ALGUNOS RESULTADOS RECIENTES SOBRE ECUACIONES NO LINEALES

Ana Carpio
Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
e-mail: carpio@sunma4.mat.ucm.es

1 Introducción

Como sabrán los lectores de este boletín, el año pasado tuve el honor de recibir el Primer Premio SEMA al joven investigador. A lo largo de las páginas que siguen, intento explicar a grandes rasgos en qué ha consistido mi labor investigadora hasta la fecha.

Mi trabajo se ha enmarcado principalmente dentro del estudio cualitativo de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Recientemente, a raiz de mi estancia postdoctoral en OCIAM (Oxford Centre for Industrial and Applied Mathematics), he comenzado a interesarme por cuestiones de modelización, simulación numérica y análisis de modelos discretos.

Los temas que voy a comentar están distribuidos como sigue:

1 Problemas de existencia:

- 1.1 Ecuaciones de tipo elíptico con exponente crítico: no existencia de soluciones positivas.
- 1.2 Ecuaciones de ondas con disipación no lineal: existencia de soluciones globales retrógradas.

2 Comportamiento asintótico para tiempos grandes:

- 2.1 Ecuaciones de convección-difusión:
  - 2.1.1 Ecuaciones de vorticidad en dimensiones dos y tres con datos medidas: primer término del desarrollo asintótico
  - 2.1.2 Ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles con datos integrables: segundo término del desarrollo asintótico.
  - 2.1.3 Ecuaciones de convección-difusión con convección tipo potencias de u: unicidad de soluciones fundamentales, resultados de compacidad.

2.1.4 Influencia de la difusión variable en el comportamiento para tiempos grandes.

2.2 Ecuaciones cinéticas: Soluciones fundamentales y ecuaciones de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck.

3 Modelización y estudio de la dinámica e interacción de dislocaciones en cristales.

3.1 Análisis de la dinámica de líneas de singularidad, ondas viajeras y estacionarias discretas.

3.2 Simulación numérica de defectos en sistemas atómicos y derivación de algunos modelos discretos bidimensionales susceptibles de ser acoplados con las ecuaciones de la elasticidad.

3.3 Estudio de sistemas de leyes de conservación no estrictamente hiperbólicos y mixtos: obtención de familias de soluciones especiales con relevancia física y regularización en términos de problemas de frontera libre con viscosidad (degenerada) evanescente.

No es posible dar muchos detalles sobre temas dispares en unas pocas páginas. No obstante, espero que al menos algunas ideas queden claras. Por otra parte, sólo cito la bibliografía imprescindible. En cualquiera de los artículos citados puede encontrarse una bibliografía más detallada.

2 Resultados de existencia

1 Problemas elípticos con exponente crítico

Problemas de este tipo aparecen, por ejemplo, en geometría diferencial al intentar determinar métricas riemannianas conformes a una dada (Problema de Yamabe). Aparecen igualmente en relación con ciertos problemas físicos, en particular, con las ecuaciones de Emden-Fowler y Yang-Mills. Se suele tomar como problema modelo el siguiente:

$$\begin{aligned} -\Delta u = &\ u^p \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = &\ 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \\ u > &\ 0 \quad \text{en} \quad \Omega \end{aligned}$$

donde $p = \frac{n+2}{n-2}$, $n \geq 3$ y Ω es un dominio regular acotado de R^n.

Cuando $p < \frac{n+2}{n-2}$ es fácil probar que existe solución mediante métodos variacionales tipo minimización o técnicas de Ljusternik-Schrinelman o teoría de Morse. Todos estos métodos fallan debido a falta de compacidad si $p = \frac{n+2}{n-2}$ ya que $p + 1 = 2^* = \frac{2n}{n-2}$ es el exponente crítico de la inyección de Sobolev $H_0^1(\Omega) \to L^{p+1}(\Omega)$.

De hecho, la existencia de solución está condicionada por las propiedades topológicas y geométricas del dominio. Pozohaev [46] probó que en dominios estrellados no existe solución. Por otra parte, Bahri y Coron [1] demostraron que en todo dominio con topología no trivial (en particular, con agujeros) existe solución. Posteriormente, Ding [24] fue capaz de construir dominios de topología trivial en los cuales existía solución. La idea consistía en perturbar anillos. Este resultado puso de relieve la influencia de la geometría. Quedaba por determinar si existían dominios de topología trivial pero sin ser estrellados en los cuales el problema careciera de solución.

En [2] se da una respuesta positiva a esta cuestión construyendo los dominios como perturbaciones de bolas. La idea de la demostración se basa en un argumento de reducción al absurdo que combina la aplicación del método de moving planes de Gidas-Ni-Nirenberg y la técnica de compacidad por concentración de P.L. Lions.

2 Ecuaciones de ondas con disipación no lineal

Consideramos ecuaciones de ondas con disipación no lineal de la forma

$$(\mathcal{G}) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = 0 & \text{en } R \times \Omega \\ u = 0 & \text{en } R \times \partial\Omega \end{cases}$$

donde $1 < p < \infty$ y $\Omega \subset R^n$ es acotado y regular. El término de disipación $|u_t|^{p-1} u_t$ representa un efecto de rozamiento que es función de la velocidad.

Es bien sabido ([35]) que, dados datos iniciales de energía finita $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ en t_0, se puede resolver el problema de valores iniciales

$$(\mathcal{PVI}) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = 0 & \text{en } [t_0, \infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{en } [t_0, \infty) \times \partial\Omega \\ u(t_0) = u_0, u_t(t_0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y obtener soluciones $u(t, x)$ definidas para $t \geq t_0, x \in \Omega$. Sin embargo, no se conoce ningún método general para construir soluciones globales del problema de valores iniciales retrógrado ($t \leq t_0$) e incluso la existencia de soluciones locales resulta difícil de establecer. Por otra parte, existen soluciones locales del problema retrógrado que explotan en tiempo finito generadas por datos arbitrariamente pequeños y no se conocen caracterizaciones del conjunto de datos que pueda dar lugar a soluciones globales.

En [4], [5] hemos introducido una técnica que permite construir soluciones definidas para todo t. Estas soluciones tienden a cero si $t \to \infty$ y crecen indefinidamente si $t \to -\infty$.

La idea del método es la siguiente. En primer lugar, observamos que basta construir soluciones globales u del problema retrógrado para $t \leq T$, T fijo. Prolongándolas para $t \geq T$ por la solución de $(\mathcal{PVI})$ con datos iniciales $u(T), u_t(T)$ en $t_0 = T$ se tienen soluciones de $(\mathcal{G})$ definidas para todo t.

Para construir soluciones globales del problema retrógado partimos de la observación de que el problema 'parabólico' obtenido suprimiendo u'', es decir, $-\Delta v + |v_t|^{p-1}v_t = 0$, posee soluciones globales en tiempo. Dichas soluciones son de la forma $v = |t|^{\frac{p}{p-1}}\psi(x)$ donde $\psi(x) \in H_0^1(\Omega)$ satisface $-\Delta\psi = (\frac{p}{p-1})^p|\psi|^{p-1}\psi$. Fijamos $T < 0$. A partir de v se puede construir una función w que verifica

$$w_{tt} - \Delta w + |w_t|^{p-1}w_t = f$$

para $t \leq T$, con f pequeño en $-\infty$. La idea consiste en tomar $w = v + r$ donde $r = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(x)|t|^{\lambda-2i}$ con k tal que $\alpha = \frac{-p}{p-1} + 2(k+1) > 1$ y $\psi_i(x) \in H_0^1$ soluciones de problemas elípticos elegidos de forma que $|f| \leq C|t|^{-\alpha}$.

Finalmente, utilizamos la 'solución aproximada' w para construir una solución u en $(-\infty, T]$. Denotamos por w^τ la solución de $(\mathcal{PVI})$ con datos iniciales $w(\tau), w_t(\tau)$ en $t_0 = \tau < T < 0$. w^τ existe para $t \geq \tau$. Cuando $\tau \to -\infty$, las funciones w^τ convergen a una solución u de $(\mathcal{G})$ definida para $t \leq T$ y que se comporta como $|t|^{\frac{p}{p-1}}\psi(x)$ si $t \to -\infty$. Basta prolongar u como indicamos anteriormente para tener una solución global en tiempo.

