

Formación de singularidades y problemas de frontera libre en mecánica de fluidos

M.A. FONTELOS

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

mafontel@escet.urjc.es

Resumen

En este artículo exponemos algunos de los resultados más relevantes obtenidos por el autor en torno a problemas que involucran la evolución de los fluidos y de las superficies que los separan del medio externo o de otro fluido. El interés esencial es el de entender los diversos tipos de singularidad que pueden aparecer debido al contacto con superficies sólidas, al cambio de topología del dominio ocupado por el fluido o a la formación de frentes u otro tipo de estructuras en el seno del mismo.

Palabras clave: *Ecuaciones en derivadas parciales, Problemas de frontera libre, Mecánica de fluidos, Singularidades.*

Clasificación por materias AMS: *35Q30, 35R35, 74H35, 35Q35*

1 Introducción

Entendemos como singularidad, en el contexto de la mecánica de fluidos, la existencia o aparición espontánea de valores no acotados (en algún punto del espacio) para las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales que modelan la mecánica de fluidos.

Así formulado, el tema de investigación es vastísimo. Esto se debe principalmente al hecho de que, tradicionalmente, los problemas de mecánica de fluidos han sido uno de los centros de atención fundamentales en la comunidad de la matemática aplicada. No es de extrañar, ya que la no linealidad inherente a las ecuaciones de Navier-Stokes —las que modelan los fluidos Newtonianos incompresibles— y todas las relacionadas supone el obstáculo teórico fundamental en su tratamiento y análisis por parte de físicos e ingenieros. Es imposible exagerar la importancia que el tratamiento matemático ha tenido en el avance de la comprensión del comportamiento de los fluidos y sus consecuentes aplicaciones. Citemos como ejemplo claro la importancia que la

Fecha de recepción: 09/11/04

teoría de capa límite desarrollada por von Karman y Prandtl ha tenido en la comprensión del vuelo y la repercusión práctica que ello tiene en la aeronáutica. Tampoco es posible exagerar la importancia de los problemas que aún quedan abiertos. Recordemos, por ejemplo, el célebre problema de Leray (ver [41]) sobre la existencia de soluciones que desarrollen singularidades espontáneas para el sistema de Navier-Stokes, que lleva abierto 70 años y ha atraído la atención de muchos de los matemáticos más importantes del siglo XX.

La no linealidad de la que hemos hablado en el párrafo anterior puede, en principio, dar lugar a soluciones singulares (en el sentido definido al principio). El problema matemático es pues claro: determinar si existen o no soluciones singulares en el contexto de la mecánica de fluidos y, en caso afirmativo, hallar la estructura de las mismas. Las singularidades pueden ser de naturaleza diversa, pero nosotros, para fijar ideas, nos centraremos en tres tipos:

- 1.- Singularidades que aparecen y persisten en la interfase de separación del fluido con otro u otros medios (sólido o gaseoso).
- 2.- Singularidades espontáneas por cambio de topología de la región ocupada por el fluido.
- 3.- Singularidades espontáneas en el seno del fluido.

La experiencia del autor se centra en los dos primeros tipos de singularidades. El tercero, consiste esencialmente en el problema de Leray citado arriba, y hasta el momento solamente los hemos abordado en el contexto de modelos uni y bidimensionales análogos a los sistemas de Euler y Navier-Stokes (en un sentido que precisaremos más abajo) .

2 Singularidades en interfases y el problema de la línea de contacto

En esta sección comenzaremos con una formulación matemática general del problema. Basándonos en ella comentaremos algunos de los problemas interesantes planteados y su aparición en el contexto de las aplicaciones tanto industriales como puramente científicas.

La formulación sería la siguiente: una masa fluida ocupa una región del espacio bi- o tri-dimensional que puede ser acotada o no acotada. La frontera del dominio (que asumimos en principio simplemente conexo) ocupado por el fluido está compuesta por líneas o superficies de contacto con un sólido y por líneas o superficies de contacto con otro fluido o con el vacío (nosotros nos centraremos en este último caso). Las líneas o superficies de contacto con el sólido pueden ser fijas o móviles y pueden ser suaves o tener esquinas. Las líneas o superficies de contacto con otro fluido o el vacío son, en principio, móviles. Finalmente, los fluidos que consideramos pueden ser líquidos Newtonianos o viscoelásticos.

Como hablaremos a menudo de fluidos viscoelásticos, recordemos en este punto lo que eso significa. Los fluidos viscoelásticos son aquellos que combinan aspectos genuinos de los fluidos, como la existencia de esfuerzos viscosos, con efectos propios de los sólidos elásticos como la aparición de fuerzas de recuperación en respuesta a esfuerzos ejercidos sobre el fluido. Los fluidos

viscoelásticos entran dentro de la familia de fluidos no-Newtonianos y se pueden generar en el laboratorio mediante adición de polímeros en forma de disolución en el seno de un fluido newtoniano como el agua.

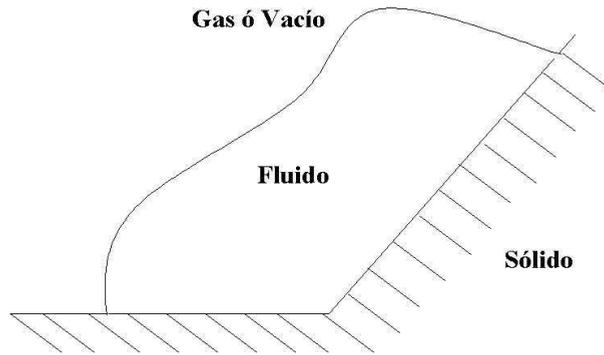


Figura 1: Esquema básico general de los problemas de interfases fluidas.

Como es usual en mecánica de fluidos, el estado dinámico se describe mediante el campo vectorial de velocidades $\vec{v}(\mathbf{r}, t)$ y el campo escalar de presiones $p(\mathbf{r}, t)$. Las ecuaciones satisfechas por estos campos son

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

siendo ρ la densidad del fluido y \mathbf{T} el tensor de esfuerzos. Este tensor de esfuerzos se relaciona con \vec{v} y p mediante una relación constitutiva. En el caso de fluidos Newtonianos dicha relación constitutiva tiene componentes

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

siendo μ la viscosidad del fluido. Si el fluido es No-Newtoniano la situación es más complicada por el hecho de que, a fecha de hoy, no hay relación constitutiva capaz de explicar toda la fenomenología asociada a este tipo de fluidos. De hecho, una de las motivaciones científicas que orientan nuestra investigación con estos tipos de fluidos es la de usar leyes constitutivas con una razonable sustentación

teórica para explicar y predecir hechos experimentales que las validen (siquiera parcialmente). Sin ánimo de entrar en una disquisición teórica sobre cuáles leyes constitutivas son buenas y cuáles no, diremos que el acuerdo casi mayoritario entre la comunidad reológica se inclina hacia las leyes constitutivas de tipo Oldroyd-B para disoluciones poliméricas diluídas, que constituyen una familia amplia dentro de los fluidos No-Newtonianos de uso más común en aplicaciones (ver [39] y [6]). Esta relación es, en los casos más habituales, de la forma

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_s \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + S_{ij}, \quad (4)$$

donde μ_s es la viscosidad del fluido Newtoniano en cuyo seno se hallan disueltas moléculas de polímero que hacen al fluido No-Newtoniano. S_{ij} es por tanto la componente ij del tensor \mathbf{S} que supone la contribución genuinamente No-Newtoniana, y satisface

$$\mathbf{S} + \lambda (\mathbf{S}_{(1)} + \{\mathbf{D}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{D}\}) = 2\mu_p \mathbf{D}. \quad (5)$$

con λ el tiempo de relajación del polímero, μ_p la contribución del polímero a la viscosidad total de la disolución en el límite de deformaciones nulas,

$$D_{ij} = 2\mu_s \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

y $\mathbf{S}_{(1)}$ definido como

$$\mathbf{S}_{(1)} \equiv \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \mathbf{S} - (\nabla \vec{v})^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \nabla \vec{v},$$

La inserción de (3) en (1) da lugar a un sistema de ecuaciones parabólicas no lineales para las componentes de la velocidad, mientras que (5) es una ecuación hiperbólica para \mathbf{S} y hay que tratarla en pie de igualdad con (1); es decir, formando un sistema consistente en (1), (2), (4) y (5). El alto número de ecuaciones y el carácter mixto parabólico-hiperbólico o parabólico-parabólico degenerado no hace más que añadir dificultades matemáticas al ya de por sí difícil sistema (1), (2) con \mathbf{T} dado por (3).

