

# Boletín Electrónico de **SēMA**

Número 10, Diciembre 2015

**SēMA**  
**BOLETÍN ELECTRÓNICO NÚM. 10**  
**Diciembre 2015**

## Índice

<b>1 Editorial</b>	<b>2</b>
<b>2 Artículos</b>	<b>3</b>
2.1 Knotted vortex lines and vortex tubes in stationary fluid flows . . . . .	3
2.2 Toma de decisiones bajo incertidumbre en la industria del petróleo .	24
<b>3 Otras noticias y anuncios</b>	<b>36</b>
3.1 Sobre la escuela <i>New Perspectives in Markov Chain Monte Carlo</i> . .	36
3.2 Enrique Zuazua, elegido miembro de la <i>Academia Europaea</i> . . . . .	39
3.3 SeMA Journal . . . . .	40
3.4 Noticias de RedIUM . . . . .	42
<b>4 Socios Institucionales de SeMA</b>	<b>44</b>

# 1 Editorial

Estimados socios:

En primer lugar, queremos dar las gracias a todos aquellos que habéis colaborado en la confección de este Boletín y al Comité Editorial por sus valiosos comentarios. No olvidéis que uno de los objetivos de la publicación del Boletín es la visibilidad social de SĒMA, y esto es tarea de todos. Tampoco queremos olvidar a nuestros socios institucionales y a los patrocinadores de nuestra sociedad, a quienes agradecemos su colaboración.

En este ejemplar, queremos dar las gracias especialmente a Alberto Enciso y Daniel Peralta-Salas por su trabajo sobre fluidos, a Rubén Rodríguez y Francisco José Mustieles (nuestro querido Pape) por su magnífico trabajo sobre modelización matemática aplicada a la industria del petróleo, y a REPSOL por dar apoyo a dicha publicación. También queremos agradecer la reseña sobre las jornadas “New Perspectives in Markov Chain Monte Carlo” que ha realizado nuestra compañera Mari Paz Calvo.

Queremos felicitar a uno de nuestros socios, Enrique Zuazua, por su elección como miembro ordinario de la Academia Europæa (Academia Europea de Humanidades, Letras y Ciencias) en su sección de Matemáticas.

Este número incluye también el índice de los últimos ejemplares del SĒMA Journal y la segunda convocatoria del Programa de Estancias Posdoctorales de RedIUM (Red de Institutos Universitarios de Matemáticas).

Para finalizar, deseamos que el año 2016 sea productivo para actividad investigadora, de progreso para vuestras aspiraciones profesionales y satisfactorio desde el punto de vista docente.

Como siempre, esperamos que la lectura de este ejemplar os resulte de interés.

Un cordial saludo

Los Editores

[boletin@sema.org](mailto:boletin@sema.org)

## 2 Artículos

### 2.1 Knotted vortex lines and vortex tubes in stationary fluid flows

El siguiente artículo, debido a Alberto Enciso y a Daniel Peralta-Salas, apareció publicado en la *EMS Newsletter* (el boletín de la European Mathematical Society) en su número de Junio de 2015, y aparece aquí también gracias a la gentileza de sus autores y con el permiso explícito de los Editores de *EMS Newsletter*, a quienes desde aquí expresamos nuestro más sincero agradecimiento.

## Knotted vortex lines and vortex tubes in stationary fluid flows

---

Alberto Enciso and Daniel Peralta-Salas  
ICMAT, Madrid

### Abstract

In this paper we review recent research on certain geometric aspects of the vortex lines of stationary ideal fluids. We mainly focus on the study of knotted and linked vortex lines and vortex tubes, which is a topic that can be traced back to Lord Kelvin and was popularized by the works of Arnold and Moffatt on topological hydrodynamics in the 1960s. In this context, we provide a leisurely introduction to some recent results concerning the existence of stationary solutions to the Euler equations in Euclidean space with a prescribed set of vortex lines and vortex tubes of arbitrarily complicated topology.

