

Algunos problemas de control y diseño óptimo en sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales

C. CASTRO

Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la
Ingeniería Civil
ETSI Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid

ccastro@caminos.upm.es

Resumen

Este artículo contiene una breve descripción de cuatro problemas diferentes relacionadas con el control y el Diseño Óptimo en sistemas gobernados por Ecuaciones Diferenciales Parciales. El primer problema que se presenta consiste en el análisis y control de sistemas híbridos compuestos por cuerdas y vigas acopladas con masas de Dirac. El segundo problema se refiere al estudio de la propagación de ondas en medios muy heterogéneos. El tercer problema es una adaptación del método de la homogeneización al diseño óptimo de un conocido problema en ingeniería nuclear. Por último, describimos una forma óptima de estabilizar las vibraciones de una cuerda vibrante.

Palabras clave: *Control, Sistemas Híbridos, Homogeneización, Diseño Óptimo*

Clasificación por materias AMS: *35B37, 35B27, 35L05, 35L30, 35P15*

1 Introducción

Este artículo presenta una breve descripción de los principales problemas que han constituido la actividad investigadora que he desarrollado durante los últimos años.

La motivación principal de nuestro trabajo es *el estudio de propiedades de control y optimización en sistemas mecánicos gobernados por ecuaciones diferenciales parciales.*

Fecha de recepción: 8 de Mayo de 2002

Concretamente hemos trabajado en cuatro tipos de problemas relacionados con este tema: análisis y control de sistemas híbridos, análisis y control de sistemas sobre medios muy heterogéneos, diseño óptimo mediante homogeneización y disipación óptima de una cuerda vibrante.

A continuación presentamos una breve descripción de los cuatro problemas en los que hemos trabajado y los resultados obtenidos. La última sección contiene un resumen de las principales conclusiones.

2 Análisis y control de sistemas híbridos

Se llaman sistemas híbridos a aquellos que acoplan estructuras flexibles de diferente naturaleza.

En los últimos años el estudio de este tipo de sistemas ha tenido un gran auge justificado por los numerosos problemas de ingeniería en los que suelen aparecer. Un ejemplo de estos problemas, que además dio lugar a los primeros modelos matemáticos de sistemas híbridos, es el estudio de las vibraciones de un satélite con una antena adosada. El objetivo a la hora de estudiar este sistema era en primer lugar analizar la interacción entre las dos estructuras (la antena y el satélite) para posteriormente actuar mediante un control, situado en el satélite, que permitiese anular las vibraciones no deseadas en ambas estructuras.

El modelo matemático más simple utilizado para estudiar este sistema consistió en una cuerda vibrante con una masa puntual en un extremo (ver [37] y [36]). Este modelo constituye una buena aproximación siempre que la longitud de la antena sea significativamente grande con respecto al diámetro del satélite. Se trata de un modelo lineal en el que se acoplan la ecuación de ondas para describir las vibraciones de la cuerda con la ley de Newton para las vibraciones de la masa.



Figura 1: Sistema cuerpo-cuerda elástica.

Un modelo más complejo, pero a la vez más realista, del mismo problema consiste en describir las vibraciones de la antena mediante la ecuación de vigas. Este modelo, que también conduce a un sistema lineal de ecuaciones, fué estudiado en [34] y [35].

En todos estos trabajos se abordó el problema de la controlabilidad del sistema cuando se actúa sobre la masa puntual.

Otro problema interesante en el que aparece un sistema híbrido es el estudio de la propagación y control de ruido en cavidades con paredes elásticas. Es el caso, por ejemplo, de la cabina de un avión que constituye un medio con un alto nivel de ruido rodeado de una estructura elástica. El modelo matemático más sencillo para estudiar este tipo de problemas fué introducido por H. Banks, W. Fang, R.J. Wilcox and R.C. Smith [7] y consiste en un fluido contenido en un cuadrado en el que uno de sus lados es elástico. Más tarde, S. Micu y

E. Zuazua estudiaron rigurosamente la controlabilidad y estabilización de este sistema cuando se actuaba en diferentes partes del dominio (ver [38] y [39]) y dieron una descripción completa del espectro del problema a altas frecuencias.

La dificultad principal a la hora de estudiar este tipo de sistemas híbridos es la interacción entre las distintas estructuras que lo forman. Esta interacción constituye un problema difícil y que aún no se comprende bien.

Nuestro estudio se ha centrado fundamentalmente en modelos matemáticos unidimensionales que nos han permitido analizar con detalle la interacción entre ciertos tipos de estructuras muy particulares y deducir propiedades de control. A pesar de que la particularidad de los problemas considerados hace que las técnicas utilizadas sean a veces difícilmente transportables a marcos más generales, creemos que algunos de los comportamientos detectados son significativos y de carácter genérico, es decir, seguirán presentes en otros modelos más complejos en este campo.

El punto de partida fué un trabajo realizado por S. Hansen y E. Zuazua sobre un modelo híbrido compuesto por una cuerda vibrante con una masa puntual en su interior (ver [28]). En dicho trabajo se muestra que la interacción entre la masa y la cuerda produce el siguiente fenómeno sorprendente: *El sistema está bien puesto en espacios de diferente regularidad a ambos lados de la masa sin que exista una energía natural asociada.* Más concretamente, si consideramos un dato inicial con un orden de regularidad mayor a uno de los lados de la masa entonces la solución mantiene esa propiedad a lo largo del tiempo.



Figura 2: Sistema cuerda-cuerpo-cuerda. Hemos estudiado la influencia del cuerpo en las vibraciones del sistema

La interpretación física de este hecho es la siguiente: cuando una vibración llega a la masa se descompone en dos nuevas vibraciones: una de ellas se refleja manteniendo la regularidad inicial mientras que otra parte se transmite al otro lado ganando un orden de regularidad. Este efecto regularizante es debido a la presencia de la masa ya que, como es bien conocido, en una cuerda las vibraciones se propagan a través de las características sin ningún efecto regularizante.

La demostración de este resultado está basada en una construcción explícita de las soluciones mediante la fórmula de D'Alambert que se verifica a ambos lados de la masa. Esta fórmula tan sólo sirve para construir soluciones de la ecuación de ondas y esto hace que no se pueda generalizar el resultado a sistemas gobernados por otras ecuaciones diferenciales.

El modelo introducido en [28] para el sistema híbrido compuesto de dos

cuerdas unidas por una masa es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx}, & \text{en } -1 < x < 0, t > 0 \\ u_{tt} = u_{xx}, & \text{en } 0 < x < 1, t > 0 \\ [u(0, t)]_{x=0} = 0 & \text{en } t > 0 \\ [u_x(0, t)]_{x=0} = u_{tt}(0, t) & \text{en } t > 0 \\ u(-1, t) = u(1, t) = 0, & \text{en } t > 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

donde $[u(x, t)]_{x=0}$ denota el salto de la función en $x = 0$, es decir, $[u(x, t)]_{x=0} = u(0^+, t) - u(0^-, t)$. En (1) la función $u(x, t)$ mide los desplazamientos verticales de las cuerdas situadas en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, y $u(0, t)$ mide el desplazamiento vertical de la masa, situada en $x = 0$. Observemos que las dos primeras ecuaciones modelizan el movimiento de las cuerdas mientras que la tercera y cuarta ecuaciones representan las condiciones de transmisión de energía entre las cuerdas y la masa.

El estudio de este modelo tenía dos objetivos concretos. En primer lugar pretendíamos justificarlo desde el punto de vista matemático. Los modelos sobre sistema híbridos aparecidos hasta el momento se deducían a partir de consideraciones físicas o argumentos matemáticos formales. Para cumplir este objetivo, estudiamos el sistema híbrido como límite de un conjunto de sistemas S_ϵ formados por tres cuerdas vibrantes conectadas entre sí, en los que la cuerda central es de longitud ϵ y densidad $1/\epsilon$. Los sistemas aproximados que consideramos son:

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_{tt} = u_{xx}, & \text{en } -1 < x < -\epsilon, & t > 0 \\ \frac{1}{2\epsilon} u_{tt} = u_{xx}, & \text{en } -\epsilon < x < \epsilon, & t > 0 \\ u_{tt} = u_{xx}, & \text{en } \epsilon < x < 1, & t > 0 \\ u(\pm\epsilon^-, t) = u(\pm\epsilon^+, t), & \text{en } t > 0 \\ u_x(\pm\epsilon^-, t) = u_x(\pm\epsilon^+, t), & \text{en } t > 0 \\ u(-1, t) = u(1, t) = 0, & \text{en } t > 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

De esta forma, en el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos una densidad con una delta de Dirac, es decir, una masa puntual.