No existe aún una teoría general de existencia y unicidad para este sistema de ecuaciones salvo en situaciones físicas muy restrictivas. Parte de nuestro trabajo, en colaboración con A. Friedman, ha girado en torno a estas cuestiones básicas. En [20] se estudiaron flujos estacionarios de fluidos no-Newtonianos en dominios no acotados cuya forma geométrica es la de un canal (en dimensión 2) o una tubería (en dimensión 3) deformadas. El flujo satisface condiciones de contorno de no deslizamiento y se comporta como un flujo de Poiseuille en el infinito. Probamos existencia y unicidad de soluciones bajo la suposición de alta viscosidad cinemática. Los resultados se aplican a una gran familia de modelos que incluye el modelo Oldroyd-B como caso particular. Además, para los fluidos de segundo orden se prueba la existencia y unicidad de soluciones en el caso en el que el dominio tenga esquinas.

En el caso bidimensional (el tridimensional se analiza de forma análoga), la idea fundamental yace en el hecho de que, en el caso de estos fluidos, el sistema de ecuaciones se puede escribir en la siguiente forma:

$$\Delta^2\psi + \varepsilon(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\Delta^2\psi = \varepsilon F(D^\alpha\psi, |\alpha| \leq 4)$$

siendo ε un parámetro pequeño y F una cierta función no lineal. Esta ecuación de quinto orden puede verse como una ecuación de transporte para $\Delta^2\psi$, donde \vec{v} está relacionado con ψ por la relación $\vec{v} = (v_x, v_y) = (\psi_y, -\psi_x)$. La existencia y unicidad se prueba usando teoría clásica de regularidad para el operador biarmónico en espacios de Hölder combinada con estimaciones sobre la regularidad de las curvas características que debemos obtener en dichos espacios haciendo uso de la desigualdad de Gronwall. Un punto fijo de Banach sirve para poner todas estimaciones juntas y concluir la demostración.

En el caso de dominios con esquinas debemos usar el marco funcional introducido por Maz'ya, Plamenevskij y colaboradores (ver [37], [52]) y estimaciones de ciertas integrales mediante métodos asintóticos clásicos. Esa estrategia fue la seguida en [22] para describir el flujo alrededor de una esquina.

Si la geometría del problema involucra fronteras con el vacío debe entonces imponerse una condición de equilibrio dinámico entre los esfuerzos del fluido y la fuerza de tensión superficial. Esto se traduce en la relación:

$$T_{ij}n_j = \sigma H n_i \quad (6)$$

donde n_j es la componente j -ésima del vector normal a la interfase, H es la curvatura media de la misma y σ es el coeficiente de tensión superficial del fluido.

Finalmente, como la interfase fluido-vacío puede moverse libremente, hace falta una ecuación para su movimiento. Dicha ecuación es de la forma

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \vec{v}(\mathbf{r}(t), t)$$

siendo $\mathbf{r}(t)$ la posición de un punto material en el instante t y $\vec{v}(\mathbf{r}(t), t)$ el campo de velocidades del fluido en dicho punto en el mismo instante.

Un contexto en el que aparecen singularidades es el de la extrusión de fluidos viscoelásticos. La situación es la siguiente: un chorro de material viscoelástico es obligado a salir de un tubo aplicando presión en uno de los extremos. Si la presión no es muy alta, entonces la superficie del chorro es suave, pero si la presión aplicada es suficientemente grande (mayor que un cierto valor crítico), entonces aparece una inestabilidad y la superficie se vuelve algo irregular con una perturbación de pequeña amplitud y alta frecuencia que se traduce en una geometría rugosa de la misma conocida con el término inglés *sharkskin* (*piel de tiburón*). Por encima de un segundo valor crítico aparece intermitencia entre regiones de *sharkskin* y regiones de superficie suave. Por encima de un tercer valor crítico, el flujo se vuelve completamente irregular (ver los experimentos en [35]). ¿Qué da lugar a estos fenómenos?. No hay respuesta, pero la idea

generalizada es que sea lo que sea que ocurre, debe de estar muy relacionado con el comportamiento del flujo cerca del punto triple que separa la pared del tubo, la superficie del chorro, y el aire. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso Newtoniano donde el diámetro del chorro emergente con respecto al diámetro del tubo depende fuertemente de la estructura del flujo a la salida del tubo. En el caso viscoelástico hay otro fenómeno no entendido que es el "hinchado" anormalmente grande que sufre el chorro a la salida. Este fenómeno recibe el nombre de *die-swell* (salida-hinchado). La versión linealizada del problema es el llamado problema de "stick-slip" (pegado-deslizado), que se puede visualizar como el flujo a la salida de un conjunto infinito de canales paralelos. Nuestra contribución a este problema (ver [21]) ha consistido en el establecimiento de la existencia y unicidad de soluciones y en derivar la presencia de una característica genuinamente no-newtoniana: la aparición, cerca de los puntos de contacto entre las paredes y la interfase, de una singularidad nueva que se traduce en un término de orden inferior a la singularidad Newtoniana pero que es altamente oscilatorio. Las técnicas utilizadas son estimaciones de tipo Schauder en espacios de Hölder con pesos (cerca de las esquinas) especiales y evaluación de ciertas integrales mediante técnicas clásicas del análisis asintótico.

Otro problema que se ajusta al esquema teórico descrito es el de los flujos recubridores, que son aquellos que aparecen al depositar una película fluida sobre una superficie sólida. Pensemos por ejemplo en una capa de pintura que ha de ser depositada sobre la carrocería de un coche. El principal obstáculo con el que siempre se ha chocado para estudiar problemas relacionados (como por ejemplo el del modo de extender la capa de modo que tenga un espesor preciso y se gaste la mínima cantidad de pintura posible) es el llamado "problema de la línea de contacto". El problema tiene lugar en la línea triple que conecta las fases sólida (substrato), líquida y gaseosa (aire). Si se imponen condiciones de contorno clásicas, como la de ángulo de contacto constante, se llega a resultados paradójicos como la aparición de esfuerzos infinitos y no integrables en la vecindad de dicha línea. Las aproximaciones basadas en la teoría de la lubricación (ver [46], [2], [3], [49]) y que dan lugar a ecuaciones del tipo

$$h_t + \nabla \cdot (h^{n+2} \nabla \Delta h) = 0$$

(con $h(x, y, t)$ la altura de una película fluida y $0 \leq n \leq 1$) también tropiezan con dificultades que se traducen en la no-unicidad de soluciones. Para una descripción general del problema y los intentos de resolución propuestos referimos al artículo clásico de Ngan y Dussan (ver [47]). A pesar de la sencillez de formulación de esta clase de problemas, las dificultades matemáticas con las que uno se encuentra son enormes: falta de unicidad, elevado orden en las ecuaciones, condiciones de contorno mixtas (dependiendo de que en un punto del contorno de la masa fluida haya contacto con gas, sólido o los dos), etc. Los intentos de dar solución a los mismos han ocupado buena parte del tiempo de algunos de los grandes expertos en ecuaciones en derivadas parciales. Citemos los trabajos de Friedman y Velázquez (ver [32], [33]) y los trabajos de Solonnikov (ver [59]) en los que se demuestra la existencia de soluciones no paradójicas en el caso de interfases que avanzan sobre un substrato con ángulo de contacto nulo,

pero para un fluido de Stokes en aproximación cuasiestacionaria; es decir, con el término a la izquierda de (1) nulo. En [26] se mostró que dichas soluciones son, de hecho, estables. El resultado análogo para el sistema de Navier-Stokes no ha sido aún obtenido.

