  $\dot{p}_i = \pi_i(\text{Ln}(\partial\mathcal{H}_{\text{SP}})(p_1, \dots, p_n))$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , garantiza la convergencia asintótica de la posición  $P$  de los agentes de la red al conjunto de puntos críticos de  $\mathcal{H}_{\text{SP}}$ .

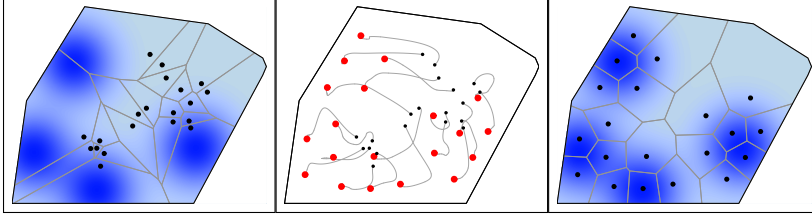
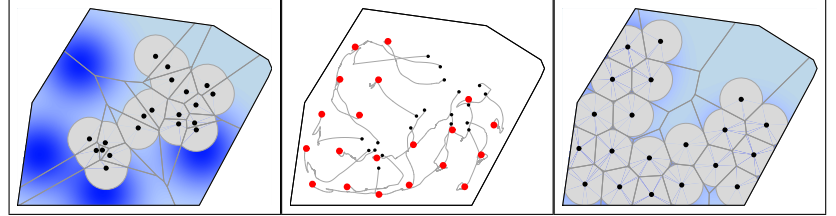


Figura 5: Escenario del valor esperado, algoritmo “vete hacia el centroide de tu región de Voronoi”, con 20 agentes en un entorno convexo. La función de densidad es una suma de cuatro Gausianas, representada por su dibujo de contorno. A la izquierda (resp., a la derecha), configuración inicial (resp., final) y su partición de Voronoi. En el centro, evolución de la red.

Figura 6: Escenario del valor esperado, red de 20 agentes con un radio de comunicación limitado en un entorno convexo. La función de densidad es la misma que en la Figura 5. Cada agente implementa el flujo gradiente de una función agregada que define una aproximación de factor constante a el valor de  $\mathcal{H}_C$  (ver [13]).



El sistema gradiente  $\dot{p}_i = 2M(V_i)(\text{CM}(V_i) - p_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  es distribuido en el sentido de Voronoi, porque cada agente sólo necesita saber cuál es la posición de sus vecinos de Voronoi para poder calcular su dirección de movimiento. Interpretado para cada agente, este algoritmo puede formularse como “vete hacia el centroide de tu región de Voronoi” (ver Figura 5). Este algoritmo se adapta también de manera natural a cambios en la función de densidad  $\phi$  o en el número de elementos de la red. En [14] hemos desarrollado dos implementaciones asíncronas de este algoritmo, en las cuales cada agente ejecuta el algoritmo a su propia velocidad. Bajo ciertas condiciones, el resultado (i) de la Proposición 3.5 sigue siendo válido. Por otro lado, los flujos gradiente para los escenarios del peor caso y de no-interferencia no son distribuidos, y esto por dos razones. Primera, porque todos los costes individuales tienen que ser comparados a lo largo y ancho de la red para determinar la identidad de los agentes que dan, según el escenario, el valor de  $\mathcal{H}_{\text{DC}}(P)$  o de  $\mathcal{H}_{\text{SP}}(P)$ . Segunda, porque una vez que estas identidades son conocidas, es necesario intercambiar también las posiciones correspondientes, dado que están afectadas al cálculo del gradiente generalizado. El lector interesado puede encontrar más detalles en [11].

Visto el carácter no distribuido de los algoritmos gradientes para los escenarios del peor caso y de no-interferencia, exploremos otras implementaciones para estos problemas que sí resulten en estrategias distribuidas. Consideremos las siguientes ecuaciones para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\dot{p}_i = -\text{Ln}(\partial \text{lg}_V(p_i)|_{V=V_i(P)})(P), \quad \dot{p}_i = \text{Ln}(\partial \text{sm}_V(p_i)|_{V=V_i(P)})(P), \quad (12)$$

donde calculamos el gradiente generalizado considerando fija cada región de Voronoi. Nótese que estos algoritmos sí son distribuidos en el sentido de Voronoi: cada agente calcula primero su región correspondiente, y después el elemento de menor norma dentro del gradiente generalizado de su función local, como si su región estuviera fija. Como en el caso anterior, ambos campos vectoriales son discontinuos, y

sus soluciones han de entenderse en el sentido de Filippov (ver Viñeta 4). De nuevo, se puede ver que  $Q^n$  es fuertemente invariante para ambos campos vectoriales y que, de hecho, existe una única solución empezando de cualquier configuración inicial. Además, si la red está formada por un solo agente, estos algoritmos coinciden con el flujo gradiente.