### 1. Introduction

The dynamics of an inviscid incompressible fluid flow in  $\mathbb{R}^3$  is modeled by the hydrodynamical Euler equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla P, \quad \operatorname{div} u = 0,$$

where  $u(x, t)$  is the velocity field of the fluid, which is a time-dependent vector field, and  $P(x, t)$  is the pressure function, which is defined by these equations up to a constant. This system of partial differential equations was first published by

Leonhard Euler in 1757, one year after the birth of the great composer Wolfgang Amadeus Mozart, and still stands as a major challenge for engineers, physicists and mathematicians.

The motion of the particles in the fluid is described by the integral curves of the velocity field, that is, by the solutions to the non-autonomous ODE

$$\dot{x}(t) = u(x(t), t)$$

for some initial condition  $x(t_0) = x_0$ , and are usually called *particle paths*. The integral curves of  $u(x, t)$  at fixed time  $t$  are called *stream lines*, and thus the stream line pattern changes with time if the flow is unsteady.

Another time-dependent vector field that plays a crucial role in fluid mechanics is the *vorticity*, defined by

$$\omega := \operatorname{curl} u .$$

This quantity is related to the rotation of the fluid and is a measure of the entanglement of the stream lines. The integral curves of the vorticity  $\omega(x, t)$  at fixed time  $t$ , that is to say, the solutions to the autonomous ODE

$$\dot{x}(\tau) = \omega(x(\tau), t)$$

for some initial condition  $x(0) = x_0$ , are the *vortex lines* of the fluid at time  $t$ . A domain in  $\mathbb{R}^3$  that is the union of vortex lines and whose boundary is a smoothly embedded torus is called a (closed) *vortex tube*. Obviously, the boundary of a vortex tube is an invariant torus of the vorticity.

In this short note we will be concerned with *stationary* solutions of the Euler equations, which describe an equilibrium configuration of the fluid. In this case, the velocity field  $u$  does not depend on time, and the Euler equations can then be written as

$$u \times \omega = \nabla B , \quad \operatorname{div} u = 0 ,$$

where  $B := P + \frac{1}{2}|u|^2$  is the Bernoulli function. This is a fully nonlinear system of partial differential equations, so a priori it is not easy to see for which choices of the function  $B$  there exist any solutions and which properties they can exhibit. It is obvious that for stationary flows, the particle paths coincide with the stream lines.

Our goal in this article is to introduce some results in fluid mechanics whose common denominator is that the main objects of interest are the stream and vortex lines of ideal fluid flows. In particular, we shall review the recent construction of stationary solutions to the Euler equations in  $\mathbb{R}^3$  describing topologically nontrivial fluid structures [4, 5]. Mathematically, these problems are extremely appealing because they give rise to remarkable connections between different

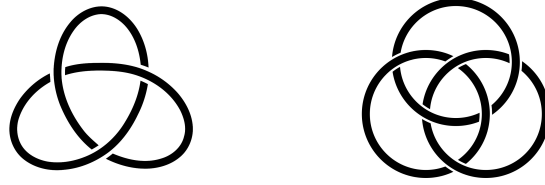


Figura 1: The problem involves showing that there are stationary solutions of the Euler equations realizing links, e.g. the trefoil knot and the Borromean rings depicted above, as vortex lines or vortex tubes.

areas of mathematics, such as partial differential equations, dynamical systems and differential geometry. From a physical point of view, these questions are often considered in the Lagrangian approach to turbulence and in the study of the hydrodynamical instability.