Para estudiar la convergencia de los problemas aproximados al problema límite utilizamos dos métodos diferentes: El primero de los métodos consiste en definir las soluciones introduciendo las formulaciones débiles (soluciones en sentido de las distribuciones) y después pasar al límite en dichas formulaciones. La convergencia de las soluciones resulta un problema delicado debido a que la densidad de la cuerda central en los problemas aproximados no está acotada uniformemente cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

El segundo método consiste en definir las soluciones mediante su desarrollo en series de Fourier y después pasar al límite en las series. Este último método requiere un detallado conocimiento del espectro de los problemas aproximados y su dependencia con respecto al parámetro $\epsilon \rightarrow 0$. En este sentido, los métodos clásicos de perturbación de operadores lineales permiten encontrar la tasa de convergencia de un número finito fijo de autovalores y autofunciones, lo que resulta insuficiente para probar la convergencia de las series de Fourier. Un

cálculo explícito del espectro del problema proporciona mejores resultados y se puede establecer la convergencia uniforme de los autovalores λ_k^ϵ y autofunciones ϕ_k^ϵ para un número finito $k \leq C\epsilon^{-1/6}$ pero que crece cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Esto permite obtener la convergencia de las series de Fourier. Al mismo tiempo se pone de manifiesto que el sistema límite sólo refleja el comportamiento de la parte de las soluciones con frecuencias por debajo de la tasa $\epsilon^{-1/6}$. El comportamiento de la parte de las soluciones asociada a frecuencias por encima de este rango no se conoce bien. Como veremos en la próxima sección, este tipo de soluciones puede dar lugar a patologías muy sorprendentes.

Este análisis permite convencerse de que el sistema híbrido (1) refleja fielmente el comportamiento límite de los sistemas aproximados, al menos en lo que respecta a las "bajas" frecuencias (ver [10]).

El segundo objetivo que nos planteamos consistió en dar una demostración del fenómeno descrito por Hansen y Zuazua en [28] basada en propiedades espectrales y que no utilizase la fórmula de D'Alambert. Con ello pretendíamos deducir el mismo fenómeno en otros modelos gobernados por ecuaciones diferenciales diferentes de la ecuación de ondas, como por ejemplo las ecuaciones de vigas.

El análisis realizado demostró que las propiedades espectrales que caracterizan el fenómeno descrito son por un lado la falta de separación entre las raíces cuadradas de dos autovalores consecutivos, es decir,

$$\inf_k (\sqrt{\lambda_{k+1}} - \sqrt{\lambda_k}) = 0, \quad (3)$$

y por otro lado un comportamiento singular de las autofunciones que permite establecer combinaciones lineales de las mismas con una apariencia asimétrica (ver Figura 3).

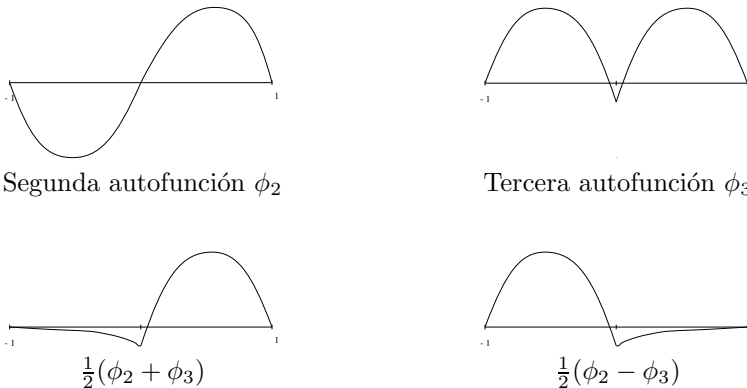


Figura 3: Se observa el comportamiento singular de la tercera autofunción que permite encontrar combinaciones lineales sencillas con un comportamiento asimétrico respecto de la masa.

La dificultad principal radica en la caracterización de los espacios con diferente regularidad a ambos lados de la masa usando sólo la propiedad

espectral descrita. Este problema fué resuelto mediante una técnica basada en la construcción de una base de Riesz para estos espacios asimétricos generada por una perturbación de ciertas combinaciones lineales de autofunciones como las presentadas en la Figura 3.

Posteriormente ensayamos con éxito este método en el problema de la viga con una masa en el interior. Para modelizar las vibraciones de la viga hemos considerado dos modelos lineales diferentes: el modelo de Timoshenko y el modelo de Euler-Bernouilli.

El modelo de Timoshenko incorpora en la ecuación un término de inercia de rotación que hace que el sistema sea hiperbólico:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma u_{xxtt}(x, t) - u_{tt}(x, t) - u_{xxxx}(x, t) = 0 & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), t > 0 \\ [u(x, t)]_{x=0} = [u_x(x, t)]_{x=0} = 0 & t > 0 \\ u_{tt}(0, t) + [u_{xxx}(x, t)]_{x=0} = 0 & t > 0 \\ u_{ttx}(0, t) - \gamma^{-1}[u_{xx}(x, t)]_{x=0} = 0 & t > 0 \\ u(-1, t) = u(1, t) = 0 & t > 0 \\ u_{xx}(-1, t) = u_{xx}(1, t) = 0 & t > 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

La constante $\gamma > 0$ es la constante de inercia de rotación. Cuando consideramos este modelo, la situación es análoga a la que se produce en el caso de la cuerda con una masa en el interior, es decir, es posible probar a partir de propiedades espectrales que el sistema está bien puesto en espacios con un orden de regularidad mayor a uno de los lados de la masa (ver [16]).

La situación es muy diferente cuando consideramos el modelo (más clásico) de Euler-Bernouilli que corresponde al caso $\gamma = 0$ en (4). Entonces, el sistema deja de ser hiperbólico y las vibraciones se propagan con velocidad infinita. La singularidad que produce la presencia de la masa no es suficiente para reducir la separación espectral asintótica de manera que se verifique la propiedad espectral (3). Este hecho permite deducir, en particular, que no existe ningún efecto regularizante de las vibraciones al atravesar la masa (ver [17]).

Por último, hemos aplicado los resultados anteriores al estudio de la controlabilidad de los sistemas descritos cuando actuamos sobre uno de los extremos. Brevemente, la controlabilidad de un sistema consiste en buscar una fuerza externa, denominada control, que actúe sobre una parte del sistema y que permita conducirlo a un estado deseado como puede ser el equilibrio. Por ejemplo, consideremos el sistema (4) con un control $q(t)$ que actúa en el extremo $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma u_{xxtt}(x, t) - u_{tt}(x, t) - u_{xxxx}(x, t) = 0 & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), t > 0 \\ [u(x, t)]_{x=0} = [u_x(x, t)]_{x=0} = 0 & t > 0 \\ u_{tt}(0, t) + [u_{xxx}(x, t)]_{x=0} = 0 & t > 0 \\ u_{ttx}(0, t) - \gamma^{-1}[u_{xx}(x, t)]_{x=0} = 0 & t > 0 \\ u(-1, t) = u(1, t) = u_{xx}(-1, t) = 0 & t > 0 \\ u_{xx}(1, t) = q(t) & t > 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

El problema de control al equilibrio puede formularse como sigue: *Dado un tiempo $T > 0$ y unos datos iniciales u_0, u_1 encontrar un control $q(t)$ tal que la*

solución del sistema (5) que satisface las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0, \quad u_t(x, 0) = u_1$$

verifique

$$u(x, T) = u_t(x, T) = 0.$$

Naturalmente la respuesta al problema de control planteado dependerá en gran medida de los espacios donde se tomen tanto el control q como los datos iniciales. Para fijar ideas supondremos que tomamos los controles en $L^2(0, T)$ y los datos iniciales en el mayor espacio para el cual existe un control $q \in L^2(0, T)$. Entonces, el problema de control se reduce a calcular este espacio de *datos iniciales controlables*.

Para estudiar la controlabilidad hemos aplicado el conocido método HUM (Hilbert Uniqueness Method) introducido por J.-L. Lions en los años 80 (ver [33]). HUM es un método de dualidad que reduce la controlabilidad de un sistema al estudio de ciertas desigualdades de observabilidad para el sistema adjunto sin control.

En general, la dificultad principal del método es probar las desigualdades de observabilidad. En el caso que estamos considerando, la controlabilidad del sistema (5) se reduce a la siguiente desigualdad para las soluciones del problema adjunto sin control (4):

$$\|(u_0, u_1)\|_F^2 \leq Cte \int_0^T |u_x(1, t)|^2 \quad (6)$$

donde F (que se define como el espacio más grande para el que se verifica (6)) es el espacio de *datos iniciales observables*.