La existencia de soluciones globales de $(\mathcal{G})$ está relacionada con la optimalidad de las estimaciones del decaimiento de la energía $E(u(t))$ de las soluciones del problema de valores iniciales $(\mathcal{PVI})$. Es conocido (véase [36]) que $E(u(t)) \leq C(E(u(0)))f(t)$ para $t \geq 0$ con $f(t) = t^{\frac{-1}{p-1}}$ si $p > 1$ y $f(t) = e^{-\delta t}, \delta > 0$ si $p = 1$. $C(E(u(0)))$ denota una constante que depende de los datos iniciales. En [3] se obtienen estimaciones óptimas sobre el crecimiento de esta constante en función de la energía inicial, en el sentido de que son alcanzadas por las soluciones construidas en [5].

3 Comportamiento asintótico

1 Ecuaciones de convección-difusión no lineales

Una ecuación de convección-difusión es una ecuación de evolución para una función $u(x,t)$ en la cual aparecen un término de difusión (tipo laplaciano o divergencia) y un término de convección (tipo gradiente). Consideraremos en lo sucesivo términos de convección nlineales y de difusión lineales.

La existencia y unicidad de solución para el problema de valores iniciales en R^n suele ser establecida mediante esquemas iterativos o teoremas de punto fijo. Por otra parte, la presencia del término de difusión tiene un efecto regularizante sobre las soluciones para $t > 0$. Nos planteamos la cuestión de determinar cual es el comportamiento asintótico de las soluciones para tiempos grandes.

La primera observación es que el comportamiento de la solución para tiempos grandes está ligado al comportamiento de los datos iniciales para x grande. Consideramos en principio datos iniciales que se anulan cuando $|x| \to \infty$, con lo que cabe esperar que las soluciones tiendan a la solución estacionaria nula cuando $t \to \infty$. Se trata de precisar este resultado indicando cual es la velocidad de caida a cero y cual es el perfil asintótico preciso de las soluciones.

En general, para tiempos grandes se suele establecer una competición entre los diversos términos presentes en la ecuación. Segun el tipo de nolinealidad en la convección y el tipo de datos iniciales podemos tener diferentes situaciones:

- la difusión es dominante y las soluciones se comportan asintóticamente como soluciones del problema sin convección (que es parabólico)
- la convección es dominante y las soluciones se comportan como soluciones del problema sin difusión (que es hiperbólico)
- la difusión domina en algunas direcciones, la convección en otras y las soluciones se comportan como soluciones del problema sin difusión en las direcciones de convección dominante y sin convección en las direcciones de difusión dominante
- la difusión y la convección son del mismo orden

Cuando las ecuaciones y la norma del espacio en que se toman los datos son invariantes por algun cambio de escala, todos los términos que aparecen en la ecuación suelen ser del mismo orden y la solución se comporta como una solución autosemejante (invariante por el cambio de escala). Un instructivo caso concreto en el que se dan todas las posibilidades que acabamos de mencionar es analizado en [27], [29].

Un primer paso para establecer el orden de magnitud relativo de los diversos términos en la ecuación y el tipo de perfil que cabe esperar consiste en establecer estimaciones óptimas sobre la velocidad de decrecimiento de las normas de la solución. La presencia de un operador parabólico permite obtener para las soluciones estimaciones $L^p - L^q$ del tipo de las conocidas para soluciones de la ecuación del calor:

$$\|u(t)\|_{L^q} \leq C(\|u(0)\|_{L^p}) t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}, \quad t > 0$$

Estas estimaciones son independientes de la convección. Pueden deducirse segun los casos a partir de desigualdades diferenciales para las normas, de la ecuación integral asociada o de expresiones en términos de soluciones fundamentales.

Se deduce de estas estimaciones que la velocidad de caida de la solución cuando $t \to \infty$ está determinada por el comportamiento cuando $|x| \to \infty$ del dato inicial. El tomar u_0 en un espacio L^p es simplemente una manera de medir su decaimiento cuando $x \to \infty$, o bien el crecimiento de sus singularidades. Otras elecciones son posibles, como por ejemplo, espacios de Morrey o Besov.

Cuando estas estimaciones parabólicas de decaimiento son óptimas, las soluciones suelen comportarse como las soluciones autosemejantes del problema sin convección o bien como las soluciones autosemejantes del problema completo, dependiendo de la nolinealidad. Obtenemos asi una primera aproximación del perfil asintótico de la solución. La manera clásica de probar este resultado suele consistir en reescalar el problema y ver que las soluciones reescaladas convergen a una solución autosemejante.

En otras ocasiones, la convección no lineal permite obtener estimaciones de decaimiento mas rápidas que las estimaciones parabólicas. La idea consiste en establecer previamente estimaciones de entropía para las derivadas. En este caso, la convección no es despreciable para tiempos grandes y las soluciones se suelen comportar como soluciones autosemejantes del problema hiperbólico o parcialmente hiperbólico.

En problemas en que la difusión domina para tiempos grandes y la primera aproximación al perfil asintótico de la solución viene dada por el problema lineal, conviene obtener mas términos del desarrollo asintótico para determinar cual es la influencia de la nolinealidad (o la difusión variable) en el perfil. Como veremos mas adelante, es posible hacer esto desarrollando las integrales que aparecen en la ecuación integral asociada. Este tipo de resultados sobre el comportamiento asintótico para tiempos grandes son de interés a la hora de analizar los perfiles asintóticos de pequeñas perturbaciones, que inevitablemente existen en todas las situaciones realistas, y la estabilidad de soluciones específicas.

Esta es a grandes rasgos, la filosofía subyacente en muchos de los trabajos publicados sobre comportamiento asintótico en ecuaciones de convección-difusión. Filosofía que obviamente tiene excepciones y en cada caso particular ha de ser convenientemente matizada o alterada. Tratamos a continuación algunos ejemplos.

1.1 Ecuaciones de vorticidad

Consideremos primero la ecuación de vorticidad en dimensión dos:

$$(V2) \qquad \begin{cases} v_t - \Delta v + u^i \partial_i v = 0 & \text{en } R^2 \times R^+ \\ v(x,0) = v_0 & \text{en } R^2 \end{cases}$$

donde el vector velocidad $u = (u^1, u^2)$ está dado por:

$$u(x,t) = K * v(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{(-y_2, y_1)}{|y|^2} v(x-y,t)dy$$

con :

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{(-x_2, x_1)}{|x|^2} = (K^1, K^2)$$

Denotamos $u^i \partial_i v = \sum_{i=1}^2 u^i \partial_i v$ con $\partial_i v = \frac{\partial\, v}{\partial x_i}$.

En una serie de trabajos de Giga, Kambe, Osada [31, 33] se prueba que si v_0 es una medida de Radon finita existe una única solución v cuyas normas L^p decaen como $t^{-1+\frac{1}{p}}$. Ademas, si la variación total de v_0 es suficientemente pequeña, deducen de la ecuación integral que $v(t)$ se comporta como la solución fundamental de la ecuación del calor con masa $M = \int dv_0$, $MG(t)$ siendo G el núcleo del calor.

Es posible mejorar este resultado (véase [6, 7]) reemplazando la restricción sobre la pequeñez de la variación total de v_0 por la unicidad de la solución fundamental f de la ecuación de vorticidad con masa $M = \int dv_0$:

$$\begin{cases} f_t - \Delta f + (K * f)^i \partial_i f = 0 & \text{en } R^2 \times R^+ \\ f(x,0) = M\delta & \text{en } R^2 \end{cases}$$

Para garantizar la unicidad basta suponer la masa $M = \int dv_0$ pequeña.

