Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^{o}20(2002), 77–96

Series asintóticas en el análisis numérico de métodos de contorno

F.J. Sayas

Departamento de Matemática Aplicada,
Centro Politécnico Superior, Universidad de Zaragoza

jsayas@posta.unizar.es

The man that hath no music in himself
Nor is not moved with concord of sweet sounds,
Is fit for treasons, stratagems and spoils;
The motions of his spirit are dull as night
And his affections dark as Erebus:
Let no such man be trusted.
The Merchant of Venice

A Michel Crouzeix y Francisco Lisbona,
ejemplares y amigables maestros

Resumen

En este trabajo, se exponen técnicas basadas en desarrollos asintóticos para el análisis de distintos métodos numéricos para ecuaciones integrales de frontera. El análisis en series asintóticas intenta conocer de golpe el comportamiento completo de la convergencia del método para acceder de forma eficaz a propiedades de superconvergencia, ya sea puntual o bajo la acción de operadores regularizantes. Aún más, la disponibilidad de desarrollos asintóticos del error en potencias del parámetro de discretización permite aplicar estrategias de extrapolación de Richardson tanto para realizar estimaciones a posteriori del error cometido como para acelerar la convergencia del método.

La exposición que sigue realiza un revisión de trabajos realizados por el autor en colaboración con Michel Crouzeix, Ricardo Celorrio y Víctor Domínguez [5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 23, 25]. En parte se asume el enfoque de los últimos trabajos sobre los primeros, por lo que la visión de una parte de los resultados se aleja del original.

Advertencia notacional. A lo largo de esta exposición se emplean de forma sistemática las series formales (o series asintóticas) ya sea en potencias del parámetro h que controla el nivel de discretización, como en un sentido de operadores. Todo ello se puede justificar de forma rigurosa, analizando el resto resultante de restar una suma parcial cualquiera. No obstante, las series son en general no convergentes. Siguiendo costumbre de análisis numérico, C denotará una constante independiente del parámetro de discretización h y de las funciones por cuyas normas esté multiplicada. El símbolo de Landau $\mathcal{O}(h)$ se utiliza en forma estándar. $\square$

1. Una ecuación integral

En las próximas secciones vamos a plantear la resolución numérica de una sencilla familia de ecuaciones integrales periódicas [29, 32]:

$$-\int_0^1 \log\left(4e^{-1}\,\mathrm{sen}^2(\pi(\,\cdot\,-t))\right) g(t)dt + \int_0^1 K(\,\cdot\,,t)g(t)dt = f. \tag{1}$$

Suponemos que el dato $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función 1–periódica (diremos simplemente periódica) regular y que $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^\infty$ y periódica en ambas variables. Siguiendo costumbre en teoría de operadores, damos nombre a todos los elementos:

$$\Lambda g := -\int_0^1 \log\left(4e^{-1}\,\mathrm{sen}^2(\pi(\,\cdot\,-t))\right) g(t)dt, \qquad Kg := \int_0^1 K(\,\cdot\,,t)g(t)dt, \tag{2}$$
$$Vg := \Lambda g + Kg,$$

con lo que (1) se escribe en la conveniente forma $Vg = f$. El signo negativo de Λ (similar al que se coloca al laplaciano) obedece a razones de definición positiva del operador que luego veremos.

Ejemplo. Sea Γ una curva simple regular parametrizable del plano y sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \Gamma$ una parametrización periódica $\mathcal{C}^\infty$ de la misma:

$$\mathbf{x}(s) \neq \mathbf{x}(t), \qquad s - t \notin \mathbb{Z}, \qquad |\mathbf{x}'(s)| \neq 0.$$

Entonces el operador

$$Vg := -\int_0^1 \log|\mathbf{x}(\,\cdot\,) - \mathbf{x}(t)|^2 g(t)dt, \tag{3}$$

admite una descomposición $V = \Lambda + K$. Más aún, Λ es el caso particular de tomar Γ una circunferencia de radio $\exp(-1/2)$ (el centro es irrelevante) con la parametrización a velocidad constante. La ecuación

$$Vg = f \tag{4}$$

recibe el nombre de ecuación de Symm y aparece en muy diversos contextos como teoría de potencial, transformación conforme, etc. Si $u_0 : \Gamma \to \mathbb{R}$ es una función conocida y tomamos $f(s) := u_0(\mathbf{x}(s))$, la solución de (4) sirve para dar una solución del problema

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^2\backslash\Gamma, \qquad u|_\Gamma = u_0$$

vía la representación en potencial de capa simple

$$u(\mathbf{z}) := -\int_0^1 \log|\mathbf{z}-\mathbf{x}(t)|^2 g(t)dt, \qquad \mathbf{z}\in\mathbb{R}^2\backslash\Gamma. \tag{5}$$

Este procedimiento recibe el nombre de un método de contorno o formulación integral de frontera. Básicamente consiste en resolver un problema de contorno (incluso en un dominio exterior) mediante una fórmula que representa a la solución desde la frontera y una ecuación integral en la frontera que liga las incógnitas y las condiciones de contorno. □

Marco funcional

De forma muy natural, el operador Λ, llamado operador de Bessel [32], crea el marco funcional necesario. Si consideramos los monomios trigonométricos

$$\phi_n(t) := \exp(2\pi n\imath t), \qquad n\in\mathbb{Z}$$

se puede conprobar que

$$\Lambda\phi_n = \left| \begin{array}{ll} \phi_0, & n=0, \\ \dfrac{1}{|n|}\phi_n, & n\neq 0. \end{array} \right.$$

Esto es común a todos los operadores de convolución periódicos: los monomios son vectores propios y los valores propios son los coeficientes de Fourier del núcleo, en este caso $\log(4e^{-1}\operatorname{sen}^2(\pi t))$.