Observamos que una desigualdad de observabilidad es una desigualdad que estima la energía total del sistema, medida en alguna norma, con la información que se puede obtener de una parte del dominio (zona de observación). En la desigualdad (6) la zona de observación es el extremo $x = 1$.

Debido a la existencia de espacios asimétricos en los que el sistema está bien puesto, el espacio F de datos observables para el sistema (4) es un espacio formado por funciones que tienen un orden más de regularidad a la izquierda de la masa. Aplicando la dualidad del método HUM se deduce inmediatamente que el espacio de datos controlables para el sistema (5) está formado por funciones que tienen un orden de regularidad menor a la izquierda de la masa. Naturalmente este efecto es debido a la presencia de la masa. En ausencia de la masa, los espacios de datos iniciales observables y controlables son completamente simétricos.

La prueba de estos resultados se realiza con una técnica basada en el desarrollo en serie de Fourier de las soluciones. Esta técnica precisa un detallado análisis de las autofunciones y algunos resultados sobre series de Fourier no armónicas (ver [14], [15], [16] y [17]). El principal inconveniente es que, por lo general, requiere que el espectro del problema esté compuesto por autovalores simples, y esto hace que se aplique casi exclusivamente en problemas unidimensionales.

3 Propagación de energía en medios muy heterogéneos

Entendemos por medios heterogéneos aquéllos que están formados por diferentes tipos de materiales, o por un mismo material pero con diferentes densidades. Un especial interés tienen aquellos medios heterogéneos que presentan una estructura periódica con un periodo ϵ muy pequeño en comparación con el tamaño del dominio que se considera. De esta forma se crean modelos de materiales con microestructura que tienen una apariencia homogénea y en los que la heterogeneidad y la estructura periódica del medio sólo son observables a un nivel microscópico.

Analizar el comportamiento de las soluciones teniendo en cuenta las leyes de comportamiento de cada uno de los materiales que originan la estructura sería un proceso muy laborioso y muchas veces impracticable. Por ello, desde el punto de vista matemático se ha desarrollado toda una teoría en torno a este tipo de estructuras conocida por "homogeneización". Con ella se pretende describir las leyes que rigen el comportamiento macroscópico de estos sistemas.

En los últimos años estos modelos heterogéneos y la teoría de la homogeneización para describirlos han sido objeto de estudios exhaustivos. Véase por ejemplo las monografías de Bensoussan - Lions - Papanicolau [8] y Oleinik - Shamaev - Yosifian [41].

Aunque la teoría de la homogeneización nos ha permitido avanzar mucho en la comprensión de la propagación de energía en este tipo de medios existen aún muchos problemas interesantes por resolver. Voy a destacar dos preguntas interesantes en este sentido:

1. ¿Cómo afecta la estructura microscópica de un material compuesto en su comportamiento macroscópico?, o más concretamente, ¿cuándo son válidas las leyes macroscópicas obtenidas por la homogeneización?
2. La homogeneización permite aproximar las soluciones de una ecuación sobre un medio muy heterogéneo. ¿Es esto suficiente para describir la distribución de energía de una solución en cualquier instante de tiempo? Si no es así, ¿Cuál es la ley de propagación de energía en estructuras muy heterogéneas compuestas de diferentes materiales?

Ambas cuestiones se presentan en muchos diseños de construcciones complejas actuales en los que un modelo macroscópico que no tenga en cuenta la interacción entre los diferentes materiales puede producir resultados erróneos.

La respuesta a las cuestiones planteadas no se conoce bien y tan sólo se han hecho estudios en casos muy particulares que además han arrojado resultados sorprendentes. En nuestro análisis hemos intentado profundizar lo más posible en este tipo de problemas manejando los modelos más sencillos.

A continuación desarrollo brevemente nuestro trabajo en este campo:

1. Acerca de la influencia de la estructura microscópica de un material compuesto en su comportamiento macroscópico

Uno de los aspectos que mejor describen la propagación de energía y que está estrechamente relacionado con la controlabilidad es la observabilidad, y en

pocas palabras establece la relación entre la energía que posee un sistema y aquélla que uno es capaz de medir desde una reducida zona del mismo durante un periodo de tiempo $T > 0$ (ver Figura 4). Concretamente, si consideramos la ecuación de ondas sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) &= 0, & x \in \Omega, & 0 < t < T, \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, & 0 < t < T, \end{aligned} \quad (7)$$

y $\omega \subset \Omega$ una región de observación, la observabilidad consiste en encontrar desigualdades del tipo

$$\int_{\Omega} [\rho(x)|u_t(x, 0)|^2 + |\nabla u(x, 0)|^2] dx \leq Cte \int_0^T \int_{\omega} [A(x)|\nabla u(x, t)|^2] dx dt, \quad (8)$$

para toda solución u de (7). Observamos que a la izquierda de esta desigualdad aparece la energía de las soluciones de (7) y a la derecha, cierta información obtenida sólo de la zona de observación ω durante un periodo de tiempo $T > 0$.

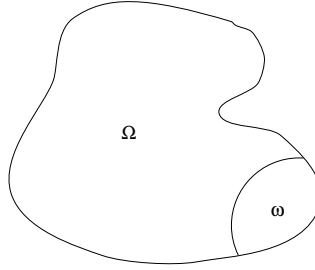


Figura 4: La observabilidad consiste en estimar la energía de un sistema mediante la que se puede observar en una pequeña región ω a lo largo de un cierto tiempo $T > 0$.

A la hora de estudiar este tipo de propiedades, las leyes macroscópicas que proporciona la homogeneización no son suficientes. Por ejemplo, se sabe que la interacción entre las ondas de alta frecuencia y la microestructura puede producir soluciones que concentran toda su energía en una parte de la frontera (ver [6] y los trabajos de G. Allaire y C. Conca [1]), es decir, se produce un cierto fenómeno de resonancia de las ondas con la microestructura.

Para ilustrar este hecho consideremos el modelo más simple formado por la ecuación de ondas unidimensional sobre un medio de densidad muy heterogénea con estructura periódica. Las ecuaciones que describen el sistema son:

$$\begin{cases} \rho^\epsilon(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x) & t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t > 0, \end{cases} \quad (9)$$

donde $\rho^\epsilon(x) = \rho(x/\epsilon)$ con $\rho(x)$ una función periódica tal que $0 < \rho_m \leq \rho(x) \leq \rho_M < \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$ un parámetro pequeño que mide el periodo de la microestructura.

El problema de autovalores asociado a (9) posee autofunciones que se concentran en los extremos. En la Figura 5 se muestra el perfil de una de estas autofunciones ϕ que se concentra exponencialmente en $x = 0$. Estas autofunciones permiten construir soluciones de (9) en variables separadas del tipo

$$u(x, t) = \cos(\sqrt{\lambda t})\phi(x),$$

que mantienen el perfil de ϕ a lo largo del tiempo. De esta forma se construyen soluciones de la ecuación de ondas (9) que están muy concentradas en el extremo $x = 0$ a lo largo del tiempo. Por supuesto, estas soluciones son muy difíciles de *observar* desde el extremo $x = 1$ y, en realidad, debido a ellas la mejor constante en la desigualdad de observabilidad (8) para el problema (9) es del orden $\exp(1/\varepsilon)$, que explota cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

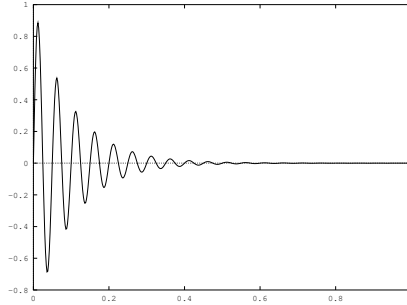


Figura 5: Comportamiento singular de algunas autofunciones de la ecuación de ondas unidimensional en un medio periódico. Se observa concentración de la energía en un extremo.

Observemos que este comportamiento singular de algunas soluciones de (9) se pierde en el problema límite. De hecho, es fácil deducir que las soluciones de (9) convergen a las del problema límite

$$\begin{cases} \bar{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x) & \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t > 0, \end{cases} \quad (10)$$

en donde la densidad oscilante se sustituye por su media $\bar{\rho} = \int_0^p \rho(x) dx$, con p el periodo de ρ . En este sistema las singularidades se propagan a través de las características con velocidad finita y no pueden existir soluciones que concentren su energía en el extremo $x = 0$ a lo largo del tiempo. La desigualdad de observabilidad (8) se cumple para el problema límite (10).