La clave de la demostración es la observación de que la ecuación $(V2)$ es invariante por el cambio de escala $v_\lambda = \lambda^2 v(\lambda x, \lambda^2 t)$, la masa $M = \int v(t)$

es una cantidad conservada y las soluciones fundamentales de la ecuación del calor MG con masa M son soluciones fundamentales de (V2) puesto que anulan el término no lineal. Nótese que las soluciones fundamentales f de (V2) son autosemejantes (invariantes por el cambio de escala).

Las funciones v_λ son soluciones de $(V2)$ con datos que convergen a $M\delta$ si λ tiende a infinito. Si $\lambda \to \infty$ cabe esperar que v_λ converja a la solución fundamental f de (V2) con masa M. Si hay unicidad, en particular, si M es pequeña, $f = MG$. Para justificar esta convergencia, es preciso obtener estimaciones uniformes sobre las normas de v_λ, ∇v_λ y ver que las v_λ son uniformemente pequeñas fuera de bolas de radio suficientemente grande. Este es el punto más delicado y se prueba utilizando diversas expresiones integrales de v_λ.

Establecida la convergencia, basta deshacer el cambio de escala para ver que $v(t)$ se comporta en primera aproximación como $MG(t)$ si $t = \lambda^2$ tiende a infinito:

$$\|v_\lambda(1) - MG(1)\|_{L^p} = \lambda^{2-\frac{2}{p}}\|v(\lambda^2) - MG(\lambda^2)\|_{L^p} \to 0$$

es decir, $v(t) = MG(t) + R(t)$ donde $R(t)$ es un resto que decae mas rápido que $MG(t)$ cuando t tiende a infinito.

En dimensión 3, tenemos el sistema de la vorticidad:

$$(V3) \qquad \begin{cases} v_t - \Delta v + \partial_i(u^i v - v^i u) = 0 & \text{en } R^3 \times R^+ \\ div\ v = 0 & \text{en } R^3 \times R^+ \\ v(x,0) = v_0,\ div\ v_0 = 0 & \text{en } R^3 \end{cases}$$

La ley de Biot-Savart permite expresar la velocidad u en términos de la vorticidad:

$$u(x,t) = K * v(x,t) = \frac{-1}{4\pi}\int_{R^3} \frac{(y_1, y_2, y_3)}{|y|^3} \times v(x-y,t)dy$$

donde

$$K(x) = \frac{-1}{4\pi}\frac{(x_1, x_2, x_3)}{|x|^3} = (K^1, K^2, K^3)$$

Giga y Miyakawa [32] probaron la existencia de solución para datos iniciales de divergencia nula en el espacio de Morrey $(M^{\frac{3}{2}}(\Omega))^3$ y suficientemente pequeños. El interés de considerar datos en este espacio de Morrey estriba en que contiene medidas concentradas en curvas, como por ejemplo, filamentos o anillos de vorticidad.

Bajo ciertas restricciones adicionales sobre los datos, se tiene (véase [6, 7]) para tiempos grandes las soluciones se comportan como soluciones autosemejantes de (V3). Basta observar que la ecuación y la norma $(M^{\frac{3}{2}}(\Omega))^3$ son invariantes por el cambio $v_\lambda = \lambda^2 v(\lambda x, \lambda^2 t)$ y proceder como en el caso $n = 2$.

De nuevo, la principal dificultad está en obtener estimaciones uniformes sobre v_λ, ∇v_λ y ver que las v_λ son uniformemente pequeñas fuera de bolas suficientemente grandes. Para probar esta última condición necesitamos imponer condiciones muy restrictivas a los datos iniciales. Estas restricciones son meramente técnicas. Cabe esperar que el resultado sobre el comportamiento asintótico siga siendo válido para datos más generales utilizando espacios de Besov y algunas ideas introducidas recientemente para el estudio de soluciones autosimilares en Navier-Stokes por Canone, Planchon y Meyer.

1.2 Ecuaciones de Navier-Stokes

Consideramos las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en R^n, $n \geq 2$:

$$(NS) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u + u^i \partial_i u + \nabla p = 0 & \text{en } R^+ \times R^n \\ u(t,x) \to 0 & |x| \to \infty,\ t > 0 \\ div\ u = 0 & \text{en } R^+ \times R^n \\ u(x,0) = u_0,\ div\ u_0 = 0 & \text{en } R^n \end{cases}$$

donde $u = (u^1, ..., u^n)$ denota la velocidad del fluido y p la presión.

Conviene recordar que los resultados de existencia de solución para (NS) son básicamente de dos tipos. Por una parte se tiene existencia global para todo $t \geq 0$ de soluciones débiles $u \in L^\infty(0,\infty; L^2(R^n))$ para datos $u_0 \in L^2(R^n)$ para todo $n \geq 2$. Por otra parte, se tiene existencia de soluciones fuertes $u \in BC([0,\infty), L^q(R^n)), q \geq n$ si $u_0 \in L^n(R^n)$ (véase [37]). Para $n = 2$ estas soluciones coinciden con las débiles y son por tanto globales. Si $n > 3$, son globales para datos de norma L^n suficientemente pequeña. Cuando $u_0 \in L^p \cap L^n,\ 1 < p < n$, se tiene además

$$\|u(t)\|_q \leq C(u_0) t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}, \quad t > 0, \quad q \geq p$$

suponiendo $\|u_0\|_n$ pequeña si $n > 2$. Las soluciones fuertes verifican la ecuación integral asociada a (NS).

En una serie de trabajos, Schonbek [49], Kajikiya-Miyakawa [38], Wiegner [50] se utilizan técnicas de Fourier para establecer que las soluciones débiles con datos L^2 se comportan en L^2 como las soluciones de la ecuación del calor con el mismo dato inicial para tiempos grandes. Para las soluciones fuertes de

Kato se puede realizar un estudio más detallado del comportamiento asintótico. Explicamos a continuación ([8, 10]) cómo obtener el primer y segundo término del desarrollo asintótico de una solución fuerte para tiempos grandes.

El punto de partida para estudiar el comportamiento de las soluciones fuertes de (NS) consiste en escribir la ecuación integral asociada:

$$(NSI) \quad u(t) = G(t) * u_0 - \int_0^t G(t-s) * u^i(s)\partial_i u(s) ds$$
$$- \int_0^t G(t-s) * \nabla E_n * div(u^i(s)\partial_i u(s)) ds$$

Hemos expresado la presión en términos de u. Nótese que

$$-\Delta p = div(u^i \partial_i u)$$

luego $p = E_n * div(u^i \partial_i u)$, siendo E_n la solución fundamental del laplaciano en dimensión n. Obsérvese asimismo que el semigrupo generado por el problema lineal es precisamente el del calor. De ahí la presencia en (NSI) de convoluciones con el núcleo del calor $G(t)$. A continuación, se desarrollan los términos integrales utilizando información sobre el decaimiento de $u(t)$ y $u(t) - G(t) * u_0$.

Sabemos por [37] que las normas de $u(t)$ decaen en tiempo como las normas de la solución de la ecuación del calor con el mismo dato, $G(t) * u_0$. Gracias a ello, podemos estimar la velocidad de decaimiento de las dos integrales presentes en (NSI). Deducimos así que, en primera aproximación, $u(t)$ se comporta como $G(t) * u_0$. Más aun, obtenemos estimaciones optimales sobre la velocidad de decrecimiento de $u(t) - G(t) * u_0$:

1. Sea u la solución de (NS) con dato inicial $u_0 \in L^p \cap L^2(R^2)$, $1 \leq p \leq 2$ tal que $div\ u_0 = 0$. Entonces, para $q \geq p$,

   i) Si $1 < p < 2$, $\|G(t) * u_0 - u(t)\|_q \leq Ct^{-\frac{2}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}} \quad t > 0$

   ii) Si $p = 1$, $\|G(t) * u_0 - u(t)\|_q \leq Ct^{\frac{-3}{2}+\frac{1}{q}} log\ t \quad t > 0$

   iii) Si $p = 2$, $t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|u(t)\|_q \to 0 \quad si\ t \to \infty$

2. Si $n \geq 3$, sea u una solución global de (NS) con dato inicial $u_0 \in L^p \cap L^n(R^n)$, $1 \leq p < n$, con norma L^n pequeña y tal que $div\ u_0 = 0$. Entonces, para $q \geq p$ se tiene

$$\|G(t) * u_0 - u(t)\|_q \leq Ct^{(-\frac{2}{p}+\frac{1}{q})\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}$$

El caso $p = 1$ requiere la utilización de espacios de Hardy. La posibilidad de utilizar espacios de Hardy en la estimación de las convoluciones en el término de presión no había sido observada hasta la fecha y es clave para obtener las estimaciones óptimas cuando $p = 1$, que son fundamentales a la hora de estudiar el segundo término.