Así resulta relativamente natural estudiar el operador Λ en los espacios de Sobolev periódicos. Para $r\in\mathbb{R}$ se llama H^r a la compleción del conjunto de los polinomios trigonométricos con la norma prehilbertiana

$$\|u\|_r := \left[|\widehat{u}(0)|^2 + \sum_{n\neq 0} |n|^{2r}|\widehat{u}(n)|^2 \right]^{1/2},$$

siendo $\widehat{u}(n)$ los coeficientes del polinomio en base de monomios, esto es, lo coeficientes de Fourier

$$\widehat{u}(n) = \int_0^1 u(t)\phi_{-n}(t)dt.$$

Bastantes propiedades de estos espacios son bien conocidas [19, 23, 32]. Por un lado H^0 es identificable a $L^2(0,1)$, siendo sus normas iguales. La identificación consiste en que nuestros elementos son periódicos, y los de L^2 se miran sobre un único período. De la misma forma, para k entero positivo H^k es identificable al subespacio de $H^k(0,1)$ con condiciones periódicas. En general, todos los espacios H^r se pueden considerar como espacios de distribuciones periódicas en $\mathbb{R}$ y cumplen que $H^r\subset H^{r'}$ para todo $r>r'$ con inyección compacta y densa.

Es inmediato observar que Λ define un isomorfismo isométrico $H^r \to H^{r+1}$ para todo r:

$$\Lambda u = \widehat{u}(0) + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{|n|}\widehat{u}(n)\phi_n. \tag{6}$$

Por ser continuo de H^r en H^{r+1} para todo r, se dice que Λ es un operador pseudodiferencial de orden -1. El operador integral K define un operador compacto de H^r en $H^{r'}$ para cualesquiera r, r'. Por tanto,

$$V := \Lambda + K$$

es la perturbación compacta de un operador inversible, esto es, es un operador de Fredholm de índice cero [19], luego su invertibilidad equivale a su inyectividad.

Más aún, el producto escalar de H^0

$$(u, v)_0 = \sum_n \widehat{u}(n)\overline{\widehat{v}(n)} = \int_0^1 u(t)\overline{v(t)}dt$$

admite (en su expresión como serie) una extensión a $u \in H^r$, $v \in H^{-r}$ para todo r. Esta forma sesquilineal da una representación recíproca de la dualidad de ambos espacios, de forma que podemos entender que H^{-r} es el dual de H^r y viceversa.

Una rápida operación sobre la forma Fourier de Λ nos demuestra que

$$(\Lambda u, u)_0 = \|u\|^2_{-1/2}, \qquad \forall u \in H^{-1/2}, \tag{7}$$

esto es, Λ es elíptico en $H^{-1/2}$.

2. Splines y métodos de Galerkin

Tomemos ahora un mallado uniforme de $\mathbb{R}$

$$h := 1/N, \qquad x_j := j\, h, \quad j \in \mathbb{Z}$$

y consideremos el espacio S_h^d de los splines periódicos regulares con nudos en el mallado $\{x_j | j \in \mathbb{Z}\}$. Es decir, S_h^0 es simplemente el espacio de las funciones constantes a trozos periódicas. Para $d \geq 1$,

$$S_h^d = \{u_h \in \mathcal{C}^{d-1} | u_h(1 + \cdot\,) = u_h, u_h|_{(x_{j-1},x_j)} \in \mathbb{P}_d,\ \forall j\}$$

($\mathbb{P}_d$ es el espacio de los polinomios de grado d).

El correspondiente método de Galerkin para resolver la ecuación

$$Vg = f,$$

consiste en [18, 27, 29, 31]

$$g_h \in S_h^d, \qquad (Vg_h, r_h)_0 = (f, r_h)_0, \qquad \forall r_h \in S_h^d. \tag{8}$$

Dadas las propiedades de V se tiene que si V es inyectivo, entonces (8) tiene solución única para h suficientemente pequeño, y el método es estable en norma $H^{-1/2}$,

$$\|g_h\|_{-1/2} \leq C\|g\|_{-1/2}.$$

Además se pueden obtener una familia de cotas [18, 31]

$$\|g - g_h\|_s \leq Ch^{t-s}\|g\|_t \tag{9}$$

cuando

$$-2 - d \leq s \leq t \leq d + 1, \qquad s < d + 1/2, \qquad -1/2 \leq t.$$

Nota. Las cotas en normas más débiles son particularmente útiles a la hora de pensar en métodos de elementos de contorno. Si resolvemos la ecuación asociada al operador (3) con el método precedente (y la solución exacta $g \in H^{d+1}$), al definir el potencial aproximado

$$u_h(\mathbf{z}) := -\int_0^1 \log|\mathbf{z} - \mathbf{x}(t)|^2 g_h(t)dt$$

entonces

$$|u_h(\mathbf{z}) - u(\mathbf{z})| = \mathcal{O}(h^{2d+3}) \tag{10}$$

uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^2\backslash\Gamma$, ya que nos beneficiamos de la cota en la norma más débil que sea accesible en (9), con $s = -2 - d$. □

3. Series asintóticas asociadas a la discretización

Vamos a limitar momentáneamente nuestra atención al caso más simple, el de las constantes a trozos ($d = 0$). Por el desarrollo de Taylor tenemos que si $z_j := (x_{j-1} + x_j)/2$ es el punto medio de cada intervalo donde el spline es un polinomio

$$g(s) - g(z_j) \sim \sum_{k\geq 1} h^k g^{(k)}(s) \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\left(\frac{s}{h} + \frac{1}{2} - j\right)^k, \tag{11}$$

uniformemente en el intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ y en j. En (11) hemos empleado la tradicional notación asintótica $\sim$ que indica que si interrumpimos la suma en $k = m$, el resto funciona como un $\mathcal{O}(h^{m+1})$, sin que la serie deba ser convergente. Consideremos entonces la función periódica dada en el intervalo $[0, 1)$ por la expresión

$$\underline{P}_k(t) := \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\left(t - \frac{1}{2}\right)^k, \qquad t \in [0, 1).$$

Sea $Q_h g \in S_h^0$ el interpolado de g en los puntos medios, esto es

$$Q_h g = \sum_{j=0}^{N-1} g(z_j)\chi_j$$

siendo χ_j las extensiones periódicas de la funciones características de (x_{j-1}, x_j) y por tanto una base para S_h^0. Entonces es fácil reescribir (11) en la forma más compacta

$$g - Q_h g \sim \sum_{k\geq 1} h^k \underline{P}_k(\,\cdot\,/h) g^{(k)} \tag{12}$$

uniformemente en $\mathbb{R}$.