**Proposición 3.6 ([5, 11])** *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (i) *En el escenario del peor caso, el algoritmo  $\dot{p}_i = -\text{Ln}(\partial \text{lg}_V(p_i)|_{V=V_i(P)})(P)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  garantiza la convergencia asintótica de la posición  $P$  de los agentes de la red al conjunto débilmente invariante más grande contenido en la clausura de  $A_{DC}(Q) = \{P \in Q^n \mid \text{lg}_{V_i(P)}(p_i) = \mathcal{H}_{DC}(P) \Rightarrow p_i \in \text{CC}(V_i(P))\}$ .*
- (ii) *En el escenario de no-interferencia, el algoritmo  $\dot{p}_i = \text{Ln}(\partial \text{sm}_V(p_i)|_{V=V_i(P)})(P)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  garantiza la convergencia asintótica de la posición  $P$  de los agentes de la red al conjunto débilmente invariante más grande contenido en la clausura de  $A_{SP}(Q) = \{P \in Q^n \mid \text{sm}_{V_i(P)}(p_i) = \mathcal{H}_{SP}(P) \Rightarrow p_i \in \text{IC}(V_i(P))\}$ .*

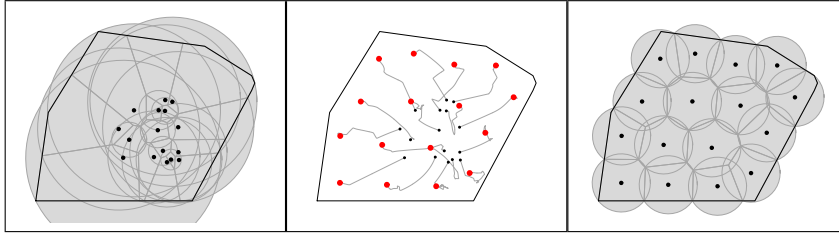


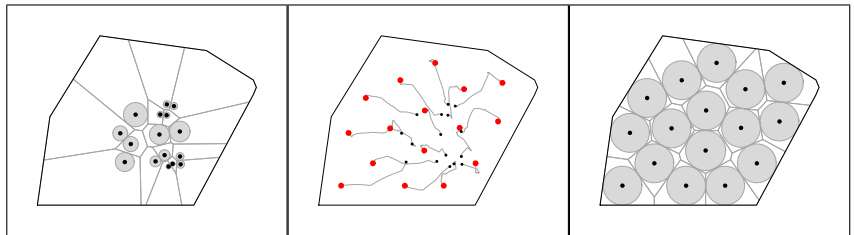
Figura 7: Escenario del peor caso, algoritmo “vete hacia el punto más lejano de tu región de Voronoi”, con 16 agentes en un entorno convexo. A la izquierda (resp., a la derecha), configuración inicial (resp., final) y su partición de Voronoi. En el centro, evolución de la red.

**Viñeta 7 (Relación con la robótica basada en el comportamiento)**

Los algoritmos de la ecuación (12) tienen una interesante interpretación en términos del “comportamiento” de cada agente. Para el agente  $i$ -ésimo, en el caso del algoritmo  $\dot{p}_i = -\text{Ln}(\partial \text{lg}_V(p_i)|_{V=V_i(P)})(P)$ , si el valor  $\text{lg}_{V_i(P)}$  es alcanzado en un solo vértice  $v$  de su región de Voronoi  $V_i$ , entonces  $\text{lg}_{V_i(P)}$  es diferenciable en esa configuración, y su gradiente es el vector unitario en la dirección  $p_i - v$ . Por tanto, el algoritmo corresponde al comportamiento “vete hacia el punto más lejano de tu región de Voronoi”. Si hay más de un vértice de  $V_i$  donde se alcanza el valor  $\text{lg}_{V_i(P)}(p_i)$ , entonces el algoritmo especifica un comportamiento en media mediante el cálculo del elemento de menor norma en la clausura convexa de los vectores unitarios en todas las direcciones  $p_i - v$  tales que  $\|p_i - v\| = \text{lg}_{V_i(P)}(p_i)$ .