Bajo hipótesis de integrabilidad adicionales sobre el dato inicial u_0, podemos dar la forma del segundo término en el desarrollo asintótico de $u(t)$. Basta hallar el primer término en el desarrollo de cada una de las integrales presentes en (NSI). Ello puede hacerse gracias a las estimaciones ya establecidas y a una delicada técnica de reescalamientos. El desarrollo de $G(t) * u_0$ es conocido [26]:

$$G(t) * u_0 \sim (\int u_0)G(t) + (\int x^i u_0)\partial_i G(t)...$$

La forma precisa del desarrollo de $u(t)$ hasta el segundo orden es la siguiente:

1. Fijamos $q \geq 1$. Sea u una solución de (NS) en dimensión $n = 2$ con datos iniciales $u_0 \in (L^2 \cap L^1)(R^2, 1 + |x|)$ tales que $div\ u_0 = 0$ y $u_0 \in L^{2r}(R^2)$ para algun r tal que $q \geq r > \frac{2q}{q+2}$. Denotamos $M = \int_{R^2} u_0(x)dx = (M^1, M^2)$ y $E_2 = \frac{1}{2\pi} log\ |x|$. Entonces,

   $$\frac{t^{\frac{3}{2}-\frac{1}{q}}}{log\ t}\|u(t) - MG(t) + R(t)\|_q \to 0 \quad si\ t \to \infty$$

   donde

   $$R(t) = log\ t\ \Big(\frac{M^i M}{2}\partial_i G(t)\ +\ \frac{M^i M^j}{2}\partial_i G(t) * \nabla\partial_j E_2\Big)$$

2. Para $n \geq 3$, sea u una solución fuerte de (NS) con datos $u_0 \in L^1(R^n, 1 + |x|) \cap L^n(R^n)$, $1 \leq p \leq n$, de norma L^n pequeña y $div\ u_0 = 0$. Tomamos $q \geq 1$. Si $u_0 \in L^{2r}(R^n)$ para algun $q \geq r > \frac{nq}{q+n}$ entonces

   $$t^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})}\|u(t) - MG(t) + m^i\partial_i G(t) + R(t)\|_q \to 0$$

   cuando $t \to \infty$, donde $R(t)$ viene dado por

   $$\Big(\int_0^\infty \int_{R^n} u^i u(\sigma, y)dyd\sigma\Big)\ \partial_i G(t) + \Big(\int_0^\infty \int_{R^n} u^i u^j(\sigma, y)dyd\sigma\Big)\partial_i G(t) * \nabla\partial_j E_n$$

   siendo E_n la solución fundamental de $-\Delta$ en R^n y

   $$M = \int_{R^n} u_0(x)dx; \quad m_i = \int_{R^n} x^i u_0(x)dx,\ i = 1, ...n$$

En estos desarrollos se aprecia la aportación de la nolinealidad al perfil de las soluciones para tiempos grandes. Por otra parte, se observa que si $n \geq 3$, incluso si tomamos datos con masa y momentos nulos, la velocidad de decaimiento de la norma L^q de la solución será de orden $t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})}$. Por el contrario, las soluciones del problema lineal puede decaer más rápido, incluso exponencialmente.

1.3 Unicidad de soluciones fundamentales y compacidad para nolinealidades tipo $|u|^{p-1}u$

Consideramos ecuaciones de convección-difusión de la forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + a \cdot \nabla(|u|^{q-1}u) = 0 & \text{en } R^n \times R^+,\ n \geq 1 \\ u(z,0) = u_0(z) & \text{en } R^n \end{cases}$$

con $u_0 \in L^1(R^n), a \in R^n$ y $1 < q < 1+\frac{1}{n}$. Ecuaciones de este tipo aparecen en el estudio de la difusión de contaminantes en rios [34]. Se trata de determinar cual es el perfil asintótico de las soluciones para tiempos grandes. Experimentalmente se observa la formación de choques, por lo cual es interesante determinar si este tipo de ecuaciones puede generar choques con el transcurso del tiempo y cual sería la estructura de esos choques.

Por simplicidad escribimos la ecuación en la forma

$$\text{(CD)} \quad u_t - \Delta u + \partial_y(|u|^{q-1}u) = 0 \quad \text{en } R^{n-1} \times R \times R^+$$

con $u = u(x,y,t), x \in R^{n-1}, y \in R$. Aquí, Δ denota el laplaciano en las variables x, y: $\Delta = \Delta_x + \frac{\partial^2}{partial^2 y}$.

En trabajos anteriores de Escobedo, Vazquez y Zuazua [28, 29] se estudió el caso $n = 1$ y el caso $n > 1$ con $u \geq 0$. En ambos casos las soluciones de (CD) con datos integrables tienden cuando $t \to \infty$ a la solución fundamental entrópica con masa $M = \int u_0$ de

$$\text{(CDR)} \quad f_t - \Delta_x f + \partial_y(|f|^{q-1}f) = 0 \quad \text{en } R^{n-1} \times R \times R^+$$

donde Δ_x denota el laplaciano en la variable x. La difusión en la dirección y desaparece y se forman choques en esa dirección. De hecho, la solución fundamental tiene soporte compacto en la dirección y. Esto es particularmente explícito en dimensión $n = 1$ donde toda la difusión despaparece de la ecuación y las soluciones fundamentales son las conocidas N-waves [42].

Para soluciones u de signo variable y en dimensión $n > 1$, quedaba por determinar si también aparecían choques para tiempos grandes y si la estructura del choque variaba. Nótese que en el resultado para soluciones positivas, el perfil del choque que se forma cuando $t \to \infty$ depende únicamente de la masa $M = \int u(x, y, t)dxdy$, que es una cantidad conservada, y no del signo de u. En [9, 11] vemos que efectivamente, aunque el signo de u varíe, el perfil que se observa para tiempos grandes viene dado por la solución fundamental entrópica con masa M de (CDR). Es decir, es el mismo para todas las soluciones que tengan la misma masa.

La restricción sobre el signo en los resultados de [29] es una restricción meramente técnica. La idea de la demostracción en [29] consiste en efectuar el cambio de escala

$$u_\lambda(x, y, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^{\frac{1}{2}} x, \lambda^\beta y, \lambda t), \quad \alpha = \frac{n+1}{2q}, \; \beta = \frac{n+1+q-nq}{2q}$$

Si u es solución de (CD), u_λ es solución de

$$(CD_\lambda) \quad u_{\lambda,t} - \Delta_x u_\lambda - \lambda^{1-2\beta} \partial^2_{yy} u_\lambda + \partial_y(|u_\lambda|^{q-1} u_\lambda) = 0 \quad \text{in} \quad R^{n-1} \times R \times R^+$$

con datos que tienden a una delta de Dirac, $M\delta$, si $\lambda \to \infty$. En nuestro rango de q, $1 - 2\beta < 0$. Se trata de probar que u_λ tiende a la solución fundamental entrópica f de (CDR) (que es invariante por el cambio de escala) cuando $\lambda \to \infty$. Al invertir el cambio se deduce que $u(t) \sim f(t)$ cuando t tiende a infinito.