In this context, a major problem that has attracted considerable attention is the existence of knotted and linked vortex lines and tubes <sup>1</sup>, see Fig. 1. The interest in this question dates back to Lord Kelvin [20], who developed an atomic theory in which atoms were understood as stable knotted thin vortex tubes in the ether, an ideal fluid modeled by the Euler equations. Kelvin's theory was inspired by the transport of vorticity discovered by Helmholtz [12], which in particular implies that the vortex tubes are frozen within the fluid flow and hence their topological structure does not change with time. Vortex tubes were called water twists by Maxwell, and were experimentally constructed by Tait by shooting smoke rings with a cannon of his own design. The stability required by Kelvin's atomic theory led him to conjecture in 1875 that thin vortex tubes of arbitrarily complicated topology can arise in stationary solutions to the Euler equations [21].

The mathematical elegance of Kelvin's theory, in which each knot type corresponds to a chemical element, captivated the scientific community for two decades. However, by the end of the XIX century, with the discovery of the electron and the experimental proof that the ether does not exist, it was clear that this theory was erroneous. Nevertheless, Kelvin's vortex tubes hypothesis was an important boon for the development of knot theory and fluid mechanics. In particular, Kelvin's conjecture has been a major open problem since then and has had a deep influence in mathematics.

In modern times, the study of knotted vortex tubes is a central topic in the so called topological hydrodynamics [3], a young area that was considerably

---

<sup>1</sup>We recall that a knot is a smooth closed curve in  $\mathbb{R}^3$  without self intersections, and a link is a disjoint union of knots.

developed after the foundational works of Arnold [1, 2] and Moffatt [14]. Arnold, in his celebrated structure theorem, classified the topological structure of the stationary solutions when the Bernoulli function is not identically constant, and he conjectured that a particular class of stationary solutions called Beltrami flows, should exhibit stream lines of arbitrarily complicated topology <sup>2</sup>. Moffatt introduced the concept of helicity to study the entangledness and knottedness of the fluid, and gave a heuristic argument supporting the existence of stationary states with stream lines of any knot type [15], leaving completely open the case of vortex lines and tubes <sup>3</sup>. A stronger conjecture was stated in the 1990s by R.F. Williams [22], who asked about the existence of a fluid flow having stream lines tracing out all knots. The main difficulty of these problems is that they lie somewhere between the partial differential equations and the dynamical systems, which explains why purely topological or analytical techniques have not been very successful in these kinds of problems.

It should be emphasised that the interest of Kelvin’s conjecture is not merely academic; in fact spectacular recent experiments by Kleckner and Irvine at the University of Chicago [13] have physically supported the validity of Kelvin’s conjecture through the experimental realisation of knotted and linked vortex tubes in actual fluids using cleverly designed hydrofoils, see Fig. 2. Furthermore, the existence of topologically complicated stream and vortex lines is crucial in the study of the Lagrangian theory to turbulence and in magnetohydrodynamics.

The article is organized as follows. In Section 2 we explain how Helmholtz’s transport of vorticity gives rise to knotted structures in the time-dependent Euler equations (for short times), and review Moffatt’s heuristic argument suggesting the existence of stream lines of any knot type in stationary Euler flows. In Section 3 we state Arnold’s structure theorem and introduce Beltrami fields and Arnold’s conjecture in this context; we also review the geometric approach of Etnyre and Ghrist to address the existence of knotted vortex lines and tubes in the stationary Euler equations. In Sections 4 and 5 we state the realisation theorems on vortex lines [4] and vortex tubes [5], proved recently by the authors of this note, which establish Kelvin’s and related conjectures; we also include readable detailed sketches of the proofs of these results.

---

<sup>2</sup>In Arnold’s words [1]: “Il est probable que les écoulements tels que  $\text{curl } v = \lambda v$ ,  $\lambda = \text{cte}$ , ont des lignes de courant à la topologie compliquée”.

<sup>3</sup>In Moffatt’s words [16]: “there may exist steady knotted vortex tubes configurations, but no technique has as yet been found to prove the existence of such configurations”.