En el caso del algoritmo  $\dot{p}_i = \text{Ln}(\partial \text{sm}_V(p_i)|_{V=V_i(P)})(P)$ , si el valor  $\text{sm}_{V_i(P)}$  es alcanzado en un solo lado  $e$  de  $V_i$ , entonces  $\text{sm}_{V_i(P)}$  es diferenciable en esa configuración, y su gradiente es el vector unitario en la dirección normal a  $e$ . Por tanto, el algoritmo corresponde al comportamiento “aléjate de tu vecino más cercano”. Si hay más de un lado de  $V_i$  donde se alcanza el valor  $\text{sm}_{V_i(P)}(p_i)$ , entonces el algoritmo especifica un comportamiento en media de una manera similar al caso anterior.

Figura 8: Escenario de no-interferencia, algoritmo “aléjate de tu vecino más cercano”, con 16 agentes en un entorno convexo. A la izquierda (resp., a la derecha), configuración inicial (resp., final) y su partición de Voronoi. En el centro, evolución de la red.



Todavía podemos diseñar dos nuevos algoritmos más para optimizar las funciones  $\mathcal{H}_{DC}$  y  $\mathcal{H}_{SP}$ . La idea en este caso se basa en el resultado que obtuvimos en el caso de que la red consistiera de un solo agente: dado que entonces la convergencia es bien al circuncentro o al incentro del entorno, ¿por qué no implementar esta idea en el caso de una red formada por varios agentes? Además, esto parece ser lo

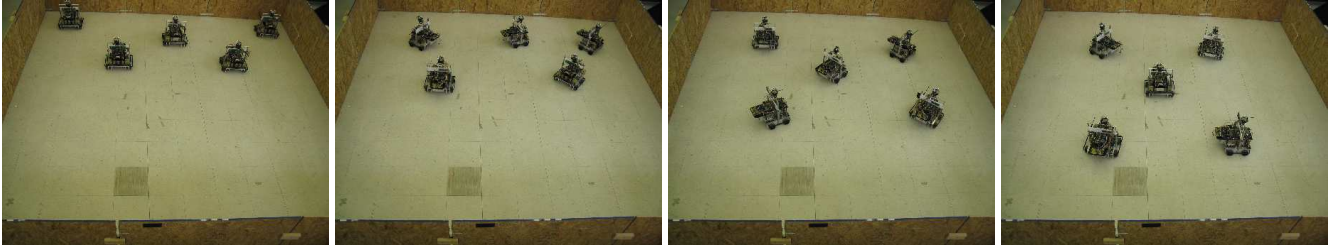


Figura 9: De izquierda a derecha, ejecución típica del algoritmo “*aléjate de tu vecino más cercano*” en una red de 5 robots móviles con sonar (cf. Viñeta 2) tomada de [38]. En la configuración final, tal y como asegura la Proposición 3.6, los robots con menor coste (en este caso todos) acaban situados en el incentro de su región de Voronoi.

más indicado para optimizar las funciones agregadas, dados los resultados (ii) y (iii) del Teorema 3.4. Consideremos pues para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\dot{p}_i = CC(V_i) - p_i, \quad \dot{p}_i \in IC(V_i) - p_i. \quad (13)$$

Ambos algoritmos son distribuidos en el sentido de Voronoi. El algoritmo basado en el circuncentro es continuo. Sin embargo, el algoritmo basado en el incentro es una inclusión diferencial, dado que el incentro de un polígono es en general un conjunto (pensar por ejemplo en el caso de un rectángulo). De todas formas, usando los resultados de [21] y con un análisis cuidadoso [11], se puede garantizar la existencia de soluciones bien definidas. Para ambos algoritmos, se puede establecer que  $Q^n$  es fuertemente invariante y caracterizar sus propiedades de convergencia asintótica, que son análogas a las enunciadas en la Proposición 3.6 para los algoritmos de la ecuación (12).