Aplicando el operador K a lo anterior se obtiene

$$K(g-Q_h g) = \int_0^1 K(\,\cdot\,,t)(g(t)-Q_h g(t))dt \sim \sum_{k\geq 1} h^k \int_0^1 K(\,\cdot\,,t) g^{(k)}(t) \underline{P}_k(t/h)dt.$$

Ahora bien, cada integral en $(0,1)$ se puede descomponer en N trozos que, con el cambio de variable $t = x_j + \theta h$ son llevados de nuevo a $(0,1)$ y aplicando que $\underline{P}_k(\,\cdot\,/h)$ es $h-$periódica

$$\int_0^1 K(\,\cdot\,,t) g^{(k)}(t) \underline{P}_k(t/h)dt = \int_0^1 \underline{P}_k(\theta) \left[h \sum_{j=0}^{N-1} K(\,\cdot\,, x_j + \theta h) g^{(k)}(x_j + \theta h) \right] d\theta.$$

Es bien sabido [19] que las sumas de Riemann sobre particiones uniformes son asintóticamente óptimas para funciones $\mathcal{C}^\infty$

$$h \sum_{j=0}^{N-1} a(x_j + \theta h) \sim \int_0^1 a(t)dt,$$

uniformemente en θ (este error es incluso decreciente como $\exp(-\sigma N)$ cuando a es analítica). Por tanto, llegamos a nuestra primera expresión asintótica importante:

$$K(g - Q_h g) \sim \sum_{k\geq 1} h^k \alpha_k K g^{(k)} \tag{13}$$

donde

$$\alpha_k := \int_0^1 \underline{P}_k(\theta)d\theta$$

son nulos para k impar, luego en (13) sólo hay potencias pares de h.

La parte correspondiente al operador de Bessel no es tan simple. Haciendo como antes llegamos a

$$\Lambda(g-Q_h g) \sim \sum_{k\geq 1} h^k \int_0^1 \underline{P}_k(\theta) \left[h \sum_{j=0}^{N-1} \log\left(\operatorname{sen}^2(\pi(x_j + \theta h - \,\cdot\,))\right) g^{(k)}(x_j + \theta h) \right] d\theta$$

luego estamos obligados a estudiar sumas de Riemann de funciones con singularidad logarítmica.

Siendo que la función tiene una singularidad, la fórmula de Euler–Maclaurin ya no es válida. Sin embargo disponemos de una forma modificada de la misma (de nuevo en el caso periódico): si $u(t) := v(t)\log(\mathrm{sen}^2(\pi t))$, entonces [5]

$$h\sum_{j=0}^{N-1} u(x_j+\theta h) - \int_0^1 u(t)dt \sim \sum_{m\geq 0} h^{m+1} D_m(\theta) v^{(m)}(0), \tag{14}$$

siendo D_k determinadas funciones periódicas relacionadas con la función zeta de Riemann. Obviamente (14) quiere decir que asintóticamente todo el error viene dado por el comportamiento de u en su singularidad. Notemos también que $\theta \in \mathbb{Z}$ da un valor infinito en la suma de la izquierda. De hecho D_0 asume este valor y la serie asintótica anterior es uniforme en $\theta \in \mathbb{R}$. Aplicando ahora (14) a $u(t) := g^{(k)}(t+s)\log(\mathrm{sen}^2(\pi t))$ se tiene

$$\begin{aligned} h\sum_{j=0}^{N-1} \log\left(\mathrm{sen}^2(\pi(x_j+\theta h - s))\right) g^{(k)}(x_j+\theta h) \\ \sim \Lambda g^{(k)}(s) + \sum_{m\geq 0} h^{m+1} D_m(\theta + \frac{s}{h}) g^{(k+m)}(s) \end{aligned} \tag{15}$$

uniformemente en s y θ, luego

$$\Lambda(g - Q_h g) \sim \sum_{k\geq 1} h^k \left[\alpha_k \Lambda g^{(k)} + \sum_{m\geq 0} h^{m+1} \alpha_{k,m}(\,\cdot\,/h) g^{(k+m)}\right]$$

siendo

$$\alpha_{k,m}(t) := \int_0^1 \underline{P}_k(\theta) D_m(\theta+t)d\theta.$$

Agrupando términos y añadiendo la contribución de K (13) se obtiene un desarrollo

$$V(g - Q_h g) \sim \sum_{k\geq 1} \alpha_{2k} h^{2k} V g^{(2k)} + \sum_{k\geq 2} h^k \beta_k(\,\cdot\,/h) g^{(k-1)}. \tag{16}$$

Las funciones β_k son periódicas pero no regulares y de hecho el factor $\beta_k(\,\cdot\,/h)$ es $h-$periódico y crea una rugosidad sobre el por otra parte simple desarrollo precedente. Notemos también que con la potencia h^k hay siempre un operador de orden $k-1$.

A partir de este punto el análisis debe ser proyectado sobre un espacio discreto, ya sea ortogonalmente (Galerkin), ya sea por evaluación (colocación).

4. Aplicación al método de Galerkin

Si pretendemos estudiar el error del método de Galerkin, hemos de concentrarnos en productos

$$(\beta(\,\cdot\,/h)f, r_h)_0 = \int_0^1 \beta(\theta)\left[h\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j+\theta h)\overline{r}_h(x_j+\theta h)\right] d\theta. \tag{17}$$

De nuevo nos encontramos ante sumas de Riemann uniformes, esta vez para el producto de una función regular por un spline (función decididamente no regular). Se puede demostrar [16] que uniformemente en θ

$$h\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j+\theta h)\overline{r}_h(x_j+\theta h) \sim (f,r_h)_0 + \sum_{k\geq 1} h^k \frac{1}{k!} B_k(\theta)(f^{(k)},r_h)_0 \tag{18}$$

siendo B_k el $k-$ésimo polinomio de Bernoulli [1], lo que no es más que una relectura de la fórmula de Euler–Maclaurin.