Vemos, por tanto, como el estudio del problema límite o problema homogeneizado se muestra insuficiente para detectar ciertos fenómenos como la localización de energía de las soluciones.

El análisis de este tipo de situaciones singulares constituyen la motivación principal de nuestro trabajo.

Un cuidadoso análisis espectral del sistema (9) permite acotar el rango de frecuencias que producen un efecto de resonancia con el medio. Se trata de aquellas frecuencias cuya longitud de onda coincide con la periodicidad del medio (ver Figura 6).

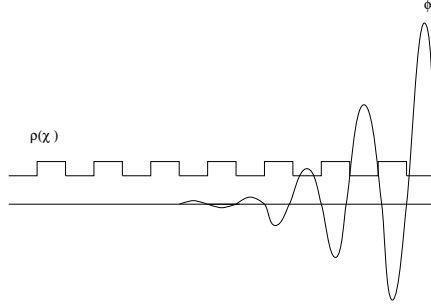


Figura 6: Sólo las autofunciones ϕ que oscilan con el mismo orden que la densidad ρ presentan fenómenos de resonancia con el medio.

Concretamente, las frecuencias mayores o menores que este rango crítico no muestran estos fenómenos de resonancia.

Para explicar este resultado introducimos el problema de autovalores asociado a (9):

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda \rho^\epsilon \varphi(x) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Para cada $\epsilon > 0$, existen un conjunto de autovalores

$$0 < \lambda_1^\epsilon < \lambda_2^\epsilon < \dots < \lambda_k^\epsilon < \dots \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

y un conjunto de autofunciones asociadas $\{\phi_k^\epsilon\}$.

El sistema límite de los sistemas (11) cuando $\epsilon \rightarrow 0$ es el siguiente:

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda \bar{\rho} \varphi(x) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

en el que se sustituye la densidad oscilante ρ^ϵ por su media $\bar{\rho}$. Los autovalores $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y autofunciones asociadas $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pueden calcularse explícitamente

$$\begin{cases} \lambda_k = \frac{k\pi}{\sqrt{\bar{\rho}}}, \\ \phi_k(x) = \text{sen}(k\pi x). \end{cases}$$

Observemos que las autofunciones del problema límite no exhiben ninguna concentración en ninguna parte del dominio.

Se sabe que los autovalores y autofunciones de los problemas (11) convergen a los del problema límite (12) cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Concretamente, se tiene el siguiente resultado (ver [41])

$$\begin{cases} |\lambda_k^\epsilon - \lambda_k| \leq c_1(k)\epsilon \\ \|\phi_k^\epsilon - \phi_k\|_{H_0^1(0,1)} \leq c_2(k)\epsilon. \end{cases} \quad (13)$$

Puesto que las autofunciones del problema límite no presentan ninguna concentración, está claro que aquellas autofunciones que se encuentren suficientemente cerca de las del problema límite no presentarán tampoco ninguna concentración. Resulta por tanto esencial conocer bien las constantes $c_1(k)$ y $c_2(k)$ en (13).

Para estudiar esta dependencia realizamos un desarrollo asintótico de los autovalores y autofunciones en función de k y ϵ con el conocido método WKB. Esto permite analizar la validez del sistema límite como aproximación de los sistemas (11). Concretamente, se obtiene

$$\begin{aligned} |\lambda_k^\epsilon - \lambda_k| &\leq c_1 k^{3/2} \epsilon \\ \|\phi_k^\epsilon - \phi_k\|_{H_0^1(0,1)} &\leq c_2 k \epsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

Observamos que los autovalores del problema límite constituyen una buena aproximación de los autovalores λ_k^ϵ si $k \leq c\epsilon^{-2/3}$. Por encima de este rango, es necesario introducir correctores a los autovalores límite para obtener una aproximación uniforme. La necesidad de introducir correctores para encontrar mejores aproximaciones de los autovalores ya se conocía desde hace tiempo (ver [30]) pero un cálculo detallado del primer corrector tan sólo se produjo recientemente para un problema similar al que estamos tratando pero con el coeficiente oscilante en la parte principal del operador (ver [42]). El método WKB proporciona una fórmula explícita para un conjunto infinito de correctores (ver [21]). Por supuesto, cada corrector mejora la convergencia, sin embargo, aún con un número infinito de correctores, sólo es posible aproximar los autovalores λ_k^ϵ por debajo del rango crítico $k \leq c\epsilon^{-1}$ con c suficientemente pequeña.

En cuanto a las autofunciones, vemos que las correspondientes al problema límite constituyen una buena aproximación a las de los problemas aproximados cuando estamos por debajo del rango crítico $k \leq c\epsilon^{-1}$ con c suficientemente pequeña.

Esto permite deducir que por debajo del rango crítico no hay autofunciones que concentren energía en un extremo del dominio.

En el caso de las bajas frecuencias G. Lebeau ha extendido recientemente el resultado de la densidad oscilante al caso de varias dimensiones usando técnicas de análisis microlocal (ver [32]).

En cuanto a las altas frecuencias, es decir aquéllas que están por encima del rango crítico, también realizamos un análisis de su comportamiento (ver [22]). En este caso, se comprueba que si $\rho \in C^2$ es periódica, los autovalores y autofunciones $(\lambda_k^\epsilon, \phi_k^\epsilon)$ del problema (11) con $k \geq c\epsilon^{-2}$ y c suficientemente grande, pueden aproximarse por los del siguiente problema:

$$\begin{cases} \phi'' + \lambda \rho_\epsilon^* \phi = 0, \\ \phi(0) = \phi(1) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

en el que la densidad oscilante se sustituye por la constante $\rho_\epsilon^* = \left(\int_0^1 \sqrt{\rho(x/\epsilon)} dx\right)^2$.

Los autovalores y autofunciones (λ_k^*, ϕ_k^*) de (15) también pueden calcularse explícitamente:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda_k^*} = \frac{k\pi}{\sqrt{\rho_\epsilon^*}}, \\ \phi_k^*(x) = \text{sen}\left(k\pi \frac{\int_0^x \sqrt{\rho(x/\epsilon)} dx}{\sqrt{\rho_\epsilon^*}}\right). \end{cases}$$

Podemos observar que las autofunciones del problema (15) no exhiben ninguna concentración de energía en los extremos del dominio y por tanto tampoco van a exhibirla las autofunciones ϕ_k^ϵ de (11) si $k \geq c\epsilon^{-2}$ con c suficientemente grande.

A medida que consideramos autofunciones ϕ_k^ϵ con k más cercano al rango crítico $k \sim \epsilon^{-1}$ se hace necesario introducir correctores para obtener aproximaciones uniformes. Cada corrector requiere una derivada más de la densidad ρ de manera que si $\rho \in C^{N+1}$, podemos encontrar una fórmula asintótica para los autovalores y las autofunciones de (11) por encima del rango $k \geq \epsilon^{-1-1/N}$. En particular, si $\rho \in C^\infty$ podemos deducir que las autofunciones de (11) no presentan ninguna concentración de energía si $k \geq c\epsilon^{-\alpha}$ con c suficientemente grande y $\alpha > 1$ cualquiera.

Nuevamente, este resultado está basado en un desarrollo asintótico de los autovalores y autofunciones mediante el método WKB similar al realizado para las bajas frecuencias.

Cabe destacar que el espectro de (11) tiene un comportamiento muy diferente para las frecuencias altas y bajas. Concretamente, mientras las bajas frecuencias se comportan como las de una ecuación con densidad constante $\bar{\rho}$, las altas frecuencias se comportan como las de una densidad $\rho_\epsilon^* \leq \bar{\rho}$. Además la igualdad sólo se da si ρ es constante. En consecuencia, las velocidades de propagación de las altas y bajas frecuencias no son iguales.

En el caso de las altas frecuencias, la complejidad del problema en varias dimensiones hace que existan muy pocos resultados en este contexto por el momento.

El caso crítico $k \sim \epsilon^{-1}$ es el más difícil de tratar y hasta el momento tan sólo hemos podido dar una descripción detallada cuando $\epsilon = 1/n$ con $n \in N$ (ver [12]). En él se mezclan autofunciones que se concentran en los extremos, autofunciones que se concentran en el interior y autofunciones que no presentan ningún tipo de concentración. Este caso también ha sido recientemente estudiado por G. Allaire y C. Conca [1], donde se propone un test para determinar las autofunciones que se concentran en una parte del dominio basado en ondas de Bloch. El test resulta válido sólo para $\epsilon = 1/n$ (ver [19]).