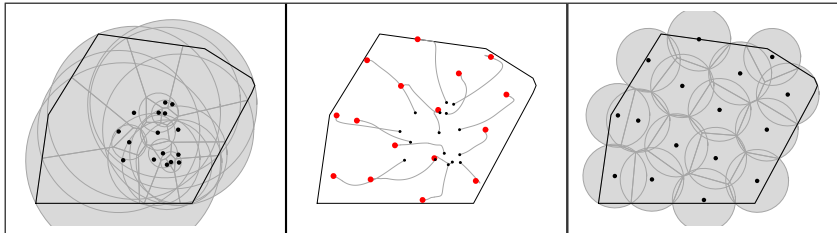
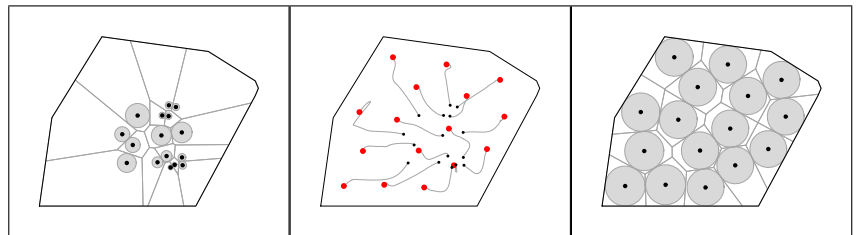


Figura 10: Escenario del peor caso, algoritmo “*vete hacia el circuncentro de tu región de Voronoi*”, con 16 agentes en un entorno convexo. A la izquierda (resp., a la derecha), configuración inicial (resp., final) y su partición de Voronoi. En el centro, evolución de la red.

Figura 11: Escenario de no-interferencia, algoritmo “*vete hacia el incentro de tu región de Voronoi*”, con 16 agentes en un entorno convexo. A la izquierda (resp., a la derecha), configuración inicial (resp., final) y su partición de Voronoi. En el centro, evolución de la red.



## 4. Conclusiones

A lo largo de esta memoria, hemos estudiado dos problemas fundamentales en el control de sistemas autónomos: la planificación de trayectorias y la coordinación de movimientos. Esperamos haber tenido éxito en nuestro intento de ilustrar cómo una precisa formulación matemática del problema de interés

ayuda en la comprensión del mismo, y es pieza clave para poder abordar después las etapas de análisis y diseño. Hemos hecho énfasis en el análisis de la estructura global de los problemas como medio para entender las propiedades que explican su funcionamiento y eventualmente, su solución. Finalmente, en la etapa del diseño, nos hemos valido del conocimiento y los resultados obtenidos para desarrollar algoritmos que resolvieran el problema planteado.

Quedan abiertas numerosas líneas de investigación por explorar, tanto en la planificación de trayectorias de sistemas autónomos como en la coordinación de redes móviles. Extender el ámbito de validez de los resultados expuestos es ciertamente un problema importante. Otros problemas que no hemos abordado aquí incluyen el estudio del efecto de incertidumbre en los modelos, el análisis de la complejidad de los algoritmos, y de su robustez ante perturbaciones externas, y la incorporación de nuevas ligaduras en el funcionamiento de los sistemas autónomos, como por ejemplo, limitaciones en el gasto energético o en el radio de comunicación. Nuestra intención en el futuro es seguir explorando estas cuestiones, intentando entender mejor su estructura interna y sus propiedades matemáticas para abordar después el análisis y el diseño de leyes de control que den soluciones satisfactorias.

## Referencias

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, New York, 2 edition, 1988.
- [2] A. Bacciotti and F. Ceragioli. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions. *ESAIM. Control, Optimisation & Calculus of Variations*, 4:361–376, 1999.
- [3] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [4] F. Bullo. Averaging and vibrational control of mechanical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(2):542–562, 2002.
- [5] F. Bullo and J. Cortés. Adaptive and distributed coordination algorithms for mobile sensing networks. In V. Kumar, N. E. Leonard, and A. S. Morse, editors, *Cooperative Control. (Proceedings of the 2003 Block Island Workshop on Cooperative Control)*, volume 309 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 43–62. Springer Verlag, New York, 2005.
- [6] F. Bullo, N. E. Leonard, and A. D. Lewis. Controllability and motion algorithms for underactuated Lagrangian systems on Lie groups. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1437–1454, 2000.
- [7] F. Bullo and A. D. Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems*, volume 49 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, New York, 2004.
- [8] M. Camariña, F. Silva Leite, and P. E. Crouch. Splines of class  $C^k$  on non-Euclidean spaces. *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, 12:399–410, 1995.
- [9] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley, 1983.
- [10] J. Cortés. *Geometric, control and numerical aspects of nonholonomic systems*, volume 1793 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [11] J. Cortés and F. Bullo. Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(5):1543–1574, 2005.
- [12] J. Cortés, S. Martínez, and F. Bullo. On nonlinear controllability and series expansions for Lagrangian systems with dissipative forces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8):1396–1401, 2002.
- [13] J. Cortés, S. Martínez, and F. Bullo. Spatially-distributed coverage optimization and control with limited-range interactions. *ESAIM. Control, Optimisation & Calculus of Variations*, 11:691–719, 2005.
- [14] J. Cortés, S. Martínez, T. Karatas, and F. Bullo. Coverage control for mobile sensing networks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(2):243–255, 2004.
- [15] J. Cortés, S. Martínez, J. P. Ostrowski, and H. Zhang. Simple mechanical control systems with constraints and symmetry. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(3):851–874, 2002.