Denotemos por $G_h g = g_h$ a la solución de las ecuaciones del método de Galerkin cuando g es la solución, de modo que

$$(Vg,r_h)_0 = (VG_h g, r_h)_0, \qquad \forall r_h \in S_h^0.$$

A partir de (16), (17) y (18) se demuestra que

$$(V(G_h g - Q_h g), r_h)_0 = (V(g-Q_h g), r_h)_0 \sim \sum_{k\geq 2} h^k (R_k g, r_h)_0 \tag{19}$$

uniformemente en $\|r_h\|_{-1/2}=1$, siendo R_k operadores pseudodiferenciales de orden $k-1$, con $R_2 = \alpha_2 V D^2$.

Recordemos que la estabilidad de un método de Galerkin se puede escribir en forma de condición de Babuška–Brezzi [11, 31]

$$\sup_{\|r_h\|_{-1/2}=1} |(Vu_h, r_h)_0| \geq \beta \|u_h\|_{-1/2}, \qquad \forall u_h \in S_h^0. \tag{20}$$

Así, utilizando que

$$(R_k g, r_h)_0 = (VG_h V^{-1} R_k g, r_h)_0,$$

(19) se transforma en

$$(V(G_h g - Q_h g - \sum_{k\geq 2} h^k G_h V^{-1} R_k g), r_h)_0 \sim 0, \tag{21}$$

luego por la condición (20), convertimos (21) en

$$G_h g - Q_h g \sim \sum_{k\geq 2} h^k G_h V^{-1} R_k g. \tag{22}$$

Este desarrollo es válido en la norma de $H^{-1/2}$, pero gracias a las relaciones entre las normas en el espacio discreto [31]

$$\|u_h\|_{-1/2} \leq C_1 h^{-1/2} \|u_h\|_0 \leq C_2 h^{-1} \|u_h\|_\infty$$

podemos obtenerla también en norma uniforme.

Obviamente, puesto que $Q_h g(z_i) = g(z_i)$, (22) demuestra una marcada superconvergencia en los puntos medios [12, 13]

$$\text{máx}\,|g_h(z_i) - g(z_i)| = \mathcal{O}(h^2). \tag{23}$$

Si ahora pensamos en aplicar un determinado posproceso lineal a la solución

$$\mathcal{T} g := \int_0^1 \Phi(\,\cdot\,, t) g(t) dt \tag{24}$$

(el potencial (5) por ejemplo), con Φ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en su variable periódica t, se puede retomar la demostración de (13) para llegar a consecuencias similares [7, 24]

$$\mathcal{T}(g - Q_h g) \sim \sum_{k\geq 1} \alpha_{2k} h^{2k} \mathcal{T} g^{(2k)}.$$

Aplicando $\mathcal{T}$ a (22) e insertando estas series de forma inductiva en la expresión resultante, se pueden encontrar desarrollos

$$\mathcal{T}(G_h g - g) \sim \sum_{k\geq 2} h^k \mathcal{T} g_k. \tag{25}$$

Aprovechando que $R_2 = \alpha_2 V D^2$ se tiene

$$\mathcal{T}(G_h g - g) = \mathcal{T}(G_h g - Q_h g) + \mathcal{T}(Q_h g - g) \sim h^2 \alpha_2 \mathcal{T}(G_h g'' - g'') + \ldots = \mathcal{O}(h^3).$$

Por tanto, al aplicar $\mathcal{T}$ se produce una cancelación y la serie comienza en h^3, fenómeno de superconvergencia ya observado en las cotas (9) (ver también (10)).

Aparte las implicaciones sobre aplicación práctica de estos métodos, todo lo anterior nos ha dado un sistemática distinta de análisis de los métodos y varios resultados adicionales: superconvergencias nodales y una confirmación del orden óptimo de convergencia en norma débiles, ya que se puede comprobar que en general $g_3 \neq 0$.

Generalización

La generalización de lo anterior a splines de grado arbitrario se basa esencialmente en poder recuperar una serie asintótica para la interpolación como (12). En este caso $Q_h^d g$ es el interpolante en los puntos medios $\{z_j\}$ si d es par y el interpolante en los nodos $\{x_j\}$ si d es impar. Ya sea con análisis tradicional [23] o de Fourier [15] se obtiene la serie

$$g - Q_h^d g \sim \sum_{k\geq d+1} h^k \underline{P}_k^d(\,\cdot\,/h) g^{(k)} \tag{26}$$

con $\underline{P}_k^d$ la periodización de polinomios con idénticas propiedades de simetría a lños que aparecen en (12).

Con excepción del caso $d = 1$ (la interpolación de poligonales 'colgando' de los nudos), la interpolación con splines es un operador no local, puesto que requiere la resolución de un sistema que liga todos los grados de libertad. Sin embargo, la serie (26) indica el bien conocido carácter asintóticamente local de esta interpolación.

A partir de allí se puede seguir paso a paso el análisis realizado para las funciones constantes a trozos, hasta que lleguemos al paralelo a (19)

$$(V(g - Q_h^d g), r_h)_0 \sim \sum_{k \geq p(d)} h^k (R_k^d g, r_h)_0$$

donde $p(d) = d + 1$ si d es impar y $p(d) = d + 2$ si d es par. La fórmula (18) se generaliza a

$$h \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j + \theta h) \overline{r}_h(x_j + \theta h) \sim (f, r_h)_0 + \sum_{k \geq d+1} h^k \frac{\xi_k^d}{k!} B_k(\theta)(f^{(k)}, r_h)_0 \qquad (27)$$

donde los coeficientes ξ_k^d adaptan la fórmula de Euler–Maclaurin al aparecer un spline multiplicando.

Al aplicar el operador $\mathcal{T}$ (24) se consigue una nueva serie asintótica (25), comenzando en $k = 2d + 3$. Más aún en el caso d par, la superconvergencia nodal se repite [13]

$$\text{máx}\, |g_h(z_i) - g(z_i)| = \mathcal{O}(h^{d+2}).$$

Resulta característico que un tipo paralelo de superconvergencia nodal no se observe fácilmente para polinomios de grado impar. La razón de fondo está en el desarrollo (26) y en dónde se localizan los ceros de $\underline{P}_{d+1}^d$. La identificación de esta función como un escalado de un polinomio de Bernoulli ha permitido descubrir [15] que el interpolante óptimo de comparación no es el obvio (el interpolante en los nudos) cuando d es impar: escogiendo otro, se puede encontrar un nuevo conjunto de puntos gaussianos para el caso d impar.