Finalmente, hemos aplicado los resultados espectrales al estudio de la controlabilidad del sistema (9) cuando actuamos en uno de los extremos (ver [20] que contiene resultados preliminares para las soluciones que contienen bajas frecuencias y [11] para un análisis global). Hemos probado que, si $\rho \in C^N$, las proyecciones de las soluciones sobre los subespacios generados por las autofunciones ϕ_k^ϵ con $k \leq c\epsilon^{-1}$ y $k \geq C\epsilon^{-1-1/N}$ verifican las desigualdades de observabilidad con constantes uniformes en ϵ . El método utilizado para la demostración, al igual que ocurre con el usado en los problemas híbridos

presentados en la sección anterior, está basado en el método HUM y dos propiedades espectrales:

- Separación uniforme de dos autovalores consecutivos, es decir

$$\lambda_{k+1}^\epsilon - \lambda_k^\epsilon \geq \alpha > 0.$$

- Las autofunciones no se concentran en un extremo.

Ambas propiedades se verifican para las altas y las bajas frecuencias pero dejan de verificarse en el rango crítico $k \sim \epsilon^{-1}$.

2. Acerca de la propagación de ondas en medios compuestos por materiales de diferente naturaleza

Consideramos ahora el problema de la observabilidad (y por tanto la controlabilidad) de sistemas gobernados por ecuaciones de ondas cuando los coeficientes son $C^{0,\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$. Observemos que un caso particular de estos coeficientes, con regularidad incluso menor, lo constituyen las funciones constantes a trozos que modelizan estructuras compuestas de diferentes materiales.

En este caso la propagación de energía aún no se entiende bien y ni siquiera es posible establecer una definición de rayos como medio de propagación. Cabe mencionar que la regularidad mínima de los coeficientes para poder definir rayos que se propagen según las leyes de la óptica geométrica es C^2 (ver [9]).

Como muestra de las posibles patologías que pueden producirse se sabe que es posible construir coeficientes, con la regularidad arriba indicada ($C^{0,\alpha}$), para los cuales existen soluciones que se concentran en un entorno de un punto a lo largo del tiempo. Por tanto, dichas soluciones no exhiben la propagación finita de energía característica de las ecuaciones de ondas. En otras palabras, es posible construir rayos que permanecen atrapados en torno a un punto y que no pueden escapar de un entorno del mismo (ver [23]).

Existen muchas implicaciones interesantes de este resultado que puede extenderse al caso multidimensional o la ecuación de Schrödinger. Por ejemplo, es claro que cualquier ley de propagación que se enuncie para coeficientes poco regulares debe contener soluciones que representen este tipo de rayos inmóviles.

Otra implicación interesante se refiere a las conocidas propiedades de dispersión que se ponen de manifiesto con las desigualdades de Strichartz y que resultan ser falsas en nuestros ejemplos.

4 Optimización mediante homogeneización

En esta sección presentamos un problema de diseño óptimo mediante el método de la homogeneización.

La descripción general de este tipo de problemas es la siguiente: Se considera un dominio y un conjunto de materiales diferentes con una proporción establecida a priori. *El objetivo es encontrar una distribución adecuada de los*

materiales sobre el dominio (diseño) que optimice alguna propiedad física o mecánica.

Existen una gran variedad de problemas que se adaptan al esquema anterior. Entre ellos podemos mencionar el diseño de estructuras en los que se trata de encontrar aquélla que, con una cantidad de material fija, alcance la máxima resistencia. Se trata de un caso particular en el que se considera el esquema anterior con un sólo material que se combina con el vacío.

Es claro que el diseño de estructuras es un campo interesante con muchas aplicaciones industriales. El proceso habitual que se ha seguido hasta el momento en este campo es el ensayo sucesivo de prototipos basados en la intuición de los ingenieros. Sin embargo, cada vez más, esta técnica manual se está sustituyendo por técnicas de modelización matemática y optimización que permiten un análisis mucho más eficiente.

Los esquemas numéricos que se han ensayado están basados en una representación de un diseño inicial por un conjunto de parámetros descriptivos (generalmente controles en la frontera). A continuación, se realiza un análisis basado en variaciones de estos parámetros que permita mejorar la forma inicial.

Los principales problemas a la hora de implementar estos métodos son por un lado el costo excesivo y, lo que es más grave, una fuerte dependencia tanto del diseño inicial elegido como del conjunto de parámetros elegidos para hacer variaciones.

En los últimos años se ha desarrollado un nuevo método para abordar los problemas de diseño estructural basado en la homogeneización. El origen de este método se encuentra en los trabajos de F. Murat y L. Tartar de los años 70 (ver [40]) en los que introdujeron un método para resolver problemas de optimización mediante homogeneización. La adaptación definitiva del método al diseño de estructuras es más reciente (ver, por ejemplo, [2]). A continuación describimos brevemente los puntos más importantes de este método.

Como hemos dicho, el problema típico consiste en calcular la estructura que con una cierta cantidad de materia fija aguante la mayor fuerza externa en una o varias direcciones. Desgraciadamente, este problema no suele tener solución. Esto se debe al hecho de que mecánicamente resulta más efectivo hacer varios agujeros pequeños que uno grande. De esta forma, la configuración óptima resulta ser un material con infinitos agujeros que forman una microestructura. Desde el punto de vista numérico esta situación produce una fuerte dependencia de la solución con respecto a la fineza del mallado.

La forma de solucionar este problema consiste en introducir una extensión de la noción de estructura que incluya los materiales con microestructura. Esto se consigue a través de la homogeneización que permite caracterizar las estructuras a través de sus propiedades efectivas.

La nueva noción de estructura ya no queda determinada por una función característica que distingue los puntos en los que hay materia o agujero. En su lugar aparecen dos nuevos parámetros que son la densidad de materia en cada punto y la geometría de la microestructura.

La estructura óptimal estará compuesta principalmente por material compuesto, es decir con microestructura y se hace necesario buscar una forma

de encontrar la estructura más cercana que contenga sólo materia y agujeros, es decir sin microestructuras. Una aproximación adecuada no es difícil conseguir mediante un proceso de penalización.

Nuestro trabajo ha consistido en desarrollar una generalización del método expuesto para problemas de diseño óptimo más generales en los que, en particular, aparezcan estructuras compuestas por más de un material y sistemas de ecuaciones.

La motivación física parte de un problema ya clásico en el ámbito de la energía nuclear. Se trata del problema de la repartición de combustible en el núcleo de un reactor nuclear que describimos a continuación.

El núcleo de un reactor es un medio compuesto por 157 ensamblados diferentes pero con una estructura común (ver Figura 7). Cada ensamblado contiene básicamente un conjunto de 17×17 barras de combustible rodeadas por agua. Se trata por tanto de un medio tremendamente heterogéneo.

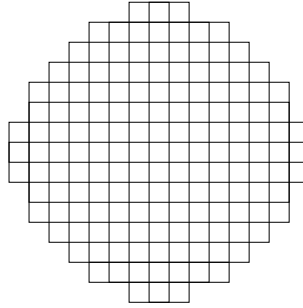


Figura 7: Estructura de la sección transversal del núcleo de un reactor con 157 ensamblados.

Para simplificar supondremos que los ensamblados son completamente homogéneos. Sin embargo, tomaremos las características físicas de cada ensamblado diferentes debido fundamentalmente al mayor desgaste del combustible en unos ensamblados que en otros.

Cada cierto tiempo se realiza un ajuste en la distribución de ensamblados en el que se remplazan aquellos que contienen el combustible más usado por otros nuevos. Desde el punto de vista técnico, es posible combinar este proceso de recambio con un proceso de permutación de ensamblados. El problema consiste en encontrar la distribución óptima de los ensamblados para que el flujo sea lo mayor y más uniforme posible. Esto hará que el rendimiento del reactor sea máximo sin peligro de que existan zonas localizadas donde el flujo se concentre creando una reacción incontrolada.

Lo ideal sería realizar el cálculo con todas las posibles configuraciones del núcleo que son $157!$ En la actualidad es imposible llevar a cabo un cálculo de esta naturaleza y por ello se han desarrollado procesos de optimización similares a los descritos para los problemas de diseño estructural en los que se hacen pequeñas

variaciones de una configuración inicial elegida. Estos métodos están aún lejos de conducir a la configuración óptima principalmente por su enorme dependencia de la configuración inicial y la dificultad para encontrar una configuración inicial lo bastante buena.

El método que hemos implementado está basado en el método descrito para el diseño de estructuras y tiene la particularidad que permite encontrar diseños óptimos que combinan más de dos materiales diferentes, a diferencia del diseño estructural en el que se combinan tan sólo materia y vacío.