En la demostración de [29] hay dos puntos clave que en principio fallan si u cambia de signo. Se necesita que la solución fundamental entrópica f de (CDR) con masa M sea única y sólo se sabe que es única si ademas se supone que es de signo constante. Por otra parte, se necesita una estimación uniforme sobre las derivadas de u_λ que proporcione compacidad para pasar al límite (estimación de entropía).

En [9, 11] probamos en primer lugar la unicidad de la solución fundamental entrópica con masa M de (CDR) sin restricciones sobre el signo. La idea consiste en probar que si $M \geq 0$ (resp. $M \leq 0$) entonces necesariamente la solución fundamental f con masa M es positiva (resp. negativa) y por tanto única. La dificultad principal proviene del hecho que el dato inicial tomado por la solución fundamental es una masa de Dirac, $M\delta$. Esta dificultad puede ser superada en la forma siguiente. Supongamos $M \geq 0$. Observamos que la parte positiva f^+ y la parte negativa f^- de f son subsoluciones de (CDR) que toman como dato inicial medidas positivas μ y ν respectivamente, con $M\delta = \mu - \nu$. Basta entonces probar que $f^+ \leq g$ y $f^- \leq g$ siendo g la solución de (CDR) con dato μ para concluir que $\nu = 0$, luego $f^- = 0$.

Por otra parte, obtenemos compacidad fuerte de $u_\lambda(t)$ en L^p sin necesidad de estimaciones uniformes sobre las derivadas. Basta generalizar a nuestro caso los resultados de compacidad obtenidos por Tadmor-Perthame y Lions [41] mediante el paso a formulaciones cinéticas. Nótese que, al no ser $C^{1,\alpha}$ nuestra nolinealidad, dichos resultados no se aplican directamente a nuestro problema y es necesario modificar pertinentemente sus argumentos (basados en el uso de transformadas de Fourier y desarrollos diádicos) para adaptarlos a nuestra nolinealidad. Hecho esto, concluimos que las soluciones u de signo variable tambien se comportan como las soluciones fundamentales de (CDR) en primera aproximación.

1.4 Coeficientes variables

Nos planteamos a continuación el problema de determinar la influencia de la difusión variable sobre el perfil de las soluciones de las ecuaciones de convección difusión para tiempos grandes. Consideramos en principio un problema con difusión asintóticamente constante, pero que puede variar arbitrariamente en acotados:

$$\begin{cases} u_t - div(a(x)\nabla u) + a\cdot\nabla(|u|^{q-1}u) = 0 & \text{en } R^n \times R^+,\ n \geq 1 \\ u(z,0) = u_0(z) & \text{en } R^n \end{cases}$$

con $1 \leq q \leq 1 + \frac{1}{n}$ y $a(x) = 1 + b(x) > \delta > 0$ donde b es una función regular y acotada que tiende a cero suficientemente rápido en el infinito. Duro y Zuazua [25] probaron que las soluciones con datos integrables se comportan como las soluciones de la ecuación del calor en primera aproximación. En el caso de difusión constante, la influencia de la nolinealidad en el segundo término del desarrollo ha sido estudiada en [51]. En [17] estudiamos la influencia de la difusión variable en el perfil asintótico para tiempos grandes. La conclusión es que la difusión variable sólo proporciona una correción en el segundo término del desarrollo asintótico si $q > 1 + \frac{2}{N}$.

La idea de la demostración es similar a la esbozada para Navier-Stokes. Se escribe la ecuación integral y se analizan todas las integrales que aparecen en ellas obteniendo los primeros términos del desarrollo. El análisis varía segun el rango en que se tomen q y la dimensión y requiere delicadas argumentaciones utilizando la teoría de semigrupos y estimaciones óptimas sobre las soluciones fundamentales asociadas al problema lineal [43].

2 Comportamiento asintótico en ecuaciones cinéticas

Los métodos esbozados para el estudio del comportamiento asintótico para tiempos grandes de las soluciones de ecuaciones de convección-difusión pueden ser utilizados para abordar otro tipo de ecuaciones. La idea de usar reescalamientos para obtener la primera aproximación del perfil asintótico es clásica en ecuaciones parabólicas nolineales. Por otra parte, las técnicas para el estudio de segundos términos introducidas en [10, 17] resultan ser bastante generales. En un trabajo reciente de [39] son utilizadas en ecuaciones tipo Korteweg-De Vries.

Consideramos a continuación la posibilidad de extenderlas al estudio del comportamiento asintótico en ecuaciones cinéticas, que describen la evolución de una densidad de particulas en diferentes condiciones. En estas ecuaciones aparece una nueva variable: la velocidad. Las soluciones son pues función de x, v, t. Para una introducción a este tipo de ecuaciones puede consultarse [40]. Dentro de las ecuaciones cinéticas, la ecuación de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck es (VPFP) sin duda la de estructura mas parecida a las ecuaciones de convección-difusión.

Consideramos el problema de determinar el perfil asintótico de las soluciones de las ecuaciones de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Estas ecuaciones son de interés en el estudio de plasmas en los que las colisiones no pueden ser despreciadas. Si suponemos que:

- se intercambia poco momento en la colisión
- el plasma se halla en un campo autoconsistente creado por las propias partículas

no es necesario recurrir a un operador integral de colisión como en la ecuación de Boltzman (véase [22] para una recopilación de resultados sobre la ecuación de Boltzman) y basta trabajar con las ecuaciones (VPFP). Tal es el caso en el estudio de la evolución de un gas 'pesado' sumergido en un gas 'ligero' en equilibrio (p. ej. problemas de fusión controlada). Las ecuaciones (VPFP) pueden obtenerse a partir de la ecuación de Boltzman, aproximando el operador de colisión en un cierto límite.

Denotando por $f(x, v, t)$ la densidad de partículas en la posición x, instante t con velocidad v, el sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck se escribe:

$$\begin{cases} f_t - \sigma \Delta_v f + v \nabla_x f + (E(f) - \beta v) \nabla_v f - N \beta f = 0 & \text{en } R^N \times R^N \times R^+ \\ f(x, v, 0) = f_0(x, v) & \text{en } R^N \times R^N \end{cases}$$

donde $E(\rho(f)) = \varepsilon(K *_x \rho(f))$ con $\rho(f) = \int_{R^N} f(x, v, t) dv$, y $K(x) = \frac{x}{S_N |x|^N}$, S_N siendo S_N el area de la esfera en R^N. Consideramos el caso $N = 3$, $\beta = 0$. El parámetro $\varepsilon = \pm 1$ según la interacción sea electrostática o gravitatoria. En esta ecuación coexisten un término de difusión en v, un término de transporte $(v \nabla_x f)$ y un término de convección en v.

Resultados de existencia y regularidad han sido establecidos entre otros por Victory- O'Dwyer [48], Rein-Weckler [47], Carrillo-Soler [20] para datos suficientemente pequeños. Posteriormente, Carrillo, Soler y Vazquez [21] probaron usando métodos de reescalamiento que las soluciones se comportan en primera aproximación como las soluciones de la ecuación libre (E=0) para tiempos grandes.

En [14] estudiamos la influencia de la nolinealidad en el perfil de las soluciones para tiempos grandes, que no se observa en la primera aproximación. Nuestro análisis se basa en el estudio de problemas linealizados con potenciales $E(x,t)$ acotados que decaen suficientemente rápido en el infinito. Estudiamos las soluciones fundamentales de dichos problemas, estableciendo estimaciones globales en tiempo en las que se acotan las soluciones fundamentales y sus derivadas en términos de la solución fundamental $G(x,v,t;\xi,\nu,\tau)$ del problema lineal con $E=0$. Se define la solución fundamental Γ_E asociada al potencial E como una funcion que satisface

$$\begin{cases} \Gamma_{E,t} - \Delta_v \Gamma_E + v\nabla_x \Gamma_E + E(x,t)\nabla_v \Gamma_E = 0 & (x,v,t) \in R^3 \times R^3 \times (\tau, T] \\ \Gamma_E(x,v,\tau;\xi,\nu,\tau) = \delta(x,v) & (x,v) \in R^3 \times R^3 \end{cases}$$

para (ξ,ν,τ) fijos. Si $E(x,t)$ es tal que:

i) $E \in L^\infty_{x,t}$

ii)$\|E(t)\|_{L^\infty_x} \leq \frac{C_\alpha}{(1+t)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ con $\alpha \geq 0$ y C_α pequeño $\alpha = 0$

entonces se tiene [15]:

$$0 \leq \Gamma_E(x,v,t;\xi,\nu,\tau) \leq C(\|E\|_{L^\infty_{xt}}) G(\frac{x}{2},\frac{v}{2},t;\frac{\xi}{2},\frac{\nu}{2},\tau)$$

$$\nabla_v \Gamma_E(x,v,t;\xi,\nu,\tau) \leq C(\|E\|_{L^\infty_{xt}}) G(\frac{x}{2},\frac{v}{2},t;\frac{\xi}{2},\frac{\nu}{2},\tau)(t-\tau)^{\frac{-1}{2}}$$

para $0 < t-\tau < \infty$, $\tau \geq 0$, $x,v,\xi,\nu \in R^3$.