5. Colocación

Las óptimas propiedades de convergencia de los métodos de Galerkin se basan en el aprovechamiento de una propiedad variacional del operador V, la elipticidad de su parte principal (7). No obstante, tradicionalmente el mundo de la ingeniería ha preferido los métodos de colocación a la hora de abordar la resolución de ecuaciones integrales de frontera.

Las razones son variadas, pero se pueden destacar dos. Por un lado, a diferencia de los métodos variacionales para EDP, en las ecuaciones integrales la formulación variacional no aporta nada desde un punto de vista de reorganización de las derivadas entre unos candidatos a test y trial, luego el proceso adicional de integración para entrar en un marco variacional tiene un falso aspecto de complicación gratuita. Por otro, el hecho de que ya haya una integral y se añada una segunda complica en gran medida la implementación, ya que los operadores integrales son no locales y por tanto la matriz carece de ningún tipo de dispersión (sparsity), luego hay que ensamblar el completo y en cada término de la matriz aparecen integrales dobles que deben ser aproximadas por cuadratura.

Retomando los espacios discretos anteriores podemos plantearnos la siguiente familia de métodos

$$g_h \in S_h^d, \qquad V g_h(\theta_j) = f(\theta_j), \qquad j = 0, \ldots, N-1, \tag{28}$$

siendo θ_j puntos equiespaciados. La opción más aplicada y mejor entendida [3, 4, 22, 27] es tomar $\theta_j = x_j$ (los nudos) si d es impar y $\theta_j = z_j$ (los puntos medios) si d es par. Las opciones inversas conducen a métodos inestables y el resto son conocidas como $\varepsilon-$colocaciones y son igualmente válidas [28].

Para la primera posibilidad se tienen los siguientes resultados: estabilidad

$$\|g_h\|_s \le C\|g\|_s, \qquad -1/2 < s < d + 1/2$$

y convergencia [3, 4]

$$\|g - g_h\|_s \le C h^{t-s} \|g\|_t,$$

cuando

$$-1 \le s \le t \le d+1, \qquad s < d + 1/2, \qquad -1/2 < t.$$

Cuando d es par, se puede llegar a una cota de superconvergencia en norma débil [22]

$$\|g - g_h\|_{-2} \le C h^{d+3} \|g\|_{d+2},$$

peor que la mejor convergencia del equivalente salvo en el caso de las constantes a trozos ($d = 0$) donde se repite el orden óptimo $\mathcal{O}(h^3)$.

La estabilidad del método de colocación, incluso para ecuaciones tan simples, es un tema delicado y no resuelto de forma totalmente satisfactoria. El análisis más completo de la estabilidad se basa en técnicas de análisis de Fourier y es por ello válido sólo para mallados uniformes.

La serie asintótica vuelve a arrojar luz sobre distintos fenómenos de la convergencia del método. Para ellos, reescribimos primero el método en forma de un Petrov–Galerkin. Sean δ_j las distribuciones delta de Dirac periódicas en los puntos θ_j, esto es,

$$(u, \delta_j)_0 = u(\theta_j), \qquad \forall u \in H^r, \qquad r > 1/2.$$

Sea

$$S_h^* := \mathrm{span}\langle \delta_j | j = 0, \ldots, N-1 \rangle.$$

Entonces podemos escribir (28) en forma de un método de proyección

$$g_h \in S_h^d, \qquad (V g_h, t_h)_0 = (f, t_h)_0, \qquad \forall t_h \in S_h^*. \tag{29}$$

Por simplicidad, volvemos a restringirnos al caso $d = 0$. La gran facilidad de esta nueva situación viene dada por la $h-$periodicidad de $\beta_k(\,\cdot\,/h)$ en (16) que permite deducir trivialmente

$$(\beta_k(\,\cdot\,/h) g^{(k-1)}, t_h)_0 = \beta_k(\theta)(g^{(k-1)}, t_h)_0, \qquad \forall t_h \in S_h^*.$$

Dos detalles que nos permiten repetir lo realizado para el método de Galerkin. Por un lado, podemos estimar las normas del test $t_h \in S_h^*$ en la siguiente forma [7]

$$C_1 h \sum_{j=0}^{N-1} |t_j| \le \| \sum_{j=0}^{N-1} t_j \delta_j \|_{-1} \le C_2 \sum_{j=0}^{N-1} |t_j|,$$

luego fácilmente convertimos (16) en un equivalente proyectado (ver (19), ahora C_h hace referencia al operador que asigna a g la solución numérica por colocación)

$$(V(C_h g - Q_h g), t_h)_0 = (V(g - Q_h g), t_h)_0 \sim \sum_{k\ge 2} h^k (R_k^* g, t_h)_0 \qquad (30)$$

uniformemente en $\|t_h\|_{-1} = 1$ y de nuevo con $R_2^* = \alpha_2 V D^2$. Por otra parte, la H^0-estabilidad vuelve a ser interpretable como una condición de Babuška–Brezzi por medio de algunas estrategias de dualidad [7]

$$\sup_{\|t_h\|_{-1}=1} |(V u_h, t_h)_0| \ge \beta \|u_h\|_0, \qquad \forall u_h \in S_h^0. \qquad (31)$$

Por tanto, ya no hay ningún inconveniente para obtener de nuevo la convergencia nodal (23) y los desarrollos al aplicar un operador $\mathcal{T}$, comenzando de nuevo en el óptimo de convergencia h^3.

6. Métodos delta

Una idea matemáticamente muy lógica es invertir en (29) los roles de los espacios trial S_h^d y test S_h^*:

$$g_h \in S_h^*, \qquad (V g_h, r_h)_0 = (f, r_h)_0, \qquad \forall r_h \in S_h^d. \qquad (32)$$

Como la parte principal del operador V es simétrica, básicamente se puede demostrar que la estabilidad de este método equivale a la del método de colocación [20, 21], aunque sea en distintas normas. Estos métodos reciben el nombre de métodos delta–spline o métodos duales de colocación.