La formulación matemática del problema es como sigue: Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 y consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D(x)\nabla\phi) - \Sigma(x)\phi = \lambda\sigma(x)\phi & x \in \Omega, \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16)$$

En (16) ϕ representa el flujo neutrónico, D es el coeficiente de difusión, Σ es coeficiente de absorción y σ el coeficiente de fisión. El proceso es el siguiente: Para conseguir calor se produce una reacción nuclear en la que el flujo neutrónico sufre cambios debidos a la fisión de los núcleos, la difusión del flujo y la absorción de neutrones por otros núcleos. Las ecuaciones (16) representan un modelo simplificado de este proceso en estado estacionario. El coeficiente λ es el valor mínimo para el cual existe solución de (16) y mide el equilibrio entre el aumento del flujo debido a la fisión y su disminución debida a la absorción y la difusión. Si $\lambda > 1$ el flujo tiende a decrecer y la reacción se extingue, mientras que si $\lambda < 1$ la reacción crece y puede hacerse incontrolada.

En la práctica, existen medios de reducir la reacción mediante mecanismos eficientes de control. Por ello, nuestro objetivo es maximizar el flujo, es decir, minimizar el autovalor λ . Por otro lado, la concentración de flujo puede ser peligrosa en este tipo de reacciones por lo que impondremos una restricción al flujo para que sea lo más uniforme posible. Por último, el conjunto sobre el que minimizaremos será el conjunto de coeficientes (D, Σ, σ) que representen una configuración admisible del núcleo (ver Figura 8).

Nuestro problema de diseño óptimo se reduce a minimizar el siguiente funcional:

$$\min_{(D, \Sigma, \sigma)} J(D, \Sigma, \sigma) = \lambda_1 + l \|\phi_1\| - \int_{\Omega} \phi_1 \|_{L^2(\Omega)} \quad (17)$$

donde λ_1 es el primer autovalor en (16) y ϕ_1 su autofunción asociada. Observamos que la condición sobre la uniformidad del flujo está incorporada en el funcional J mediante el multiplicador de Lagrange $l \in \mathbb{R}$ que constituye un parámetro desconocido.

El conjunto de coeficientes (D, Σ, σ) sobre el que se minimiza es el conjunto de todos aquellos coeficientes que representan una posible configuración del núcleo. Para simplificar vamos a suponer que sólo hay dos tipos de ensamblados que se encuentran caracterizados por las funciones $(d_i, \Sigma_i, \sigma_i)$ con $i = 1, 2$. De esta forma,

$$\begin{cases} D(x) = d^1\chi(x) + d^2(1 - \chi(x)), \\ \Sigma(x) = \Sigma^1\chi(x) + \Sigma^2(1 - \chi(x)), \\ \sigma(x) = \sigma^1\chi(x) + \sigma^2(1 - \chi(x)), \end{cases} \quad (18)$$

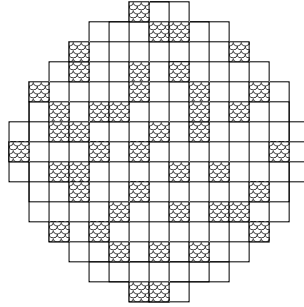


Figura 8: Posible configuración de ensamblados en un reactor.

donde $\chi(x)$ es la función característica que vale 1 en los puntos donde esta el ensamblado de tipo 1 y 0 en donde se encuentra el ensamblado de tipo 2.

Supondremos también que cada ensamblado homogéneo, es decir los coeficientes sobre cada ensamblado $(d_i, \Sigma_i, \sigma_i)$ son constantes. Por último, para que el problema no sea trivial, introducimos una restricción de volumen sobre los ensamblados, es decir $\int_{\Omega} \chi = \gamma_1$ constante.

Con estas consideraciones el problema de optimización que resolvemos es el siguiente

$$\begin{aligned} & \text{mín} && J(\chi) \\ & (\chi \text{ t.q. } \int_{\Omega} \chi = \gamma_1) \end{aligned} \tag{19}$$

Para resolver este problema, en una primera etapa introducimos una extensión del conjunto de posibles coeficientes a un conjunto continuo en el que no imponemos ninguna condición geométrica a los ensamblados. Matemáticamente, consideramos en (18) cualquier función característica χ con $\int_{\Omega} \chi(x) dx = \gamma_1$ dado, que mide la proporción de ensamblados del tipo 1 (ver Figura 9). Observemos que esta extensión transforma el espacio de configuraciones admisibles de un conjunto finito a un conjunto infinito.

Esta primera extensión no es suficiente porque nos conduce a un problema sobre un espacio no convexo, con multitud de mínimos locales, en el que es muy difícil implementar un método numérico para calcular el mínimo absoluto. Por ello, es necesario introducir una nueva extensión que contenga lo que en homogeneización se denomina medios compuestos con microestructura.

En la segunda etapa extendemos el funcional J a este nuevo conjunto de coeficientes valiéndonos de la teoría matemática de la homogeneización. Este es el proceso más delicado. La dificultad está en caracterizar todas las posibles microestructuras que se pueden obtener por combinación de varios materiales. En el caso de dos materiales este conjunto está bien caracterizado desde los años 60 (ver los trabajos de Hashin-Shtrikman [29]). En el caso de 3 o más materiales, este problema ha sido muy estudiado pero aún permanece abierto (ver [31] y [5]). Afortunadamente, no es necesaria una caracterización completa de estos materiales para resolver el problema de optimización y es posible

probar que trabajando con un conjunto más pequeño (materiales construidos por laminación) se puede alcanzar el óptimo.

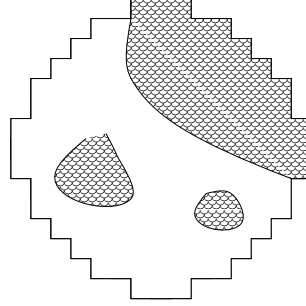


Figura 9: Posible configuración de los coeficientes tras la primera extensión que no respeta la geometría de los ensamblados.

En la tercera etapa efectuamos el proceso de minimización. El espacio sobre el que se minimiza es convexo y resulta relativamente sencillo encontrar condiciones de optimalidad para los mínimos.

Estas condiciones se implementan numéricamente sin dificultad. Para ello hemos utilizado el paquete informático PDETOOLBOX del programa matemático MATLAB que permite resolver una gran variedad de ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de elementos finitos.

Una observación importante es que el mínimo no se corresponde, en general, con una configuración real del núcleo puesto que contiene zonas con microestructura. Por ello, en la cuarta etapa intentamos reconstruir una configuración real que se encuentre próxima del mínimo. Este proceso se realiza introduciendo una penalización en el funcional de manera que aquellas partes que contengan más densidad se saturen y las que tengan menos densidad se aproximen al vacío.

Con este método hemos resuelto el problema obteniendo una configuración óptima por laminación con cuatro tipos de ensamblados (ver [3]).

En general, no sabemos si el mínimo encontrado es o no único aunque todos los ensayos que hemos realizado nos proporcionan la misma configuración final.

Seguidamente hemos aplicado nuestro método al siguiente sistema más complejo:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D_1(x)\nabla\phi) + \Sigma(x)\phi = \lambda(\sigma_1(x)\phi + \sigma_2(x)\psi) & x \in \Omega, \\ -\operatorname{div}(D_2(x)\nabla\psi) + \Sigma_2(x)\psi = \sigma_r(x)\phi & x \in \Omega, \\ \phi(x) = \psi(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (20)$$

En (20) aparecen dos tipos de flujos neutrónicos, ϕ y ψ , correspondientes a neutrones de velocidad alta y térmicos respectivamente. El modelo (20) se conoce como modelo de dos grupos y es más realista que el modelo (16).

En este caso, nuestro método tropieza con una dificultad matemática seria ya en la primera etapa. Los resultados conocidos sobre homogeneización no

permiten extender el funcional a todo el conjunto de configuraciones con microestructura porque este conjunto no está aún bien caracterizado al haber dos matrices en juego. Existen cotas optimales en ciertos casos (ver [24]) pero el problema general parece difícil de solucionar. Hemos salvado esta dificultad introduciendo una nueva hipótesis en el problema: hemos supuesto que las propiedades físicas de cada ensamblado son similares. Esta hipótesis es realista desde el punto de vista físico puesto que los ensamblados se rempazan antes de que el combustible se agote. Bajo esta nueva hipótesis es posible introducir un funcional aproximado que podemos extender a las configuraciones con microestructura (ver [4]).