Gracias a estas cotas, obtenemos estimaciones optimales sobre el decaimiento de la diferencia entre las soluciones de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck y la solución de la ecuación libre con el mismo dato inicial. Hecho esto, es posible obtener precisar en desarrollo asintótico para tiempos grandes mostrando la influencia de la nolinealidad como en [17].

4 Modelos de dislocaciones

Las dislocaciones son defectos en la estructura atómica de los materiales cristalinos (metales, semiconductores...), soportados a lo largo de 'curvas', que controlan una amplia gama de propiedades de los cristales. En particular, propiedades mecánicas como la plasticidad y la velocidad de crecimiento del cristal. Se ha comprobado experimentalmente que todo cristal posee una red de dislocaciones distribuidas en él. Al aplicar una fuerza, las dislocaciones se mueven, interaccionan unas con otras y son creadas en ciertos puntos de nucleación generando complejas estructuras. Este proceso microscópico es el responsable de la deformación plástica del cristal y la variación en la resistencia del mismo que observamos a escala macroscópica.

En general, los cristales son materiales dúctiles. Es decir, si se aplica una fuerza pequeña se deforman elásticamente, de forma reversible. Si la fuerza aplicada supera un valor crítico, la deformación pasa a ser irreversible, o sea plástica. El inicio de la deformación plástica coincide con la puesta en movimiento de las dislocaciones del cristal, que permanecen ancladas hasta que la fuerza aplicada es suficientemente grande. Si seguimos aumentando la fuerza aplicada llega en momento en que el movimiento, interacción y generación de dislocaciones ha creado una compleja y densa estructura de dislocaciones en el cristal, de forma que unas dislocaciones obstaculizan el movimiento de las otras. En ese momento, la resistencia del cristal a la deformación se hace máxima (endurecimiento por trabajado). Si seguimos aumentando la fuerza aplicada, llegará un momento en que el material se fracture.

Esta teoría de la plasticidad está basada en observaciones experimentales. Sin embargo, la modelización matemática de cómo las dislocaciones presentes en la estructura atómica y su evolución controlan la deformación plástica del cristal y su resistencia ha progresado poco. Se han realizado intentos de modelizar la plasticidad mediante la mecánica de medios contínuos, postulando diversas leyes de comportamiento para el régimen plástico. Sin embargo, ninguna de esas leyes de comportamiento está sólidamente fundamentada. El principal problema es que no está claro cual es la información microscópica relevante que hay que incluir en la ley de comportamiento. En vista de este panorama, se han introducido algunos modelos discretos que estudian la evolución de la posición de los átomos del cristal sujetos a interacción con los demás átomos y a una fuerza exterior. La mayoría de dichos modelos consideran la interacción de cada átomo con todos los demás por lo que son en la práctica imposibles de estudiar analíticamente y su estudio numérico es excesivamente costoso.

En colaboración con miembros del OCIAM de Oxford he realizado algunos trabajos en los que investigamos otras formas de abordar el problema. En primer lugar hemos formulado modelos discretos simples, que sólo consideran la interacción de cada átomo con los vecinos mas próximos. Estos modelos nos han permitido estudiar numéricamente la dinámica de dislocaciones aisladas o pequeños grupos de dislocaciones. En el caso unidimensional, identificando la dislocación con ondas discretas hemos podido estimar la fuerza crítica necesaria para moverla. El tratamiento de redes de dislocaciones realistas (del orden de 10^{10} dislocaciones por cm^2) y la homogeneización de esta información discreta para obtener una descripción macroscópica están de momento fuera de nuestro alcance. Por ello, hemos investigado la posibilidad de describir la interacción de dislocaciones mediante sistemas de leyes de conservación en los que postulamos leyes de velocidad empíricas.

1 Dinámica de dislocaciones: dinámica de singularidades, ondas viajeras discretas

El primer problema que se plantea es el de determinar a partir de un modelo conveniente cual es la fuerza crítica a partir de la cual una dislocación comienza a moverse y cual es la velocidad de una dislocación en función de la fuerza externa aplicada, supuesta mayor que la fuerza crítica.

Una primera forma de intentar abordar el problema es la siguiente. Una dislocación viene a ser una región del cristal donde los desplazamientos de los átomos son demasiado grandes para aproximar el cristal por un medio contínuo y utilizar las ecuaciones de la elasticidad lineal. Por tanto, puede ser vista como una singularidad en las ecuaciones de la elasticidad. Esto sugiere una analogía con otras singularidades de codimensión dos, i.e., soportadas por curvas, que aparecen en otros contextos físicos: vórtices en fluidos y vórtices en superconductores tipo II.

En diversos trabajos [45], [23] se consigue determinar la dinámica de vórtices mediante métodos asintóticos. La idea consiste en acoplar las ecuaciones de Euler (resp. London) lejos del vórtice fluido (resp. superconductor) con las ecuaciones de Navier-Stokes (resp. Ginzburg-Landau) cerca del vórtice. La condición de acoplamiento proporciona una relación que nos da la velocidad del vórtice en función del campo aplicado.

En [13] investigamos la posibilidad de aplicar estos métodos a la dinámica de dislocaciones. Mostramos que la analogía falla porque ningun modelo continuo es válido en la zona dislocada, la evolución cerca de la dislocación es intrínsicamente discreta. En vista de la imposibilidad de utilizar los métodos asintóticos usuales y dada la naturaleza discreta de la singularidad, recurrimos a simulaciones numéricas con el fin de determinar una ley para la velocidad de la dislocación en función de la fuerza externa aplicada. Esto plantea la cuestión de cual es el modelo discreto a utilizar.

En [18] proponemos y analizamos algunos modelos discretos para la evolución de una dislocación bidimensional bajo una fuerza externa. Estudiamos primero un modelo que sólo permite movimiento en una dirección. Consideramos un retículo bidimensional infinito y denotamos por $u_{i,j}(t)$ el desplazamiento en la dirección x del átomo (i,j). La evolución de $u_{i,j}(t)$ viene dada por

$$u'_{i,j} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + A(\sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \sin(u_{i,j-1} - u_{i,j})$$

Este modelo sólo tiene en cuenta la interacción del átomo (i,j) con sus vecinos mas próximos y se reduce a la elasticidad escalar isótropa lejos de las singularidades.

Se puede generar una solución tipo dislocación en el cristal a partir del dato inicial $\theta(i,j)$, siendo $\theta(x,y) \in [0,2\pi)$ la función ángulo. La fuerza externa aplicada entra en el modelo a traves de las condiciones frontera. Si imponemos una fuerza de cizalla en la dirección x de magnitud F, las condiciones frontera para $u_{i,j}$ son $u_{i,j} \sim \theta(i,j) + F \cdot j$ cuando $|i| + |j| \to \infty$. Es posible probar analíticamente la existencia de dislocaciones estacionarias para fuerzas externas F pequeñas. Por otra parte, las simulaciones numéricas confirman que este modelo tiene soluciones tipo dislocación estacionaria para fuerzas pequeñas y sin embargo para fuerzas grandes posee soluciones tipo dislocación que se deslizan en la dirección x a una velocidad determinada.