En [4] investigamos el derrame de películas fluidas de fluidos del tipo "ley de potencias", en los que la viscosidad del fluido depende de las deformaciones como una ley de potencias de exponente $\lambda - 1$ (con $\lambda = 1$ correspondiendo al fluido Newtoniano). Construimos soluciones explícitas del tipo onda viajera y autosimilares. Mostramos que si el exponente de la no linealidad λ asociada a la reología es mayor que uno, entonces la ecuación unidimensional que gobierna la evolución es:

$$h_t + (h^{\lambda+2} |h_{xxx}|^{\lambda-1} h_{xxx})_x = 0$$

y admite soluciones de soporte compacto y frentes móviles (soluciones autosimilares). También comprobamos que esta solución tiene además energía y tasa de disipación de energía acotadas. Esto implica la no existencia de la paradoja de la línea de contacto en esta clase de fluidos. El resultado es fácilmente generalizable a geometrías bidimensionales.

3 Singularidades por cambio de topología

La experiencia cotidiana demuestra que en numerosas circunstancias el dominio $\Omega(t)$ ocupado por un fluido cambia su topología. Más concretamente, el dominio $\Omega(t)$ que inicialmente es simplemente conexo puede evolucionar a un dominio múltiplemente conexo. El interés por esta cuestión es antiguo y lo podemos remontar a las observaciones experimentales de Savart (ver [57]) y a los trabajos de Plateau (ver [53]) y sobre todo de Rayleigh (ver [54]). Nosotros nos restringiremos al estudio del caso en el que los dominios $\Omega(t)$ son siempre axisimétricos. Para una revisión del trabajo hecho en torno a este problema hasta 1997 ver [19].

Supongamos que $\Omega(t)$ es un tubo deformado extremadamente fino y que se extiende hasta el infinito. Cuando un cierto parámetro adimensional que mide esencialmente el espesor del tubo frente a sus dimensiones longitudinales es pequeño, es posible deducir a partir del sistema de Navier-Stokes, mediante un análisis perturbativo, el siguiente sistema aproximado llamado sistema unidimensional:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \kappa}{\partial z} + 3\mu \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (8)$$

donde μ es un parámetro adimensional que se definirá abajo y la coordenada z se considera a lo largo del eje del tubo y va de $-\infty$ a $+\infty$. La función $h(z, t)$ representa la distancia de un punto de la frontera libre a eje, mientras que la función $v(z, t)$ representa la velocidad del fluido a lo largo del eje. κ es la

curvatura media de la superficie dada por

$$\kappa = \frac{1}{h(1+h_z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{h_{zz}}{(1+h_z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (9)$$

Los parámetros originales de las ecuaciones de Navier-Stokes (densidad ρ , viscosidad cinemática ν , coeficiente de tensión superficial σ , radio característico del chorro R) se relacionan con μ mediante la relación $\mu = \nu\sqrt{\rho/(R\sigma)}$. El parámetro adimensional μ se llama número de Ohnesorge y representa el peso relativo de las fuerzas viscosas con respecto a las fuerzas capilares.

El modelo unidimensional se deduce bajo la suposición de que las longitudes características de la interfase perturbada son mucho mayores que el radio del tubo y que esta característica se mantiene válida para todo tiempo (cf. [18]). Esto equivale a decir que el parámetro R es muy pequeño comparado con la longitud de las perturbaciones de la frontera libre (suposición de "delgadez"). El sistema (7), (8) debe ser complementado con condiciones de contorno e iniciales adecuadas. Como condiciones iniciales tomaremos la geometría y velocidad iniciales a lo largo del tubo $h(z,0) = h_0(z)$, $v(z,0) = v_0(z)$. Tanto $h_0(z)$ como $v_0(z)$ se asumen suficientemente regulares. Si modelamos un tubo libre es natural imponer $h_0(z) > 0$, y $h(z,t) \rightarrow 1$, $v(z,t) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. Estas condiciones implican que el chorro es estacionario en el infinito. La suposición de "delgadez" se traduce, mientras es válida, en valores muy pequeños h_z y h_{zz} de modo que el término a la derecha de (9) se puede sustituir por $\frac{1}{h}$.

El parámetro μ depende linealmente de la viscosidad y puede tomar todos los valores posibles desde los muy pequeños a los muy grandes. Tomemos por ejemplo dos fluidos comunes como el agua y la glicerina y las mezclas de los mismos tal y como se hizo en los experimentos de [61]. Los valores típicos de R que se consideraron allí fueron 0,1 *cms.*, mientras que los valores de ν, ρ y σ de ambos líquidos a temperatura ambiente dan $3\mu = 2,98 \cdot 10^{-2}$ para el agua y $3\mu = 24,95$ para la glicerina. La adición de surfactantes puede hacer decrecer el valor de σ dramáticamente y, en consecuencia, incrementar el valor de μ . Valores menores de R (en el rango de los micrometros) fueron observados en [36] y una situación como esta daría lugar a valores de μ del orden de 10^3 . Por tanto, está justificado un análisis asintótico del sistema (7), (8) cuando $\mu \rightarrow 0$ y $\mu \rightarrow \infty$. De hecho, ambos límites se han considerado en la literatura (cf. por ejemplo [43]) para el caso $\mu = 0$ y [56], [50] para el caso que corresponde formalmente a $\mu = \infty$). Bajo la acción de la gravedad actuando en la dirección z (es decir, un chorro que cae), debemos restar al término a la derecha de (7) el número de Bond dado por $(\rho g R^2 / \sigma)$ que resulta ser, para los ejemplos descritos, del orden de 10^{-3} . A efectos de formación de singularidades podemos despreciarlo, aunque podría ser incluido fácilmente en los análisis.

El sistema (7), (8) es conocido desde hace bastante tiempo. Hay varios fenómenos para los que se piensa que el modelo unidimensional puede ofrecer una buena descripción. Uno de ellos es la estructura del flujo hasta tiempos próximos al tiempo de ruptura del tubo (cf. [18]), que es el tiempo en el que la función $h(z,t)$ alcanza el valor cero en algún punto por primera vez. El análisis

de la ruptura se ha llevado a cabo casi exclusivamente mediante la búsqueda de soluciones autosimilares de (7), (8). En [18] se encontró una solución autosimilar numéricamente. Otro fenómeno interesante es el de *overturning*, que consiste en la aparición espontánea de singularidades en la derivada espacial de la función $h(z, t)$. Este hecho ha sido observado numéricamente tanto en el caso no viscoso como en el de débil viscosidad. Por último, hay un fenómeno sorprendente y aún no entendido: la formación de estructuras iteradas que consisten en hilos largos y finos previos a la ruptura en el régimen muy viscoso $\mu \gg 1$ (cf. [58]).

El objeto de los artículos [27], [28] fue el estudio del sistema (7), (8) en el límite $\mu = 0$. Sorprendentemente, este sistema no-lineal permite un tratamiento analítico preciso vía un proceso de linealización consistente en dos pasos: 1) la formulación del sistema en coordenadas lagrangianas, 2) la aplicación de la transformación hodógrafa, conocida en el contexto de la dinámica de gases y que introducimos, como contribución original al campo, en nuestro problema.

Tras esta linealización, el problema se transforma en la resolución de la ecuación elíptica

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + w^3 \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{w^3} \frac{\partial t}{\partial w} \right) = 0 \quad (10)$$

en un dominio exterior plano con adecuadas condiciones de contorno.

La construcción de soluciones explícitas de este problema, que es relativamente sencilla dada su linealidad, se traduce en la construcción de soluciones explícitas de (7), (8). En particular:

1) Las soluciones autosimilares de (7), (8) que representan ruptura en tiempo finito son soluciones de (10) que se obtienen por separación de variables cuando se escriben en coordenadas polares ($(w, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$) y que involucran potencias de r y funciones de Legendre para la dependencia en θ .