- [16] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer Verlag, New York, 2 edition, 2000.
- [17] M. de León and P.R. Rodrigues. *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*. Mathematics Studies. North-Holland, 1989.
- [18] M. P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Verlag, Boston, MA, 1992.
- [19] Z. Drezner, editor. *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*. Springer Series in Operations Research. Springer Verlag, New York, 1995.
- [20] Q. Du, V. Faber, and M. Gunzburger. Centroidal Voronoi tessellations: Applications and algorithms. *SIAM Review*, 41(4):637–676, 1999.
- [21] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, volume 18 of *Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [22] D. Hsu, R. Kindel, J.-C. Latombe, and S. Rock. Randomized kinodynamic motion planning. In *Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics*, pages 247–264, Dartmouth, NH, March 2000.
- [23] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2 edition, 1995.
- [24] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry. Vol. I*, volume 15 of *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*. Interscience Publishers, New York, NY, 1963.
- [25] S. M. LaValle and J. J. Kuffner. Rapidly-exploring random trees: Progress and prospects. In *Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics*, pages 293–308, Dartmouth, NH, March 2000.
- [26] A. D. Lewis. Affine connections and distributions with applications to nonholonomic mechanics. *Reports on Mathematical Physics*, 42(1/2):135–164, 1998.
- [27] A. D. Lewis. The geometry of the maximum principle for affine connection control systems. Preprint, 2000.
- [28] A. D. Lewis. Simple mechanical control systems with constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1420–1436, 2000.
- [29] A. D. Lewis and R. M. Murray. Configuration controllability of simple mechanical control systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(3):766–790, 1997.
- [30] P. Libermann and C.-M. Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Mathematics and its Applications. Reidel Publishing Company, Boston, MA, 1987.
- [31] S. Martínez. Geometric control of mechanical systems. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, November 2004. To appear.
- [32] S. Martínez and J. Cortés. Motion control algorithms for simple mechanical systems with symmetry. *Acta Applicandae Mathematicae*, 76(3):221–264, 2003.
- [33] S. Martínez, J. Cortés, and F. Bullo. Analysis and design of oscillatory control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(7):1164–1177, 2003.
- [34] M. C. Muñoz-Lecanda and F.J. Yáñez. Dissipative control of mechanical systems: a geometric approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(5):1505–1516, 2002.
- [35] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S.Ñ. Chiu. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley, New York, 2 edition, 2000.
- [36] J. P. Ostrowski. Steering for a class of dynamic nonholonomic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1492–1497, 2000.
- [37] M. Rathinam and R. M. Murray. Configuration flatness of Lagrangian systems underactuated by one control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 36(1):164–179, 1998.
- [38] C. L. Robinson, D. Block, S. Brennan, F. Bullo, and J. Cortés. Nonsmooth analysis and sonar-based implementation of distributed coordination algorithms. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 3000–3005, New Orleans, LA, April 2004.
- [39] D. Shevitz and B. Paden. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(9):1910–1914, 1994.
- [40] A. Suzuki and Z. Drezner. The  $p$ -center location problem in an area. *Location Science*, 4(1/2):69–82, 1996.
- [41] J. L. Synge. Geodesics in nonholonomic geometry. *Mathematische Annalen*, 99:738–751, 1928.
- [42] K. Yano and S. Ishihara. *Tangent and cotangent bundles*. Marcel Dekker, New York, 1973.