Es fácil ver que la matriz del método es la traspuesta de la matriz del correspondiente método de colocación para el operador traspuesto

$$V^* g := \int_0^1 V(t, \cdot) g(t) dt.$$

La teoría de este método se desarrolla [20, 21] de forma similar a la del método de colocación y proporciona resultados muy similares, aunque en distintas normas.

Interpretación. Aunque su uso es bastante limitado, los métodos delta tienen características muy interesantes que les hacen particularmente útiles y atractivos en sus propiedades de convergencia. Si retomamos la ecuación integral de contorno

$$-\int_0^1 \log|\mathbf{x}(\,\cdot\,) - \mathbf{x}(t)|^2 g(t)dt = f$$

asociada a una representación como potencial de capa simple

$$u(\mathbf{z}) = -\int_0^1 \log|\mathbf{z} - \mathbf{x}(t)|^2 g(t)dt \tag{33}$$

la opción por las distribuciones de deltas en los puntos θ_j consiste en buscar

$$g_h = \sum_{j=0}^{N-1} g_j \delta_j$$

que cumpla una serie de ecuaciones discretas que reflejen la condición de contorno. Sustituyendo formalmente en (33) y denotando

$$\mathbf{x}_j := \mathbf{x}(\theta_j) \in \Gamma$$

la representación del potencial se convierte en

$$u_h(\mathbf{z}) = -\sum_{j=0}^{N-1} g_j \log|\mathbf{z} - \mathbf{x}_j|^2,$$

luego corresponde a la idea físicamente intuitiva de abandonar las distribuciones continuas de carga por distribuciones discretas. Esta idea tiene positivas connotaciones en aplicaciones a electromagnetismo y acústica pues proporciona representaciones muy simples del potencial aproximado, fáciles de controlar en la lejanía. □

Series asintóticas de los métodos delta

Un operador de pseudointerpolación obvio para los métodos delta es [8, 9, 10]

$$Q_h^* g := h \sum_{j=0}^{N-1} g(\theta_j)\delta_j \in S_h^*.$$

Su interacción con los operadores regularizantes es del todo simple

$$K(g - Q_h^* g) = \int_0^1 K(\,\cdot\,, t) g(t) dt - h \sum_{j=0}^{N-1} K(\,\cdot\,, \theta_j) g(\theta_j) \sim 0$$

de nuevo por la optimalidad de las sumas rectangulares para funciones regulares periódicas.

Si comparamos ahora a través del operador de Bessel, escribiendo

$$\theta_j = x_j + \theta h$$

con θ fijo, la serie (15) (ver también (14)) demuestra que

$$\Lambda(g - Q_h^* g) \sim \sum_{m\geq 0} h^{m+1} D_m(\theta + \,\cdot\,/h) g^{(m)}.$$

Al multiplicar por $r_h \in S_h^0$ con la normalización $\|r_h\|_0 = 1$ (y tomando $\theta = 1/2$, esto es, deltas sobre los puntos medios), nos encontramos con

$$(\Lambda(g - Q_h^* g), r_h)_0 \sim \sum_{k\geq 1} h^k (D_{k-1}(1/2 + \,\cdot\,/h) g^{(k-1)}, r_h)_0,$$

es decir, únicamente términos de la forma (17). Vueltos a desarrollar y aprovechando que para todo m

$$\int_0^1 D_m(\theta) d\theta = 0,$$

(intégrense ambos lados de (14)), se llega a una sencilla expresión

$$(\Lambda(g - Q_h^* g), r_h)_0 \sim \sum_{k\geq 3} h^k (R_k^* g, r_h)_0.$$

Con una nueva condición ínfimo–supremo [8, 9, 10], traspuesta de (31), y la notación C_h^* el operador de discretización, se demuestra como antes que

$$C_h^* g - Q_h^* g \sim \sum_{k\geq 3} h^k C_h^* R_k^* g, \tag{34}$$

expresión válida en H^{-1}. Así, si escribimos

$$C_h^* g = h \sum_{j=0}^{N-1} g_i \delta_i$$

(normalizamos la base δ_i mulplicando por h), se obtiene

$$\max_i |g_i - g(\theta_i)| = \mathcal{O}(h^2),$$

una sorprendente convergencia puntual de los coeficientes calculados a los valores de la solución, sorprendente por mostrar cómo un método que toma la discretización en un espacio de distribuciones no funcionales, logra aproximaciones funcionales de la misma calidad que el método de colocación.

La novedad radica en cómo la serie (34) comienza ya en el óptimo de convergencia, luego no hay que esperar a aplicar un operador regularizante $\mathcal{T}$ para observar la superconvergencia.

7. Series asintóticas operacionales y numéricas

En aplicaciones asociadas a la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma, \qquad u|_\Gamma = u_0$$

(con condiciones de radiación de Sommerfeld en infinito), la representación en potencial de capa simple toma la forma [19, 31]

$$u(\mathbf{z}) := \int_0^1 H_0^{(1)}(k|\mathbf{z} - \mathbf{x}(t)|) g(t) dt, \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma, \tag{35}$$

donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primera clase y orden cero [1]. Este potencial conduce a ecuaciones integrales similares a (1)

$$Vg := -\int_0^1 A(\,\cdot\,, t) \log\left(\mathrm{sen}^2(\pi(\,\cdot\, - t))\right) g(t) dt + \int_0^1 K(\,\cdot\,, t) g(t) dt = f, \tag{36}$$

siendo A una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ periódica tal que

$$A(t,t) \equiv \alpha \neq 0.$$

Las cuestiones de invertibilidad, carácter Fredholm, elipticidad de la parte principal, convergencia de los métodos de Galerkin y colocación son idénticas, pero las series asintóticas se complican, al no ser posible escribir $V = \Lambda + K$, con K operador integral de núcleo $\mathcal{C}^\infty$.