2) Soluciones que se forman por combinación lineal de infinitas de estas soluciones y que representan un chorro cilíndrico que se rompe en tiempo finito. Es remarcable que un principio de superposición lineal se pueda aplicar a un problema no lineal como el (7), (8) a través de la transformación hodógrafa.

3) Soluciones tales que h desarrolla cúspides (singularidad en la derivada) en tiempo finito.

4) las soluciones que desarrollan singularidades de tipo fractal. La existencia de este tipo de soluciones en circunstancias experimentales reales no es clara dado al hecho de que estamos despreciando en nuestro modelo algunos términos derivados de la tensión superficial que suelen "regularizar" las soluciones en este tipo de problemas. Nuestro objetivo en este artículo era el de mostrar la relación entre relaciones de dispersión de tipo catastrófico (crecientes y positivas) y la aparición de estructuras autosimilares de tipo fractal. La perspectiva es pues más amplia que la propia de los chorros viscosos y busca exponer un modelo general de formación de estas estructuras que podría ser exportado a otros problemas importantes, como Hele-Shaw y Stefan, donde sí aparecen. La idea esencial consiste en formular el problema en el plano hodógrafo con dominios limitados por curvas análogas a la curva de Koch. Esto, traducido al plano físico, da lugar a soluciones regulares que se vuelven singulares fractales en

tiempo finito.

El artículo [31] presenta un análisis matemático del sistema (7), (8) con μ finito. Tres son los resultados fundamentales:

- 1) Para datos iniciales suficientemente regulares, las soluciones de (7), (8) se pueden continuar con la misma regularidad hasta el instante en el que h se anula en algún punto.
- 2) Bajo ciertas condiciones en μ y los datos iniciales, h se anula en algún punto al menos cuando $t \rightarrow \infty$.
- 3) Para grandes valores de μ , se tiene

$$h(z, t) = \frac{1}{\sqrt{g^{-1}\left(\frac{t}{2\mu} + g(h_0^{-2}(f^{-1}(z; t)))\right)}} + \mu^{-\frac{1}{2}}A(z, t) \text{ en } [0, \mu T^*] \quad (11)$$

con

$$T^* < -2(\inf h_0(z) + \log |1 - \inf h_0(z)|) \equiv \mu^{-1}t_0 ,$$

$A(z, t)$ una función acotada en $[0, \mu T^*]$ con la cota independiente de μ , $g(u) \equiv u^{-\frac{1}{2}} + \log \left| 1 - u^{-\frac{1}{2}} \right|$ y $f(s; t) = \int_0^s g^{-1}\left(\frac{t}{2\mu} + g(h_0^{-2}(\sigma))\right)d\sigma$ (su inversa se toma para t fijo). El primer término a la derecha de (11) es tal que desarrolla un cero en algún tiempo $t = t_0$, pero previamente desarrolla un filamento muy largo y fino con radio que escala como $(t_0 - t)^{\frac{1}{2}}$, lo que está de acuerdo con las observaciones experimentales en [36].

En ausencia de aproximaciones como la unidimensional mencionada arriba, el único resultado matemático al respecto de la formación de singularidades es el presentado en [11], [12]. En estos artículos probamos la imposibilidad de ruptura de chorros fluidos a través del colapso uniforme de un filamento fluido. Probamos que el volumen encerrado por un filamento satisface la siguiente desigualdad:

$$V(t) \geq Ce^{-Ct^2}$$

de modo que la ruptura, caso de ocurrir en el sistema de Navier-Stokes bajo la acción de fuerzas de tensión superficial, debe ser puntual. La estrategia de demostración se basa en el establecimiento de una desigualdad para la masa encerrada en el tubo en términos de la norma L^∞ de la velocidad y la estimación de la misma en la región de interés mediante estimaciones de energía con pesos.

La situación cambia en el caso de fluidos viscoelásticos. Es un hecho singular y bien documentado (cf. [34]) que la adición de polímeros a un fluido Newtoniano en forma de solución es a menudo capaz de retrasar significativamente el proceso de ruptura en tubos fluidos debido a la inestabilidad de Rayleigh. Incluso pequeñas trazas de polímero pueden transformar el proceso de ruptura, que en un fluido Newtoniano dura una fracción de segundo, en un proceso de segundos e incluso minutos para la solución. El interés industrial de este hecho es considerable. La razón estriba en que el conocimiento teórico preciso de los procesos involucrados en el retraso de la ruptura puede otorgar pistas de posibles modos de controlar el momento, la posición y el número de gotas a las que da lugar. La emisión de chorros es un procedimiento usado, por ejemplo, en las

impresoras llamadas "de chorro de tinta" o en diversos procesos industriales como los de soldadura.

Durante la evolución el tubo desarrolla un estructura de gotas-en-alambre donde una secuencia de gotas espaciadas de forma más o menos aleatoria están conectadas por filamentos muy finos (ver la Figura 2). Esta estructura permanece durante un largo periodo de tiempo (del orden del tiempo de relajación del polímero) después del cual la ruptura tiene lugar. Otro interesante fenómeno descrito en [34] es el movimiento de las gotas a lo largo de la configuración gotas-en-alambre y la coalescencia de las mismas que tiene lugar.

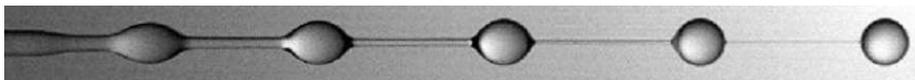


Figura 2: Estructura de gotas-en-alambre. El fluido es una disolución acuosa al 0,01 en peso de poliáciamida.

El estudio del problema de frontera libre asociado (consistente en resolver el sistema de Navier-Stokes con relaciones constitutivas y condiciones de contorno apropiadas en un dominio móvil) es prácticamente imposible desde el punto de vista analítico. Usaremos, en su lugar, el llamado modelo unidimensional análogo al descrito arriba para fluidos Newtonianos. Como ya hemos mencionado, los fluidos No-Newtonianos y, en particular, las soluciones poliméricas, se caracterizan desde el punto de vista matemático por tener relaciones constitutivas que no son simplemente una relación algebraica (y lineal) entre los tensores de deformaciones y esfuerzos, sino un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Para un fluido con ley constitutiva del tipo Johnson-Segalman la aproximación unidimensional lleva al sistema:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \kappa}{\partial z} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^2 (3\mu_s \frac{\partial v}{\partial z} + \sigma_{zz} - \sigma_{rr}) \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{2} h \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

$$\sigma_{zz} + D \left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - 2a \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{zz} \right) = 2\mu_p \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\sigma_{rr} + D \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + a \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{rr} \right) = -\mu_p \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (15)$$

análogo al (7), (8) pero con dos ecuaciones adicionales (14), (15) correspondientes a las contribuciones dominantes del esfuerzo debido a la presencia del polímero en disolución. El parámetro a es tal que $-1 \leq a \leq 1$, siendo el límite $a = 1$ el correspondiente al modelo Oldroyd-B. El parámetro D (llamado número de Deborah) es la razón entre el tiempo de relajación λ

y el tiempo característico $(\rho R^3/\sigma)^{\frac{1}{2}}$. Puede ser muy grande, ya que el tiempo característico es del orden de 10^{-3} s (en un tubo de radio 0,1 mm. como los considerados en [34] por ejemplo) mientras que λ puede ser 3 ó 4 órdenes de magnitud mayor. El hecho de que D es grande lo hemos usado para deducir límites asintóticos del sistema (12)-(15).

El artículo [30] se ha dedicado a la investigación del sistema (12)-(15) en el límite asintótico $D \rightarrow \infty$. Nos hemos centrado en los casos de viscosidad del solvente muy pequeña ($\mu_s \rightarrow 0$) y viscosidad del solvente muy grande ($\mu_s \rightarrow \infty$) y hemos demostrado los siguientes resultados principales:

1) En el límite ($\mu_s \rightarrow \infty$), no hay ruptura de los tubos si $a > \frac{1}{2}$. Esto se demuestra haciendo uso de estimaciones clásicas de las ecuaciones parabólicas y el principio del máximo. Si $\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{2}$, entonces puede haber ruptura en forma autosimilar con exponentes dados por la raíz de una cierta ecuación integral. Si $a \leq \frac{1}{4}$, entonces la ruptura puede tener lugar en forma autosimilar con los mismos exponentes que en el caso newtoniano.