Se puede proponer asimismo un modelo un poco mas complejo ([18]) que hace intervenir los desplazamientos $u_{i,j}$ y $v_{i,j}$ en las direcciones x e y. Dicho modelo permite el movimiento en todas direcciones y se reduce como cabía esperar a las ecuaciones de Navier lejos de la dislocación. En este caso, tambien se pueden generar numéricamente soluciones tipo dislocación en las que $u_{i,j} \sim u(i,j)$ y $v_{i,j} \sim v(i,j)$ lejos de la singularidad, donde

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{b}{2\pi}\left(\tan^{-1}(y/x) + \tfrac{xy}{2(1-\nu)(x^2+y^2)}\right) \\ v &= -\tfrac{b}{2\pi}\left(\tfrac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\log(x^2+y^2) + \frac{x^2-y^2}{4(1-\nu)(x^2+y^2)}\right) \end{aligned}$$

siendo ν el coeficiente de Poisson del material. Estas soluciones son estacionarias cuando la fuerza externa es pequeña y comienzan a moverse a una cierta velocidad para fuerzas mayores que un valor crítico.

Las simulaciones sugieren la identificación de las dislocaciones con ondas viajeras para fuerzas mayores que la crítica y ondas estacionarias para fuerzas menores que la crítica. Sólo nos ha sido posible probar analíticamente el resultado para el caso estacionario. La existencia de ondas viajeras discretas bidimensionales con el comportamiento en el infinito deseado es mucho más dificil de abordar. Como paso previo en esa dirección, hemos estudiado las ondas viajeras y estacionarias en un modelo discreto unidimensional.

En [16] estudiamos la existencia de ondas estacionarias y viajeras para un modelo de Frenkel-Kontorova disipativo:

$$\text{(FK)} \quad u_{n,t} - (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = -A\text{sen}(u_n) + F$$

Este modelo describe la propagación de una dislocación unidimensional, que se identifica con una onda discreta tipo 'kink' que tiende a 0 en $-\infty$ y a 2π en ∞. Probamos que para fuerzas $F > 0$ pequeñas existen ondas estacionarias (la dislocación no se mueve) y que si F es mayor que un valor crítico $F_c > 0$ existen ondas viajeras tipo $u_n(t) = v(n - ct)$ (la dislocación se mueve) con velocidad $c = c(F)$. El perfil de la onda viajera $v(z)$ es solución de la ecuación:

$$v_z - v(z+1) + 2v(z) - v(z-1) = -A\text{sen}v + f$$

Damos una estimación del valor crítico de la fuerza F_c en función de A. Nótese el contraste con el análogo continuo:

$$u_t - u_{xx} = -A\ \text{sen}(u) + F$$

que posee soluciones tipo ondas viajeras para todo $F > 0$, o sea, $F_c = 0$. La existencia de una fuerza crítica es pues un fenómeno intrínsicamente discreto.

2 Sistemas de leyes de conservación no estrictamente hiperbólicos y mixtos

Los modelos discretos anteriormente citados permiten la simulación numérica de la interacción entre pequeños grupos de dislocaciones. Sin embargo, no está claro cómo homogeneizar esa información microscópica para investigar la interacción de grandes densidades. Cabe plantearse otra posibilidad, que consiste en usar leyes de velocidad empíricas para tratar de formular modelos continuos.

En [15] proponemos un modelo para la descripción de la interacción de dos poblaciones de dislocaciones en una geometría unidimensional. Basándonos en datos empíricos, postulamos leyes de velocidad para cada población y obtenemos un sistema de leyes de conservación que degenera en algunas regiones, pasando de ser hiperbólico a parabólico o elíptico. Por tanto, el problema de valores iniciales deja de estar bien puesto en cuanto la solución entra en la zona elíptica. El inicio de la zona elíptica se produce en una región donde se espera el inicio de la formación de estructuras complejas e inestables.

En su forma mas simple, el modelo es el siguiente:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1((a_1 - c_1\sqrt{w_2})^+)^{\gamma_1}) = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x}(\omega_2((a_2 - c_2\sqrt{w_1})^+)^{\gamma_2}) = 0, \tag{4.2}$$

donde ω_1, ω_2 representan las densidades de dislocaciones tipo 1 y 2 y a_1, a_2 las componentes de la fuerza externa que actúan sobre las dislocaciones tipo 1 y 2, respectivamente. La velocidad de las dislocaciones tipo i viene dada por $v_i = ((a_i - c_i\sqrt{w_j})^+)^{\gamma_i}$ con $\gamma_i > 0$. El término $-c_i\sqrt{w_j}$ refleja la oposición de la densidad w_j al avance de la población w_i. Nótese que la velocidad es nula si la fuerza externa no es suficientemente grande. El sistema puede ser regularizado hasta cierto punto teniendo en cuenta la interacción entre dislocaciones del mismo tipo. Esto proporciona una correción en la ley de velocidad que tiene en ciertas condiciones un efecto regularizante. El sistema 'regularizado' toma la forma:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1((a_1 - c_1\sqrt{w_2} - b_1 w_{1,x})^+)^{\gamma_1}) = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x}(\omega_2((a_2 - c_2\sqrt{w_1} \pm b_2 w_{2,x})^+)^{\gamma_2}) = 0, \tag{4.4}$$

con $b_1 > 0, b_2 < 0$. En [19] estudiamos la estructura de algunas soluciones de los modelos propuestos en [15] con el fin de comprobar hasta qué punto reproducen mecanismos de interacción observados experimentalmente. En particular, construimos varias familias de soluciones (estacionarias, ondas viajeras, ondas de rarefacción, tipo pile-up...) de interes físico. Son particularmente interesantes las soluciones tipo pile-up, que muestran como una gran acumulación de dislocaciones de un tipo forma una barrera y produce una aglomeración creciente de las otras dislocaciones en la barrera. Este fenómeno ha sido observado experimentalmente. Los modelos propuestos exhiben por tanto un mecanismo elemental de pile up que está matemáticamente ligado a la pérdida de la hiperbolicidad estricta en el sistema.

Las soluciones tipo pile-up pueden ser construidas por el método de características en el caso del sistema de leyes de conservación (4.1,4.2). Para el problema regularizado (4.3,4.4) con $\gamma_i = 1$ estas soluciones pueden ser construidas resolviendo un problema de frontera libre. Conviene resaltar que cuando las soluciones de (4.1,4.2) presentan saltos, son una buena aproximación de la solución física solo fuera de una capa límite en torno al salto. En la región del salto, ha de considerarse el modelo regularizado con b_i pequeño, que proporciona una pequeña correción.

Modelos de este tipo, formulados en términos de sistemas de leyes de conservación que tienen regiones elípticas o parabólicas, aparecen en otros numerosos contextos. Cabe citar entre otras las ecuaciones de recuperación de petróleo (oil-recovery), fluidos bifásicos, migración de poblaciones, las ecuaciones de gases de Van der Waals... En todos estos casos, el problema de valores iniciales está mal puesto en cuanto se cae en la región elíptica por lo que tanto el estudio numérico como el estudio analítico de tales problemas resulta enormemente complicado. Ello ha dado lugar a numerosos trabajos (véase [30] y su bibliografía) sobre el tema aunque la situación general es bastante confusa. Prácticamente, hay que hacer un estudio caso por caso teniendo en cuenta la física del problema a la hora de buscar soluciones e interpretarlas. Más tratables son los problemas estacionarios en los que hay cambio de tipo (Euler transónico, por ejemplo).

Agradecimientos

Desearía manifestar mi profundo agradecimiento a Enrike Zuazua, John Ockendon y Jon Chapman por la positiva influencia que han tenido en mi evolución científica. Parte de esta investigación ha sido subvencionada por la DGES (PB96-0663 y acción integrada con Inglaterra HB1997-0162) y la EC a través del TMR ERB-FMRXCT-960033.