5 Disipación óptima en una cuerda vibrante

En esta sección planteamos el siguiente problema: *encontrar la forma más eficaz de amortiguar las vibraciones de una cuerda vibrante sujeta en los extremos*. Para ello consideramos mecanismos pasivos, es decir mecanismos de disipación distribuidos sobre la longitud de la cuerda, como puede ser el rozamiento con un medio externo.

Sea $u(x, t)$ el desplazamiento de una cuerda vibrante de longitud 1, fija en sus extremos y en presencia de un amortiguamiento distribuido $2a(x)$. Se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + 2a(x)u_t(x, t) &= 0, & 0 < x < 1, & 0 < t, \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, & 0 < t, \end{aligned} \quad (21)$$

junto con las ecuaciones del estado inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x). \quad (22)$$

Es bien conocido que dado un coeficiente positivo $a \in L^\infty(0, 1)$ la energía viene dada por

$$E(t) \equiv \int_0^1 u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t) dx$$

y verifica $E(t) \leq CE(0)e^{2\omega t}$ con $C > 0$ y $\omega < 0$, independiente del dato inicial. Al menor de tales ω ,

$$\omega(a) \equiv \inf \left\{ \omega : \exists C(\omega) > 0 \text{ s.t. } E(t) \leq CE(0)e^{2\omega t}, \right. \\ \left. \text{para cada solución de energía finita de (1.1)} \right\}$$

se le conoce como **tasa de decaimiento** asociada a a .

Buscamos el coeficiente a que produzca la mínima tasa de decaimiento.

De forma intuitiva parece que la disipación constante $a = a_0$ es la mejor forma de amortiguar. Sin embargo, se observa que al elegir la disipación constante no parece cierto el hecho de que 'más es mejor'. Es decir, una mayor disipación en la cuerda no produce, en general, una mayor tasa de decaimiento. Concretamente, cuando $a = a_0$ constante, al aumentar a_0 hasta el valor π la

tasa de decaimiento decrece. Sin embargo, a partir de este valor crítico la tasa de decaimiento comienza a crecer rápidamente (ver por ejemplo [26]).

Este hecho sorprendente es conocido como *overdamping*. En la Figura 10 se ilustra este fenómeno tomando una cuerda vibrante sometida a un rozamiento constante en toda su extensión. Se puede apreciar como el fuerte rozamiento hace que el primer modo de vibración apenas se mueva y tarde un tiempo muy largo en amortiguarse.

A pesar de todo, durante mucho tiempo se pensó que la distribución constante de rozamiento a lo largo de la cuerda era la mejor forma de amortiguar. De esta forma, el fenómeno del *overdamping* proporcionaba un límite a la cantidad de rozamiento que debemos utilizar para obtener una tasa de decaimiento óptima. Apoyando esta conjetura S. Cox y M. Overton [25] mostraron además que la constante óptima es un mínimo local entre todas las posibles distribuciones de rozamiento. Sin embargo, P. Freitas ([27]) daba posteriormente algunos ejemplos numéricos que mostraban evidencias de disipaciones no constantes que mejoraban la disipación constante óptima.

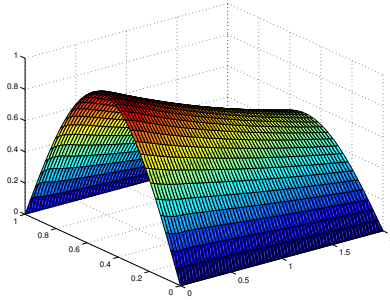


Figura 10: Desplazamiento $u(x, t)$ de una cuerda vibrante que ocupa el intervalo $(0, 1)$ a lo largo del tiempo $0 < t < 2$ con un fuerte rozamiento uniformemente distribuido.

Nuestro estudio resolvió de forma negativa esta conjetura (ver [13]). Existen formas mejores de amortiguamiento que la distribución constante de rozamiento. Concretamente se tiene el siguiente resultado:

Si $a_n(x) = 1/(x + 1/n)$ entonces $\omega(a_n) \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Todavía más sorprendente es el hecho de que cuando $n \rightarrow \infty$, las disipaciones $a_n(x) \rightarrow 1/x \notin BV(0, 1)$ y en este caso las soluciones se extinguen en tiempo finito (ver Figura 11). Concretamente, si $a(x) = 1/x$, dado cualquier dato inicial $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ la solución $u(x, t)$ de (21)-(22) satisface

$$u(x, t) = u_t(x, t) = 0, \quad \forall t > 2. \quad (23)$$

La demostración de estos resultados está basada en dos hechos fundamentales: Por un lado, la tasa de decaimiento puede caracterizarse mediante la abscisa espectral del problema de autovalores asociado a la ecuación

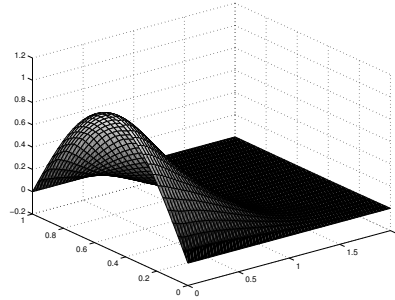


Figura 11: Amortiguamiento de una cuerda vibrante con un rozamiento localizado en el extremo izquierdo del tipo $a(x) = 1/x$.

amortiguada. En segundo lugar, un estudio cuidadoso del espectro muestra que la abscisa espectral se hace cada vez más negativa a medida que tomamos $a(x) = 1/(x+c)$ con $c > 0$ más pequeño. En el caso en que $c = 0$ un argumento directo basado en la transformada de Laplace muestra que no hay autovalores del problema asociado.

6 Conclusiones

Sistemas híbridos: Hemos visto que se pueden caracterizar en términos de series de Fourier espacios asimétricos en los que los modelos híbridos están bien puestos o, en su caso, ver que estos espacios no existen. Para ello es necesario un análisis riguroso del comportamiento asintótico del espectro a altas frecuencias y en particular, un análisis de la distancia espectral asintótica.

Además, hemos deducido algunas consecuencias correspondientes en lo que respecta a la propagación, observación y control de ondas en estos modelos.

El análisis de estos fenómenos en varias dimensiones espaciales o en modelos no lineales son temas mucho más complejos y sobre los que apenas hay resultados. Es de esperar que los fenómenos descritos tengan su análogo en varias dimensiones.

Propagación de ondas en medios heterogéneos: Hemos planteado el problema de la propagación de ondas en un medio muy heterogéneo con estructura periódica de periodo $\epsilon \rightarrow 0$ en una dimensión de espacio.

El análisis realizado proporciona una descripción detallada de algunas situaciones singulares que se producen. Hemos visto que existe un valor crítico ϵ , que coincide con el periodo de la estructura, de forma que las soluciones que contienen frecuencias con longitud de onda mayor o menor que ϵ no presentan ningún fenómeno de localización de energía. En cambio, aquellas soluciones que contienen frecuencias del orden de ϵ pueden producir resonancia con la estructura creando localización de energía en uno de los extremos del dominio.

Estos resultados se pueden aplicar para obtener condiciones observabilidad

y control, uniformes en ϵ , de las soluciones con frecuencias de longitud de onda mayor y menor que ϵ , es decir, aquellas que no presentan resonancia.

Por último hemos expuesto el tipo de patologías que se pueden esperar en el comportamiento de estructuras muy heterogéneas compuestas por diferentes materiales. En particular, hemos visto que pueden existir ondas que no se propaguen en ninguna dirección. Cabe destacar que un resultado similar en la ecuación del calor constituye un problema de gran interés que no se conoce.

Diseño óptimo mediante homogeneización: Hemos planteado un problema de diseño óptimo motivado por su aplicación dentro del campo de la energía nuclear.

El método que hemos utilizado para resolverlo está basado en un planteamiento similar en el diseño de estructuras. Este método se basa en el uso de la homogeneización para encontrar una adecuada relajación del problema de optimización que generalmente está mal puesto.

La aportación principal consiste en una generalización del método de la homogeneización a sistemas de ecuaciones no necesariamente autoadjuntos, y que permite combinar más de un material bajo la hipótesis adicional de que todos los materiales sean similares.

Disipación óptima en una cuerda vibrante: Hemos visto que existen formas de repartir la disipación en una cuerda vibrante que producen una tasa de decaimiento arbitraria. Incluso existe una disipación, que no está acotada, y que produce extinción en tiempo finito de las soluciones. Este hecho responde negativamente a la conjetura que establecía que la constante es la mejor forma de disipación en una cuerda vibrante.

El resultado está basado en un cálculo explícito. Sería interesante probar un resultado similar en dimensión mayor que uno y en otros sistemas similares como en la ecuación de vigas.