2) En el límite ($\mu_s \rightarrow 0$), se prueba la no existencia de soluciones autosimilares si $a > \frac{1}{2}$ y se hallan las posibles soluciones autosimilares en el caso $a \leq \frac{1}{2}$.

3) Se hallan ciertas soluciones autosimilares interesantes mediante el análisis de un mapa de fases: la distribución de gotas-en-alambre y las soluciones de tipo onda viajera (que modelizarían la migración de gotas sobre el filamento).

En [8] realizamos simulaciones numéricas y cálculos asintóticos formales para describir la formación y evolución de la estructura de gotas-en-alambre que aparece en los chorros viscoelásticos.

En el contexto de un puente liquido (ver [1]), tras un régimen transitorio en el que el puente se comporta como los puentes newtonianos, i.e. se estrecha a un ritmo que sigue la misma ley de potencias, entra abruptamente en un régimen puramente viscoelástico en el que se forma un filamento muy fino cuyo grosor decae exponencialmente a un ritmo

$$h_{\min} \sim Ae^{-\frac{t}{3D}}$$

siendo D el número de Deborah y A una constante. Este hecho podría constituir la base de un reómetro que sirva para medir D y con él el tiempo de relajación del polímero λ .

Hemos usado, como primera aproximación, el sistema unidimensional (12)-(15). Nuestro trabajo se ha dividido esencialmente en tres partes:

1.- Construcción de un algoritmo numérico eficiente capaz de resolver la evolución de (12)-(15) a lo largo de grandes periodos de tiempo. La evidencia experimental demuestra que la ruptura se ve inhibida por largos periodos de tiempo, después de los cuales tiene lugar la fenomenología de la que hemos hablado en los párrafos anteriores. Es por ello que nos ha interesado minimizar los errores de integración numérica que, como es sabido, tienden a propagarse y crecer con el tiempo. Un problema añadido está en el hecho de que estructuras casi-singulares (como aparentes ondas de choque) aparecen a lo largo de la evolución y hay que tratarlas de una forma numéricamente correcta. El

algoritmo que desarrollamos está basado en las diferencias finitas, es implícito y adaptativo (para resolver las casi-singularidades).

2.- Hemos entendido teóricamente, mediante el uso de desarrollos asintóticos acoplados (matched asymptotic expansions), la naturaleza de las estructuras casi-singulares que aparecen y que se traducen en elevados gradientes de h que, aparentemente, tienen la propiedad de propagarse cual onda de choque. Esto es importante desde el punto de vista fundamental (cosas así se han visto en experimentos). También desde el punto de la validez del modelo unidimensional, que podría perder precisión en cuando se forman tales estructuras.

3.- Finalmente, los resultados de nuestro análisis han sido contrastados con experimentos diseñados al efecto y el acuerdo con los mismos ha sido excelente.

En estos trabajos hemos estudiado el modelo de Oldroyd que asume implícitamente una posible extensibilidad infinita del polímero. Físicamente esta es una suposición razonable durante largos periodos de tiempo, pero siempre llega un momento en el cuál, debido al efecto de la anisotropía en el arrastre hidrodinámico experimentado por las moléculas o a su extensibilidad finita, el polímero alcanza un estado de máxima extensión más allá del cual ésta no es posible. Los dos modelos que tienen en cuenta estos efectos son el modelo de Giesekus:

$$\sigma_{zz} + D \left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - 2 \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{zz} \right) + \alpha \sigma_{zz}^2 = 2\mu_p \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (16)$$

$$\sigma_{rr} + D \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{rr} \right) + \alpha \sigma_{rr}^2 = -\mu_p \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (17)$$

donde $\mu_p = \nu_p \left(\frac{\rho}{\gamma R} \right)^{\frac{1}{2}}$ en que aparece el parámetro α , factor de movilidad (si $\alpha = 0$ se recupera el modelo Oldroyd-B) y el modelo FENE en el que

$$\sigma = \frac{\mu_p}{D} f(R) (\mathbf{A} - \mathbf{I}),$$

donde $R = \text{traza}(\mathbf{A})$, y

$$f(R) = \frac{1}{1 - R/L^2}. \quad (18)$$

con L siendo el factor de extensibilidad y A_{zz} y A_{rr} satisfaciendo

$$f(R)A_{zz} - 1 + D \left(\frac{\partial A_{zz}}{\partial t} + v \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} - 2 \frac{\partial v}{\partial z} A_{zz} \right) = 0, \quad (19)$$

$$f(R)A_{rr} - 1 + D \left(\frac{\partial A_{rr}}{\partial t} + v \frac{\partial A_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} A_{rr} \right) = 0. \quad (20)$$

Notar que, en el modelo FENE, si se hace $L = \infty$ recobramos el modelo Oldroyd-B. En [29] mostramos que estos modelos presentan ruptura del tubo en tiempo finito con escalas espaciales y temporales características análogas a las de los fluidos Newtonianos. Esto encaja con las observaciones experimentales en las que se constata como, después de largos tiempos tras la aparición de los filamentos

característicos de la estructura de "gotas-en-alambre", tiene lugar una ruptura puntual de los mismos.

Por último, en [42] hemos entendido teóricamente la génesis de los comportamientos que hemos bautizado como "elásticos". Hemos sido capaces de obtener soluciones explícitas que representen el colapso de gotas que migran en los filamentos una vez que se forma la estructura de "gotas-en-alambre", así como soluciones en las que unas gotas "absorben" el fluido de otras. Además presentamos en este artículo la explicación, que creemos definitiva desde que se planteó el problema en 1969, de estos fenómenos como el resultado de una interacción entre fuerzas elásticas y de tensión superficial. Esta interacción obedece lo que hemos bautizado como "4 times rule" y establece que las fuerzas elásticas en un filamento cuyo perfil varía lentamente son 4 veces mayores y de sentido opuesto que las de tensión superficial.

4 Análisis de la formación de singularidades en análogos de Navier-Stokes en dimensiones 1 y 2

Parte de la actividad desarrollada por el autor en los dos últimos años en colaboración con A. Córdoba y D. Córdoba trata del estudio de las soluciones de la ecuación cuasigeoestrófica bidimensional y de algunos análogos unidimensionales. La ecuación cuasigeoestrófica es a su vez un modelo para los sistemas de Euler y Navier-Stokes tal y como comentaremos más abajo. La ecuación se puede derivar a partir de principios provenientes de la geofísica y tiene la siguiente forma:

$$(\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla) \theta = -k(-\Delta)^\gamma \theta \quad (21)$$

$$\vec{v} = \nabla^\perp \psi \quad y \quad \theta = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \psi \quad (22)$$

donde θ representa el campo de temperaturas, \vec{v} el campo de velocidades y k el coeficiente de viscosidad. Tiene aplicaciones a la meteorología y a la oceanografía, y es un caso especial del sistema cuasigeoestrófico más general que modela el flujo en el océano cuando los números de Rossby y Ekman son pequeños. A pesar de estas aplicaciones potenciales, nosotros estamos más interesados en los aspectos teóricos y analíticos de la ecuación debido a las propiedades tan notables que presenta.