Una primera posibilidad consiste en utilizar desarrollos de Taylor periódicos para descomponer V en serie formal de operadores más simples. Gracias a la analiticidad del seno, podemos escribir un desarrollo de Taylor con potencias del seno [16]

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{T} \mathcal{L}_k f(0) \,\mathrm{sen}^k(2\pi x) + \mathcal{O}(x^{T+1})$$

siendo $\mathcal{L}_k$ operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes. Aplicando esto a la función $A(s,t)$ en la variable t centrado en $t = s$ podemos escribir un nuevo tipo de desarrollos

$$V \overset{\exp}{=} \alpha\Lambda + a_k \sum_{k \geq 1} \Lambda_k$$

donde a_k son funciones regulares periódicas,

$$\Lambda_k g := \int_0^1 \mathrm{sen}^k(2\pi(\,\cdot\, - t)) \log\left(\mathrm{sen}^2(\pi(\,\cdot\, - t))\right) g(t) dt$$

es un operador pseudodiferencial de orden $-k-1$ y el nuevo símbolo de series formales hace referencia a que la interrupción de la suma proporciona un resto que es operador de orden menor que los anteriores.

Los desarrollos asintóticos numéricos de

$$\Lambda_k(g - Q_h^d g)$$

son factibles por idénticas técnicas. Así la combinación de desarrollos numéricos y operacionales, permite crear un desarrollo del tipo

$$(V(g - Q_h^d g), r_h)_0 \sim \sum_{k \geq p(d)} h^k (R_k^d g, r_h), \qquad r_h \in S_h^d$$

o [7]

$$(V(g - Q_h^d g), t_h)_0 \sim \sum_{k \geq p(d)} h^k (R_k^{d,*} g, t_h), \qquad t_h \in S_h^*$$

y continuar con todo lo anterior.

No obstante el análisis de Fourier permite dar un tratamiento alternativo de esta ecuación y unificar este desarrollo a los asociados a otros operadores pseudodiferenciales, con lo que se cubren ecuaciones de segundo tipo, ecuaciones singulares, hipersingulares, etc y prácticamente todo el espectro de operadores de frontera asociados a operadores elípticos sobre fronteras regulares.

La técnica consiste en considerar dos familias de monomios operacionales

$$HD^k, \qquad D^k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

siendo H la transformada de Hilbert periódica [19, 32]

$$Hg = \sum_{n>0} \widehat{g}(n)\phi_n - \sum_{n<0} \widehat{g}(n)\phi_n = \imath \text{v.p.} \int_0^1 \operatorname{cotg}(\pi(\,\cdot\, - t))g(t)dt$$

(v.p. es el valor principal de Cauchy), D el operador derivada y D^{-1} un inverso del operador derivada aplicable a funciones con integral nula. Tanto D^k como HD^k son operadores pseudodiferenciales de orden k.

Los operadores por tratar son de la forma asintótica [16]

$$A \overset{\text{exp}}{=} \sum_{k \leq m} a_k D^k + \sum_{k \leq m} b_k HD^k$$

siendo a_k y b_k funciones regulares. Por ejemplo, el operador logarítmico con coeficientes variables admite un desarrollo

$$V \overset{\text{exp}}{=} \sum_{k \leq -1} b_k HD^k.$$

Tratado esto, podemos pensar en analizar $A(g - Q_h^d g)$ como suma de aportaciones de cada monomio operacional. Sin embargo, hay un operador discreto sobre S_h^d que tiene mejores propiedades que la interpolación. Si consideramos el operador D_h^d definido por las relaciones [2, 15]

$$D_h^d g \in S_h^d, \qquad \widehat{D_h^d g}(\mu) = g(\mu), \qquad -N/2 < \mu \leq N/2$$

(esto es, la interpolación de los coeficientes de Fourier centrales), se puede ver que D_h^d admite un desarrollo (26), siendo $\underline{P}_k^d$ periodizaciones de polinomios de Bernoulli escalados. La ventaja de D_h^d sobre Q_h^d es que su convergencia es óptima en todas las normas accesibles

$$\|g - D_h^d g\|_s \leq C h^{t-s} \|g\|_t$$

con $s \leq t$, $s \leq d+1/2$. Esto implica que D_h^d no añade ningún error de consistencia innecesario. Así, por ejemplo

$$K(g - D_h^d g) \sim 0.$$

Con todos estos elementos se reconstruye una teoría asintótica bastante completa para métodos de Galerkin [25], Petrov–Galerkin [16], colocación y derivados [14, 17, 30] que ofrece una visión unificada del comportamiento de los operadores integrales de frontera frente a fenómenos de discretización con un marcado grado de uniformidad.

Mencionemos también la posibilidad de ampliar el análisis precedente a la inclusión de los efectos de la integración numérica a la hora de construir la matriz y el término independiente del sistema lineal asociado al método. Para ecuaciones integrales con núcleo logarítmico, ya sea con coeficientes constantes (1) o variables (36) con métodos de Galerkin o colocación y también en problemas relacionados con ecuaciones integrales de frontera sobre arcos abiertas se tiene una sistemática de implementación y análisis que permite conservar las buenas propiedades de los métodos [6, 13, 24, 26].

8. Aplicaciones

Concluimos esta exposición con una breve indicación de las implicaciones prácticas de tener un desarrollo del error. Si el error de un método numérico $T(h)$ para estimar una cantidad $T(0)$ cumple

$$e(h) := T(h) - T(0) = c_p h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}),$$

entonces con un doble mallado podemos estimar el primer término del error

$$\widetilde{e}(h) := \frac{2^p}{2^p - 1}\,(T(h) - T(h/2)) = e(h) + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Este procedimiento, conocido como estimación a posteriori del error por extrapolación, permite utilizar una doble aplicación del método para dar un estimación del error cometido.

La otra gran rama de aplicaciones de la existencia de desarrollos asintóticos del error es la aceleración de la convergencia por extrapolación de Richardson. Dicho simplemente, si

$$T(h) - T(0) \sim \sum_{k \geq p} c_k h^k$$

una combinación lineal de, por ejemplo, $T(h)$ y $T(h/2)$ permite cancelar el primer término de error:

$$T_h^1(h) := \frac{2^p T(h/2) - T(h)}{2^p - 1} = T(h/2) + \frac{1}{2^p - 1}(T(h/2) - T(h)) \sim T(0) + \sum_{k \geq p+1} c_k^1 h^k$$

Una estrategia de este tipo aplicada varias veces permite obtener métodos de órdenes razonablemente altos a partir de discretizaciones simples.