Agradecimientos

La mayor parte del trabajo presentado en este artículo es fruto de sucesivas colaboraciones con E. Zuazua (Director de Tesis), G. Allaire (Director de trabajo durante una estancia postdoctoral en el centro de investigación 'Commissariat à l'Energie Atomique' (CEA) en Francia) y S. Cox. Desearía agradecerles su acogida y disposición.

Referencias

- [1] G. Allaire y C. Conca, Analyse Asymptotique Spectrale de l'Equation des ondes. Homogénéisation par ondes de Bloch, C.R. Acad. Sci. Paris, **321**, Série I (1991), 293-298 y 557-562.
- [2] G. Allaire, E. Bonnetier, G. Franfort y F. Jouve, Shape Optimization by the Homogenization Method, Numerische Mathematik **76** (1997), 27-68.

- [3] G. Allaire y C. Castro, A new approach for the optimal distribution of assemblies in a nuclear reactor, *Numerische mathematik*, **89** (1) (2001), 1-29.
- [4] G. Allaire y C. Castro, Optimization of nuclear fuel reloading by the homogenization method, *Structural and multidisciplinary optimization*, por aparecer.
- [5] G. Allaire y V. Kohn, Optimal Design for Minimum Weigh and Compliance in Plane Stress using Extremal Microstructures, *Eurp. J. Mech. A/Solids*, **12**, 6 (1993), 839-878.
- [6] M. Avellaneda, C. Bardos y J. Rauch, Contrôllabilité Exacte, Homogénéisation et Localization d'ondes dans un milieu non-homogène, *Asymptotic Analysis*, **5** (1992), 481-494.
- [7] H.T. Banks, W. Fang, R.J. Silcox y R.C. Smith, Approximation Methods for Control of Acoustic/Structure Models with Piezoceramic Actuators, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **4** (1993), 98-116.
- [8] A. Bensoussan, J.-L. Lions y G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Studies in Mathematics and its Applications, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [9] N. Burq, Contrôllabilité exacte des ondes dans des ouverts peu réguliers, *Asymptot. Anal.* **14** (2) (1997), 157-191.
- [10] C. Castro, Asymptotic analysis and control of a hybrid system composed by two vibrating strings connected by a point mass, *Control, Optimisation and Calculus of Variations (ESAIM COCV)*, <http://www.emath.fr/cocv/>, Vol 2 (1997), 231-280.
- [11] C. Castro, Boundary controllability of the one-dimensional wave equation with rapidly oscillating density, *Asymptotic Analysis* **20** (1999), 317-350.
- [12] C. Castro, Some controllability results in the one-dimensional wave equation with oscillating density, en preparación.
- [13] C. Castro y S. J. Cox, Achieving arbitrarily large decay in the damped wave equation, *SIAM J. Control Optim.* **39** (6), 1748-1755, 2001.
- [14] C. Castro y E. Zuazua, Analyse spectrale et contrôle d'un système hybride composé de deux poutres connectées par une masse ponctuelle, *C. R. Acad. Sci. de Paris*, t. 322, Série I, 351-356, 1996.
- [15] C. Castro y E. Zuazua, Une remarque sur les séries de Fourier non-harmoniques et son application à la contrôllabilité des cordes avec densité singulière, *C. R. Acad. Sci. de Paris*, t. 323, Série I, 365-370, 1996.

- [16] C. Castro y E. Zuazua, A hybrid system consisting of two flexible beams connected by a point mass: spectral analysis and well-posedness in asymmetric spaces, en *Elasticité , Viscoelasticité et Contrôle Optimal. Aspects Theoretiques et Numeriques*, J. Blum and A. Raoult eds., ESAIM Proceedings, **2** (1997), 17-53, <http://www.emath.fr>.
- [17] C. Castro y E. Zuazua, Boundary controllability of a hybrid system consisting in two flexible beams connected by a point mass, *SIAM J. Control and Optim.* **36**, 5 (1998), 1576-1595.
- [18] C. Castro y E. Zuazua, Exact boundary controllability of two Euler-Bernoulli beams connected by a point mass, *Mathematical & Computer Modelling.* **32** (2000), 955-969.
- [19] C. Castro y E. Zuazua, Une remarque sur l'analyse asymptotique spectrale en homogénéisation, *C. R. Acad. Sci. de Paris*, t. 322, Série I, 1043-1047, 1996.
- [20] C. Castro y E. Zuazua, Contrôlabilité de l'équation des ondes à densité rapidement oscillante à une dimension d'espace, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 324, Série I, 1237-1242, 1997.
- [21] C. Castro y E. Zuazua, Low frequency asymptotic analysis of a string with rapidly oscillating density, *SIAM J. Appl. Math.*, **60** (2000), 1205-1233.
- [22] C. Castro y E. Zuazua, High frequency asymptotic analysis of a string with rapidly oscillating density, *European J. Appl. Math.*, **11** (2000), 592-622.
- [23] C. Castro y E. Zuazua, Concentration and lack of observability of waves in highly heterogeneous media, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, por aparecer.
- [24] A.V. Cherkaev y L.V. Gibiansky, The exact coupled bounds for effective tensors of electrical and magnetic properties of two-components two-dimensional composites, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **122 A** (1992), 93-125.
- [25] S. J. Cox y M. L. Overton, Perturbing the Critically Damped Wave Equation, *SIAM J. Appl. Math.* 56(5) (1996), pp. 1353-1362.
- [26] S. J. Cox y E. Zuazua, The Rate at Which Energy Decays in a Damped String, *Commun. in Partial Differential Equations*, Vol. 19, Nos. 1& 2 (1994), pp. 213-243.
- [27] P. Freitas, Optimizing the rate of decay of solutions of the wave equation using genetic algorithms: a counterexample to the constant damping conjecture, *SIAM J. Control & Optim.* 37(2) (1999), pp. 376-387.
- [28] S. Hansen y E. Zuazua, Exact Controllability and Stabilization of a Vibrating String with an interior Point Mass, *SIAM J. Control Optim.*, **33**, 5 (1995), 1357-1391.

- [29] Z. Hashin y S. Shtrikman, A Variational Approach to the Theory of Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials, *J. Appl. Phys.* **33** (1962), 3125-3131.
- [30] S. Kesavan, Homogenization of Elliptic Eigenvalue Problems, *Appl. Math. Optim.*, **5** (1979), 153-167 y 197-216.
- [31] V. Kohn, The Two-well Problem, por aparecer en *Proc. Royal Soc. Edinburgh*.
- [32] G. Lebeau, The wave equation with oscillating density: observability at low frequency, *ESAIM Control, Optimization and Calculus of variations*, **5** (2000), pp. 219.
- [33] J.-L. Lions, *Contrôlabilité Exacte, Stabilization et Perturbations de Systèmes Distribués*, Tomos 1 y 2, Masson RMA8, Paris, 1988.
- [34] W. Littman y L. Marcus, Stabilization of a Hybrid System of Elasticity by Feedback Boundary Damping, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **CLII**, 4 (1988), 281-330.
- [35] W. Littman y L. Marcus, Exact Boundary Controllability of a Hybrid System of Elasticity, *Archive Rat. Mech.*, **103**, 3 (1998), 193-236.
- [36] W. Littman y L. Marcus, *Some Recent Results on Control and Stabilization of Flexible Structures*, Univ. Minn., Mathematics Report, 1988.
- [37] E.B. Lee and Y.C. You, Stabilization of a hybrid (string/point mass) System, *Proc. Fifth Int. Conf. on Systems Engineering*, Dayton, Ohio (Sep. 1987).
- [38] S. Micu y E. Zuazua, Asymptotics for the Spectrum of a Fluid/Structure Hybrid System Arising in the Control of Noise. *SIAM J. Math. Anal.* **29**, 4 (1997), 967-1001.
- [39] S. Micu y E. Zuazua, Boundary Controllability of a Linear Hybrid System Arising in the Control of Noise, *SIAM J. Control Optim.*, **35**, 5 (1997), 1614-1637.
- [40] F. Murat y L. Tartar, Calcul des Variations et Homogénéisation, en *Les Méthodes de l'Homogénéisation: Théorie et Applications en Physique*, Eyrolles, 319-369 (1985).
- [41] O.A. Oleinik, A.S. Shamaev y B.A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North Holland, 1992.
- [42] F. Santosa y M. Vogelius, First-order Corrections to the Homogenized Eigenvalues of a Periodic Composite Medium, *SIAM J. Appl. Math.*, **53** (1993), 1636-1668.