En los últimos años ha habido un intenso interés científico en la comprensión del comportamiento de las soluciones de la ecuación cuasigeoestrófica como un posible modelo para explicar la formación de frentes singulares que separan regiones con distintos valores de θ (que se pueden interpretar como regiones con masas de aire caliente y frío). Por otra parte, Constantin, Majda y Tabak [10] mostraron que en el caso $k = 0$ la ecuación cuasigeoestrófica es un modelo bidimensional para la ecuación de Euler tridimensional, ya que comparten muchas de las dificultades analíticas que han hecho imposible, hasta la fecha, comprender completamente el comportamiento de las soluciones de ambas. En particular, es esencial conocer si las soluciones desarrollan singularidades en

tiempo finito o no debido a las consecuencias directas que una situación u otra tendría en Física e Ingeniería. Recordemos que el sistema de Navier-Stokes se puede escribir en su forma más general como

$$\vec{v}_t + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla P - k(-\Delta)^\gamma \vec{v} \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (24)$$

donde $u = (v_1(x_1, x_2, x_3, t), v_2(x_1, x_2, x_3, t), v_3(x_1, x_2, x_3, t))$ es el campo de velocidades en el seno del fluido, la presión viene dada por $P = P(x_1, x_2, x_3, t)$ y k es el coeficiente de viscosidad. Desde el punto de vista físico es razonable asumir que el flujo tiene una energía cinética inicial finita:

$$\int_{\Omega} |\vec{v}(x, t)|^2 dx < \infty.$$

Ladyzhenskaya fue capaz de probar existencia global (i.e., ausencia de singularidades) para $\gamma \geq \frac{5}{4}$. El valor más destacable de γ , desde el punto de vista físico, es $\gamma = 1$.

El vector vorticidad se define como $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$. Las ecuaciones (23), (24) se pueden escribir en términos de ω como

$$\vec{\omega}_t + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} = (\nabla \vec{v}) \vec{\omega} - k(-\Delta)^\gamma \vec{\omega}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{\omega} = 0.$$

Usando la ley de Biot-Savart, la velocidad se puede obtener a partir de la vorticidad como

$$\vec{v}(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{y \times \vec{\omega}(x + y, t)}{|y|^3} dy.$$

Análogamente, la ecuación cuasigeoestrófica se puede escribir en la forma

$$(\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla) \nabla^\perp \theta = (\nabla \vec{v}) \cdot \nabla^\perp \theta - k(-\Delta)^\gamma (\nabla^\perp \theta).$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

donde la función de corriente ψ se puede obtener de θ a partir de

$$\psi(x, t) = - \int_{\Omega} \frac{\theta(x + y, t)}{|y|} dy,$$

y por tanto

$$\vec{v}(x, t) = - \int_{\Omega} \frac{\nabla^\perp \theta(x + y, t)}{|y|} dy$$

La analogía entre $\nabla^\perp \theta = (-\theta_{x_2}, \theta_{x_1})$ y $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ es clara ya que ambos satisfacen la misma ecuación. Por otra parte, el operador $\nabla \vec{v}$ es una integral singular en dos dimensiones con respecto a $\nabla^\perp \theta$ para la ecuación cuasigeoestrófica mientras que es un operador integral singular en tres dimensiones con respecto a la vorticidad en Navier-Stokes. En [48] se ha observado numéricamente que

en el caso $\gamma = 1$ hay solamente un crecimiento exponencial de las derivadas de θ , mientras que en [14] se demostró que en escenarios plausibles en los que se conjeturó la existencia de singularidades (puntos hiperbólicos) tales singularidades no pueden existir.

La ecuación cuasigeométrica no viscosa puede escribirse, en términos de la transformada de Riesz (ver [60]), como

$$\theta_t + \operatorname{div}[(R^\perp \theta)\theta] = 0.$$

Con objeto de construir un modelo unidimensional, en [7] consideraremos como incógnita una función $\theta(x, t)$ definida en $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, y reemplazaremos la transformada de Riesz $R^\perp(\cdot)$ por su análogo unidimensional, la transformada de Hilbert. Finalmente, reemplazamos $\operatorname{div}(\cdot)$ por ∂_x . Entonces el problema resulta ser

$$\begin{aligned} \theta_t + (H(\theta)\theta)_x &= 0, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x). \end{aligned} \tag{25}$$

Siguiendo [9] transformamos (25) introduciendo variables y funciones complejas y teniendo en cuenta las siguientes relaciones algebraicas para la transformada de Hilbert:

$$H(Hf) = -f \tag{26}$$

$$H(fHg + gHf) = (Hf)(Hg) - fg \tag{27}$$

$$(Hf)_x = H(f_x). \tag{28}$$

Aplicando H a la primera ecuación en (25) se tiene

$$(H\theta)_t + \frac{1}{2}((H\theta)^2 - (\theta)^2)_x = 0. \tag{29}$$

Entonces, introduciendo la función compleja

$$z(x, t) = H\theta(x, t) + i\theta(x, t), \quad z_0(x) = H\theta_0(x) + i\theta_0(x), \tag{30}$$

las ecuaciones (25) y (29) son respectivamente la parte imaginaria y real de la siguiente ecuación de Burgers compleja:

$$\begin{aligned} z_t + zz_x &= 0, \\ z(x, 0) &= z_0(x). \end{aligned} \tag{31}$$

Usando esta representación demostramos que las soluciones desarrollan genéricamente singularidades de tipo "cúspide" en tiempo finito.

En una dimensión el término de viscosidad en el caso crítico $-\kappa(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta$ es equivalente a $-\kappa(H\theta)_x$. En este artículo probamos también que las soluciones de esta ecuación desarrollan singularidades con el mismo dato que el caso no viscoso si $\kappa < \|\theta_0\|_{L^\infty}$. Cuando $\kappa \geq \|\theta_0\|_{L^\infty}$ la solución es regular para todo tiempo.

Un modelo similar a (25) es el dado por la siguiente ecuación de tipo Burgers con velocidad nlocal:

$$\begin{aligned}\theta_t + H(\theta)\theta_x &= 0, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x).\end{aligned}\tag{32}$$

Esta ecuación guarda relación con la ecuación de Birkhoff-Rott para la evolución de una hoja de vorticidad en dos dimensiones (ver [13]). En [13] demostramos que las soluciones de (32) pueden desarrollar singularidades en forma de cúspide en tiempo finito tal y como se conjeturó para (32) y para la propia ecuación de Birkhoff-Rott. Dichas singularidades se regularizan tras la adición de términos de viscosidad.

5 Bifurcaciones de ruptura de simetría en fluidos conductores cargados

Consideremos ahora una gota de fluido conductor con carga total Q , en un medio de constante dieléctrica ε_0 , y con radio R_0 . Por debajo de un cierto valor del coeficiente de tensión superficial γ la gota puede dejar de ser esférica. De hecho, la pérdida de esfericidad ocurre cuando un cierto parámetro adimensional

$$X \equiv \frac{Q^2}{32\gamma\pi^2\varepsilon_0 R_0^3}$$

es mayor que un cierto valor crítico X_c .

Este problema fue estudiado por primera vez por Lord Rayleigh (cf. [55]) quién mostró que una gota de fluido cargado se puede volver inestable cuando X es suficientemente grande. Trabajo numérico debido a Miksis [45] muestra que cuando X excede X_c las gotas se vuelven inestables tomando una forma aproximada de esferoide prolato para $X - X_c$ pequeño; ver también las referencias en [45]. La evolución posterior una vez la gota se ha vuelto inestable es un problema difícil de estudiar tanto numérica como experimentalmente. La primera observación experimental del proceso completo de evolución de una gota levitante (en la que se equilibra la gravedad con una fuerza de sustentación electrostática) cuyo radio decrece lentamente debido a la evaporación ha sido muy reciente (ver Duft et al. [17]). Una vez que el radio es suficientemente pequeño y se alcanza el valor crítico de X , la gota adquiere la forma de un esferoide prolato que, tras un breve periodo de tiempo, se vuelve muy excéntrico y emite dos chorros extremadamente finos por sus polos. Estos chorros llevan consigo aproximadamente un 30 % de la carga de la gota, pero solamente un 1 % de la masa. A continuación los chorros se desintegran en cientos de pequeñas gotas, la gota madre vuelve a evaporarse y el proceso se repite cuando su radio es suficientemente pequeño. El resultado final es la formación de multitud de pequeñas gotas. Se conjetura que podría ser este proceso de formación de cientos de gotitas en torno a las que pueden nuclear gotas mayores lo que desencadena las tormentas de lluvia.