Referencias

[1] M. Abramowitz e I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1970.

[2] D.N. Arnold, 'A spline–trigonometric Galerkin method and an exponentially convergent boundary integral method', *Math. Comput.* **41** (1983) 383–397.

[3] D. N. Arnold y W.L. Wendland, 'On the asymptotic convergence of collocation methods'. *Math. Comput.* **41** (1983), 349–381.

[4] D. N. Arnold y W.L. Wendland, 'The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations on curves'. *Numer. Math.* **47** (1985) 317–341.

[5] R. Celorrio y F.J. Sayas, 'The Euler–Maclaurin formula in presence of a logarithmic singularity'. *BIT* **39** (1999) 780–785.

[6] R. Celorrio y F.J. Sayas, 'Full collocation methods for some boundary integral equations'. *Numer. Algorithms* **22** (1999) 327–351.

[7] R. Celorrio y F.J. Sayas, 'Extrapolation techniques and the collocation method for a class of boundary integral equations'. *ANZIAM J.* **42** (2001) 413–437.

[8] R. Celorrio, V. Domínguez y F.J. Sayas, 'On the averaged delta method for some acoustic scattering problems', en F. Jacobsen, ed. *Proceedings of the 6th International Congress on Sound and Vibration*, IIAV (1999) 547–554

[9] R. Celorrio, V. Domínguez y F.J. Sayas, 'Métodos de cargas puntuales en simulación de problemas de scattering acústico'. En R. Abascal et al., eds.: *Métodos numéricos en ingeniería* (Actas del IV C.M.N.I.), SEMNI (1999). Publicación CD-ROM.

[10] R. Celorrio, V. Domínguez y F.J. Sayas, ' Periodic Dirac delta distributions in the boundary element method'. Aparecerá en *Adv. Comput. Math.*

[11] G. Chen y J. Zhou, *Boundary element methods*, Academic Press, 1992.

[12] M. Crouzeix y F.J. Sayas, 'First term of the asymptotic development in a Boundary Element Method: piecewise constant functions', en A.C. Casal et al, eds.: *Actas del III C.M.A. – XIII C.E.D.Y.A.*, U.P.M. (1995) 163-168.

[13] M. Crouzeix y F.J. Sayas,, 'Asymptotic expansions of the error of spline Galerkin Boundary Element Methods', *Numer. Math.* **78** (1998) 523–547.

[14] V. Domínguez y F.J. Sayas. 'Variantes del método de colocación para ecuaciones integrales de frontera', en R. Montenegro et al, eds: *Actas XVI C.E.D.Y.A.–VI C.M.A.* Ed. Universidad de Las Palmas de GC (1999) 1053–1060.

[15] V. Domínguez y F.J. Sayas, 'Local expansions of periodic spline interpolation with some applications', *Math. Nach.* **227** (2001) 43-62

[16] V. Domínguez y F.J. Sayas, 'Full asymptotics of spline Petrov–Galerkin methods for periodic pseudodifferential equations', *Adv. Comput. Math.* **14** (2001) 75-101.

[17] V. Domínguez y F.J. Sayas, 'An asymptotic series approach to qualocation methods'. Publ. Sem. G. Galdeano **1** (2001). Enviado para publicación

[18] G.C. Hsiao y W.L. Wendland, 'The Aubin–Nitsche lemma for integral equations of the first kind', *J. Int. Eqns* **3** (1981) 299–315.

[19] R. Kress, 'Linear Integral Equations', 2nd ed. Springer, 1999.

[20] K. Ruotsalainen y J. Saranen, 'Some boundary element methods using Dirac's distributions as trial functions', *SIAM J. Numer. Anal.* **24** (1987) 816–827.

[21] K. Ruotsalainen y J. Saranen, 'A dual method to the collocation method', *Math. Meth. Appl. Sci.* **10** (1988) 439–445.

[22] J. Saranen, 'The convergence of even degree spline collocation solution for potential problems in smooth domains in the plane', *Numer. Math.* **53** (1988) 490–512.

[23] F.J. Sayas, 'Asymptotic expansion of the error of some boundary element methods'. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza (1994).

[24] F.J. Sayas, 'Fully discrete Galerkin methods for systems of boundary integral equations', *J. Comput. Appl. Math.* **81** (2), 311-331 (1997).

[25] F.J. Sayas, 'Numerical approximation of hypersingular equations by Galerkin methods'. *Actas V C.M.A. – XV C.E.D.Y.A.*, Ed. Universidad de Vigo, Congresos **9** (1998) 873–877.

[26] F.J. Sayas, 'The numerical solution of Symm's equation on smooth open arcs by spline Galerkin methods'. *Comput. Math. Appl.* **38** (1999) 87–99.

[27] G. Schmidt, 'The convergence of Galerkin and collocation methods with splines for pseudodifferential equations on closed curves', *Z. Anal. Anwendungen* **3** (1984) 183–196.

[28] G. Schmidt, 'On $\varepsilon-$collocation for pseudodifferential equations on a closed curve', *Math. Nach.* **126** (1986) 183–196.

[29] I.H. Sloan y A. Spence, 'The Galerkin method for integral equations of the first kind with logarithmic kernel: theory and applications', *IMA J. Numer. Anal.* **8** (1988) 105–140.

[30] I.H. Sloan y W.L. Wendland, 'Spline qualocation methods for variable-coefficient elliptic equations on curves', *Numer. Math.* **83** (1999) 497–533.

[31] W.L. Wendland, 'Boundary element methods for elliptic problems', in A. Schatz, V. Thomée y W.L. Wendland, eds. *Mathematical Theory of Finite and Boundary Element Methods*, Birkhäuser, Basel, 1990.

[32] Y. Yan e I.H. Sloan, 'On integral equations of the first kind with logarithmic kernels', *J. Int. Eqns. Appl.* **1** (1988) 549–579.