Referencias

[1] Bahri, A., Coron, J.M., On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent. The effect of the topology of the domain. Comm. Pure and Appl. Math. Vol 41, 1988, 253-294

[2] Carpio, A., Comte, M., Lewandowski, R., A non existence result for an elliptic equation involving critical Sobolev exponents. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Nonlinéaire, 9 (3), 243-261, 1992.

[3] Carpio, A., Sharp estimates of the energy decay for solutions of second order dissipative evolution problems. Potential Analysis, 1, 265-289, 1992.

[4] Carpio, A., Existence de solutions globales rétrogrades pour des équations des ondes non linéaires dissipatives. C.R.A.S. Paris, t. 316, Série I, 803-808, 1993.

[5] Carpio, A., Existence of global solutions to some nonlinear dissipative wave equations. J. Math. Pures et Appl., 73 (5), 471-488, 1994.

[6] Carpio, A., Comportement asymptotique des solutions des équations du tourbillon en dimensions 2 et 3. C.R.A.S. Paris, 316, S I, 1289-1294, 1993.

[7] Carpio, A.,Asymptotic behaviour of solutions to the vorticity equations in dimensions two and three. Comm. in P.D.E., 19 (5-6), 827-872, 1994.

[8] Carpio, A., Comportement asymptotique dans les équations de Navier-Stokes. C.R.A.S. Paris, t. 319, Série I, 223-228, 1994.

[9] Carpio, A., Unicité et comportement asymptotique pour des équations de convection diffusion scalaires. C.R.A.S. Paris, t. 319, Série I, 51-56, 1994

[10] Carpio, A., Large time behavior for solutions of incompressible Navier-Stokes equations. SIAM J. on Math. Anal., 27 (2), 449-475, 1996

[11] Carpio, A., Asymptotic behaviour for some convection-diffusion equations, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie IV, v XXIII (3), 551-574, 1996

[12] Carpio, A., Boltzman-en ekuazioa. Ekaia, 4, 135-146, 1996

[13] Carpio, A., Chapman, S.J., Howison, S., Ockendon, J.R., Dynamics of line singularities, Philosophical transactions of the Royal Society, A, 355, 2013-2024, 1997

[14] Carpio, A., Long time behavior for solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Plank equation, Math. Meth. in the Appl. Sci., 21, 985-1014, 1998

[15] Carpio, A., Chapman, S.J., On the modelling of instabilities in dislocation interaction, Philosophical Magazine B, 78, 2, 155-157, 1998

[16] Carpio, A., Chapman, S.J. Hastings, S.P., Mcleod, J.B., Wave solutions for a discrete reaction-diffusion equation, European Journal of Applied Mathematics, en vías de publicación

[17] Carpio, A., Duro, G., Asymptotic profiles for convection-diffusion equations with variable diffusion, Nonlinear Analisis T.M.A., en vías de publicación

[18] Carpio, A., Chapman, S.J., Ockendon, J.R., Discrete models for dislocation dynamics, preprint

[19] Carpio, A., Chapman, S.J., Velázquez, J.J.L., Pile-up solutions for some mixed hyperbolic systems modeling dislocation interaction, Proceedings of the 2nd Venice Symposium on Applied and Industrial Mathematics, en vías de publicación.

[20] Carrillo, J.A. and Soler, J., On the initial value problem for the Vlasov-Poisson-Fokker-Plank system with initial data in L^p spaces, Math. Meth. Appl. Sci., 18, 825-839, 1995.

[21] Carrillo, J.A., Soler, J. and Vazquez, J.L., Asymptotic behavior and selfsimilarity for the three dimensional Vlasov-Poisson-Fokker-Plank system, to appear.

[22] Cercinagni, C., The Boltzmann equation and its applications, Springer-Verlag, New York, 1988

[23] Chapman, S.J. A mean field model of superconducting vortices in three dimensions, SIAM J. Appl. Math., 55 (5), 1259-1274 (1995).

[24] Ding, W.Y. Positive solutions of $-\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ in contractile domains. J. Partial Diff. Eqs 2 (1989), 4, 83-88

[25] G. Duro and E. Zuazua, Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbb{R}^N$ with asymptotically constant diffusion, C. R. Acad. Sci. Paris, t.321, Série I, (1995), 1419-1424.

[26] J. Duoandikoetxea, E. Zuazua, Moments, Masses de Dirac et decomposition de fonctions, C.R.A.S. Paris, 315 (1992), pp. 693 - 698.

[27] M. Escobedo and E. Zuazua, Large time behaviour for convection-diffusion equations in R^n. J. of Funct. Anal, 100, 1 (1991), 119-161

[28] M. Escobedo, J.L. Vázquez, E. Zuazua, Asymptotic behaviour and source type solutions for a diffusion-convection equation, Arch. Rat. Mech. Anal., 124,1993, 43-65.

[29] M. Escobedo, J.L. Vázquez, E. Zuazua, A diffusion-convection equation in several space dimensions, Indiana Math. J., 42(4), 1993, 1413-1440.

[30] Fitt, A., Mixed systems of conservation laws in industrial mathematical modelling, Surv. Math. Ind, 1996, 6, 21-53.

[31] Giga, Y.- Kambe, T. Large time behaviour of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation. Comm. Math. Phys. 117 (1988), 549-568.

[32] Giga, Y. - Miyakawa, T. Navier-Stokes flow in R^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces. Comm. in P.D.E. 14 (5), 577-618, (1989)

[33] Giga, Y. - Miyakawa, T. - Osada, H. Two - dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity. Preprint

[34] C.N. Dawson, C.J. Van Duijn, R.E. Grundy, Long time asymptotics in contaminant transport in porous media, SIAM J. Appl. Maths., 56, 4, 965-993.

[35] Haraux, A. Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains. Mathematical Reports, Vol 3 (1987)

[36] Haraux, A. - Zuazua, E. Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, Arch. Rat. Mech. Anal. 100,2 (1988), 191-206.

[37] T. Kato, Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in R^n with applications to weak solutions, Math. Z. 187 (1984), pp. 471-480.

[38] R. Kajikiya, T. Miyakawa, On L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in R^n, Math. Z. 192 (1986), pp. 135-148.

[39] Karch, G., Large-time behavior of solutions to nonlinear wave equations: higher order asymptotics, prepublicación del Mathematical Institute, Universidad de Wroclaw.

[40] Lifschitz, E.M., Pitaevski, L.P., Physical kynetics, Course of theoretical Physics, Vol 10, Pergamom Press, 1981.

[41] P.L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations, J.A.M.S, 7(1), 1994, 169-191.

[42] T.P. Liu, M. Pierre, Source-Solutions and asymptotic behavior in conservation laws, J. Diff. Eqs. 51, 1984, 419-441.

[43] M. Murata, Large time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations, Math. Journal, 37, (1985), 151-195.

[44] Nakao, M. Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with a nonlinear dissipative term. J. Math. Anal. Appl. 58 (1977) 336-343

[45] Neu, JC, Vortices in complex scalar fields-Vortex dynamics of the nonlinear wave equation, Physica D, 1990, 43, 2-3, 385-420

[46] Pozohaev, S. Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Dokl. Acad. Nauk. S.S.S.R., Vol 165, 1965, 33-36

[47] Rein, G. and Weckler, J., Generic global classical solutions of the Vlasov-Fokker-Plank-Poisson system in three dimensions, J. of Diff. Eqs., 99, 59-77, 1992.

[48] Victory, H.D. and O'Dwyer, B.P., On classical solutions of Vlasov-Poisson-Fokker-Plank systems, Ind. Univ. Math. J., 3,1, 105-155, 1990.

[49] M.E. Schonbek, L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 88 (1985), pp. 209-222.

[50] M. Wiegner, Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on R^n, J. London Math. Soc. 35 (1987), 303-313.

[51] E. Zuazua, Weakly nonlinear large time behaviour in scalar convection-diffusion equations, Integral & Diff. Eqs., 6 (1993), 6, 1481-1492