Puesto que estamos considerando un fluido conductor, toda la carga eléctrica se reparte en la superficie de la gota. Fuera del dominio ocupado por la gota (que llamaremos Ω) habrá un campo eléctrico con un potencial V que decae en el infinito y es solución de la ecuación de Laplace. En la superficie de la gota, al ser conductora, habrá un potencial constante así como un equilibrio entre diferencia de presión (entre el interior y el exterior), fuerzas de tensión superficial proporcionales a la curvatura media y fuerzas de repulsión electrostática de cargas. Las fuerzas electrostáticas son proporcionales a la densidad superficial de carga y a la componente normal del campo eléctrico (que es igual a la derivada normal de V). Se puede demostrar fácilmente que en la superficie de un conductor las cargas se distribuyen proporcionalmente a la derivada normal del potencial. Poniendo todos estos hechos juntos se obtiene el sistema:

$$\Delta V = 0 \text{ en } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \quad (33)$$

$$V = C \text{ sobre } \partial\Omega, \quad (34)$$

$$V(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \text{ cuando } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \quad (35)$$

$$\delta p = \gamma\kappa - \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (36)$$

donde δp es la diferencia de presión entre el fluido dentro de Ω y el fluido fuera de Ω , y κ es la curvatura media de la superficie $\partial\Omega$ ($\kappa > 0$ si Ω es una esfera). La constante C en (34) se tiene que elegir de tal manera que se satisfaga la condición (35).

El sistema (33)-(36) tiene una solución explícita en la que Ω es una esfera de radio R_0 ,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad (37)$$

$$\delta p = \frac{\gamma}{R_0} - \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0^2} \right)^2, \quad (38)$$

y

$$C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}. \quad (39)$$

Las soluciones no esféricas que se han observado experimentalmente podrían aparecer como ramas bifurcadas de la rama principal de soluciones esféricas. Eso es precisamente lo que demostramos en [24] (ver también [23] donde se estudian problemas similares que aparecen en el contexto de la biología matemática). Escogemos como parámetro de bifurcación el coeficiente de tensión superficial. Consideramos los parámetros Q , ε_0 y R_0 fijos y entonces la constante C en (39) es también fija y la diferencia de presiones δp se toma como la misma de una gota esférica, es decir,

$$\delta p = \delta p_0(\gamma) \equiv \frac{\gamma}{R_0} - \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0^2} \right)^2.$$

Probamos que existe una sucesión de ramas de bifurcación con

$$\gamma = \gamma_l + \varepsilon\gamma_{l1} + \varepsilon^2\gamma_{l2} + \dots \quad (l = 2, 3, \dots)$$

y frontera libre

$$r = R_0 + x(\theta) = R_0 + \varepsilon Y_{l,0}(\theta) + \varepsilon^2 \Lambda_{l2}(\theta) + \dots$$

donde $Y_{l,0}(\theta)$ son los armónicos esféricos $Y_{l,m}$ con $m = 0$, y $\gamma_2 < \gamma_3 < \dots$

Como el primer punto de bifurcación $\gamma = \gamma_2$ es el más relevante desde el punto de vista físico (es el genérico), es de interés conocer la forma de la curva de bifurcación $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ cerca de $\gamma = \gamma_2, \varepsilon = 0$. Hemos calculado γ_{21} y concluimos que

$$\gamma_{21} > 0 \tag{40}$$

de modo que para $l = 2, \gamma'(\varepsilon) > 0$ cerca de $\varepsilon = 0$.

Probamos además que las gotas esféricas son asintóticamente estables si $\gamma > \gamma_2$ mientras que en la rama bifurcada con $\gamma(\varepsilon) \sim \gamma_2$ y $\varepsilon > 0$ (formas prolatas) las gotas son inestables tal y como se muestra en la Figura 3 y son estables ante perturbaciones axisimétricas si $\varepsilon < 0$ (formas oblatas). Estos resultados han sido obtenidos usando la potente teoría de bifurcaciones en espacios de Banach de Crandall y Rabinowitz (ver [15] y [16]) adaptada por nosotros al estudio de problemas de frontera libre. Bajo esta perspectiva, las bifurcaciones de ruptura de simetría en gotas cargadas pueden clasificarse como bifurcaciones transcriticalas.

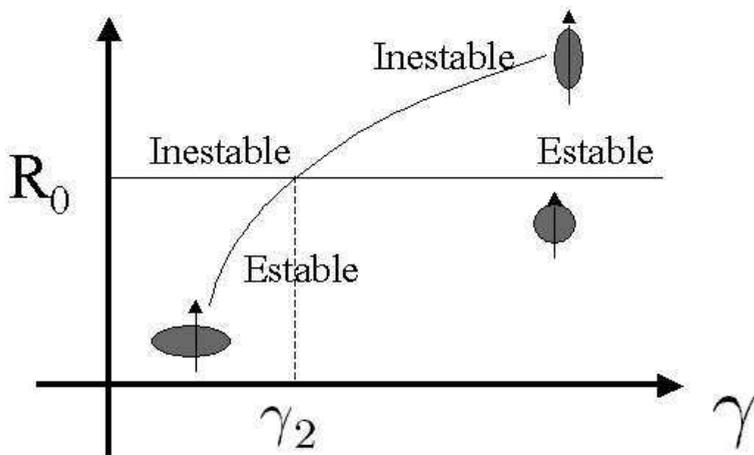


Figura 3: Representación gráfica de las ramas de bifurcación. La forma de la gota es axisimétrica en todos los casos y representamos el eje de simetría con una flecha.

Los problemas de frontera libre involucrando fluidos cargados y la acción de fuerzas de tensión superficial están comenzando a atraer una gran atención

por parte de amplias comunidades de físicos e ingenieros. La razón estriba en la posibilidad de control del comportamiento de los fluidos a muy pequeña escala mediante la acción de campos eléctricos y magnéticos y las potenciales aplicaciones que ello tendría en niveles micro y nanoscópicos. Nuestra contribución en este campo se limita, por el momento, al estudio del derrame de gotas conductoras cargadas (ver [5]). El desarrollo de herramientas numéricas apropiadas basadas en la formulación de las ecuaciones de fluidos de Stokes mediante integrales de contorno y su combinación con el uso de técnicas asintóticas será el arma básica con el que pretendemos atacar muchos de estos problemas en el futuro próximo.

Referencias

- [1] Y. Amarouchene, D. Bonn, J. Meunier, H. Kellay, Inhibition of the finite-time singularity during droplet fission of a polymeric fluid, *Physical Review Letters*, Vol. 86, no. 16 (2001), 3558-3561.
- [2] F. Bernis, A. Friedman, Higher order nonlinear degenerate parabolic equations, *J. Differ. Equations* 83, 1 (1990), 179-206.
- [3] A. L. Bertozzi, M. Pugh, The lubrication approximation for thin viscous films: Regularity and long-time behavior of weak solutions. *Commun. Pure Appl. Math.* 49, 2 (1996), 85-123.
- [4] S. Betelú, M. A. Fontelos, Capillarity driven spreading of power-law fluids, *Applied Mathematics Letters*, 16 (8) (2003), 1315-1320.
- [5] S. Betelú, M. A. Fontelos, Spreading of charged microdroplets, aparecerá en *Physica D*, 2005.
- [6] R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids*, Vol. 1. Wiley, New York, 1977.
- [7] D. Chae, A. Córdoba, D. Córdoba, M. A. Fontelos. Finite time singularities in a 1D model of the quasi-geostrophic equation, aparecerá en *Adv. Math.*, 2005.
- [8] C. Clasen, J. Eggers, M. A. Fontelos, J. Li, G. H. McKinley, The beads-on-string structure of viscoelastic threads, aparecerá en *J. of Fluid Mech.*, 2005.
- [9] P. Constantin, P.D. Lax, A. J. Majda, A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation, *Comm. Pure Appl. Math* 38 (1985), 715-724.
- [10] P. Constantin, A. J. Majda, E. Tabak, Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar, *Nonlinearity*, 7 (1994), 1495-1533.

- [11] A. Córdoba, D. Córdoba, C. Fefferman, M. A. Fontelos, A geometrical constraint for capillary jet breakup, *Adv. Math.* 187 (2004), no. 1, 228–239.
- [12] A. Córdoba, D. Córdoba, C. Fefferman, M. A. Fontelos, Drops: the collapse of capillary jets, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 99 (2002), no. 17, 11006–11007.
- [13] A. Córdoba, D. Córdoba, M. A. Fontelos, Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity, *aparecerá en Ann. of Math.*, 2005.
- [14] D. Cordoba, Nonexistence of simple hyperbolic blow-up for the quasi-geostrophic equation, *Ann. of Math.*, 148 (1998), 1135–1152.
- [15] M. G. Crandall, L. H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Functional Analysis*, 8 (1971), 321–340.
- [16] M. G. Crandall, L. H. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 52 (1973), 161–180.
- [17] D. Duft, T. Achtzehn, R. Müller, B. A. Huber, T. Leisner, Rayleigh jets from levitated microdroplets, *Nature*, vol. 421, 9 Enero 2003, pg. 128.
- [18] J. Eggers, Universal pinching of 3D axisymmetric free-surface flow. *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993), 3458.
- [19] J. Eggers, Nonlinear dynamics and breakup of free surface flows, *Rev. Modern Phys.*, 69 (1997), 865–929.
- [20] M. A. Fontelos, A. Friedman, Stationary non-Newtonian fluid flows in channel-like and pipe-like domains, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 151 (2000), no. 1, 1–43.
- [21] M. A. Fontelos, A. Friedman, Analysis of the stick-slip problem for non-Newtonian flows, *Comm. Partial Differential Equations* 26 (2001), no. 3–4, 461–536.
- [22] M. A. Fontelos, A. Friedman, The flow of a class of Oldroyd fluids around a re-entrant corner, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 95 (2000), no.2–3, 185–198.
- [23] M. A. Fontelos, A. Friedman, Symmetry-breaking bifurcations of free boundary problems in three dimensions, *Asymptotic Analysis* 35 (3–4) (2003), 187–206.
- [24] M. A. Fontelos, A. Friedman, Symmetry-breaking bifurcations of charged drops, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 172 (2004) , no. 2, 267–294.

- [25] M. A. Fontelos, A. Friedman, B. Hu, Mathematical analysis of a model for the initiation of angiogenesis, *SIAM J. Math. Anal.* 33 (2002), no. 6, 1330–1356.
- [26] M. A. Fontelos, J. J. L. Velázquez, A free boundary problem for the Stokes system with contact lines, *Comm. Partial Differential Equations* 23 (1998), no. 7-8, 1209–1303.
- [27] M. A. Fontelos, J. J. L. Velázquez, On some breakup and singularity formation mechanisms for inviscid liquid jets, *SIAM J. Appl. Math.*, 59-6 (1999), 2274-2300.
- [28] M. A. Fontelos, J. J. L. Velázquez, Fractal-like singularities for an inviscid one-dimensional model of fluid jets, *Euro Jnl. of Applied Mathematics*, 11 (2000), 29-60.
- [29] M. A. Fontelos, J. Li, On the evolution and rupture of filaments in Giesekus and FENE models, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 118 (2004), no. 1, 1-16.
- [30] M. A. Fontelos, Break-up and no break-up in some models for the evolution of viscoelastic jets, *Z. Angew. Math. Phys.* 54 (2003), 84-111.
- [31] M. A. Fontelos, Analysis of the evolution of thin viscous jets: filament formation, *Mathematical Methods in the Applied Science*, 27 (2004), no. 10, 1197-1220.
- [32] A. Friedman, J. J. L. Velázquez, The analysis of coating flows near the contact line, *Journal of Differential Equations* 119, 1 (1995), 137-208.
- [33] A. Friedman, J. J. L. Velázquez, The analysis of coating flows in a strip, *Transactions of the AMS* 349, 8 (1995), 134-182.
- [34] M. Goldin, J. Yerushalmi, R. Pfeffer, R. Shinnar, Breakup of a laminar capillary jet of a viscoelastic fluid, *J. Fluid Mech.* 38-4 (1969), 689-711.
- [35] D. S. Kalika, M. M. Denn, Wall slip and extrudate distortion in linear low-density polyethylene, *J. Rheology* 31 (1997), 815-834.
- [36] T.A. Kowalewski, On the separation of droplets from a liquid jet, *Fluid Dyn. Res.* 17 (1996), 121.
- [37] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, Elliptic boundary problems in domains with point singularities, *Mathematical surveys and monographs*, Vol. 52, American Mathematical Society, Providence R. I. (1997).
- [38] O.A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous Incompressible Flow*, 2nd ed., Gordon and Breach New York-London-Paris, 1969.
- [39] R. G. Larson, Instabilities in viscoelastic flows, *Rheologica Acta* 31 (1992), 213-263.

- [40] J. Leray, Etude de diverses équations nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, Jour. Math. Pures Appl., 12 (1933), 1-82.
- [41] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63 (1934), 193-248.
- [42] J. Li, M. A. Fontelos, Drop dynamics on the beads-on-string structure for viscoelastic jets: a numerical study, Physics of fluids, 15 (2003), no. 4, 922-937.
- [43] Lu Ting, J.B. Keller. Slender jets and thin sheets with surface tension. SIAM J. Appl. Math., 50,6 (1990), 1533-1546.
- [44] A. Majda, E. Tabak, A two-dimensional model for quasi-geostrophic flow: comparison with the two-dimensional Euler flow, Physica D , 98 (1996), 515-522.
- [45] M. J. Miksis, Shape of a drop in an electric field, Phys. of Fluids, 24-11 (1981), 1967-1972.
- [46] T. G. Myers, Thin films with high surface tension, SIAM Rev. 40, 3 (1998), 441-462.
- [47] C. C. Ngan, E. B. Dussan, On the dynamics of liquid spreading on solid surfaces, J. Fluid Mech. 209 (1989), 191-226.
- [48] K. Ohkitani, M. Yamada, Inviscid and inviscid-limit behavior of a surface quasi-geostrophic flow, Phys. Fluids, 9 (1997), 876-882.
- [49] F. Otto, Lubrication approximation with prescribed nonzero contact angle, Comm. Partial Differential Equations 23 (1998), no. 11-12, 2077-2164.
- [50] D. T. Papageorgiou, On the breakup of viscous liquid jets, Physics of fluids, 7, (1995), 1529-1544.
- [51] J. Pedlosky, Geophysical fluid dynamics, Springer-Verlag New york, 1987.
- [52] B. A. Plamenevskij, Elliptic boundary value problems in domains with piecewise smooth boundary, in Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 79, Springer-Verlag Berlin (1997).
- [53] M. T. Plateau, Smithsonian Report 250 (1863).
- [54] Rayleigh, Lord (J.W. Strutt), On the instability of jets. Proc. Lond. Math. Soc. 10 (1879), 4-13.
- [55] Rayleigh, Lord (J.W. Strutt), On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity, Phil. Mag. 14 (1882), 184-186.
- [56] M. Renardy, A numerical study of the asymptotic evolution and breakup of Newtonian and viscoelastic jets. J. Non-Newtonian Fluid Mechanics, 59 (1995), 267-282.

- [57] F. Savart, Mémoire sur la Constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys.* 53, 337 (1833), 337-386.
- [58] X. D. Shi, M. P. Brenner, S. R. Nagel, A cascade of Structure in a drop falling from a faucet. *Science*, Vol. 265 (1994), 219-222.
- [59] V. A. Solonnikov, On some free boundary problems for the Navier-Stokes equations with moving contact points and lines, *Mathematische Annalen* 302, 4 (1995), 743-772.
- [60] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press. Princeton, NJ, 1970.
- [61] E. D. Wilkes, S. D. Phillips and O. A. Basaran, Computational and experimental analysis of the dynamics of drop formation. *Physics of Fluids*, Vol. 11, no. 12 (1999), 3577-3598.