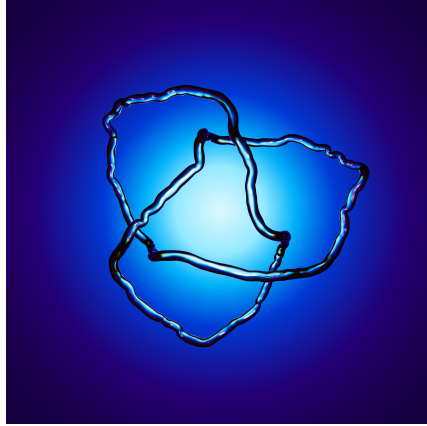


Figura 2: A knotted vortex tube of water obtained in the Irvine Lab at the University of Chicago. Figure courtesy of William Irvine.

## 2. Helmholtz's transport of vorticity and Moffatt's magnetic relaxation argument

In 1858 Helmholtz [12] discovered that the vorticity is transported by ideal fluid flows, so that for different times  $t_0$  and  $t_1 > t_0$  the phase portraits of the autonomous vector fields  $\omega(\cdot, t_0)$  and  $\omega(\cdot, t_1)$  are topologically equivalent. This turned out to be a fundamental mechanism in fluid mechanics that placed the vorticity in a leading role in order to analyse the Euler equations.

Using the transport of vorticity, it is easy to construct time-dependent solutions of the Euler equations with vortex lines of complex topology. The basic idea is the following: Suppose that  $u(x, t)$  is a time-dependent solution of the Euler equations. Then its vorticity satisfies the transport equation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = [\omega, u],$$

with  $[\cdot, \cdot]$  the commutator of vector fields. Therefore, the vorticity at time  $t$  can be expressed in terms of the vorticity  $\omega_0(x)$  at time  $t_0$  as

$$\omega(x, t) = (\phi_{t,t_0})_* \omega_0(x),$$

where  $(\phi_{t,t_0})_*$  denotes the push-forward of the non-autonomous flow of the velocity field between the times  $t_0$  and  $t$ .

From this expression for the vorticity it stems that the vortex lines at time  $t$  are diffeomorphic to those at time  $t_0$ . Accordingly, one can attempt to construct



the initial vorticity  $\omega_0$  with a prescribed set of vortex lines and tubes. This is a problem in dynamical systems where the only constraint on the vector field  $\omega_0$  is that  $\operatorname{div} \omega_0 = 0$ , which in  $\mathbb{R}^3$  implies that  $\omega_0$  is exact, i.e. there exists a vector field  $u_0$  such that  $\operatorname{curl} u_0 = \omega_0$ . The initial vorticity  $\omega_0$  can be constructed as follows. Let  $L$  be the finite link in  $\mathbb{R}^3$  that we want to realise as a set of vortex lines. As it has trivial normal bundle, a tubular neighbourhood  $N_k$  of each component  $L_k$  of  $L$  is diffeomorphic to  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ . We take each neighbourhood  $N_k$  so that the compact sets  $\overline{N}_k$  are pairwise disjoint. Let us parameterize  $N_k$  with local coordinates  $\alpha \in \mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  and  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ . In these coordinates, the Euclidean volume reads as

$$dx = f(\alpha, z) d\alpha dz_1 dz_2$$

for some smooth positive function  $f$ . Using this parametrization, we can define a vector field  $v_k$  in each domain  $N_k$  as:

$$v_k := \frac{F(\rho^2)}{f} (\partial_\alpha + G(\rho^2) \partial_\varphi),$$

where we have used the polar coordinates  $(\rho, \varphi)$  defined as  $z_1 = \rho \cos \varphi$  and  $z_2 = \rho \sin \varphi$ , and  $F$  and  $G$  are smooth functions such that  $F(0) = 1$  and  $F = 0$  for  $\rho \geq 1$ . By construction,  $v_k$  is a smooth vector field compactly supported in  $N_k$ , and it is straightforward to check that it is volume preserving for any choice of the functions  $F$  and  $G$ . Moreover,  $L_k$  is an integral curve of  $v_k$ , and for any  $\rho_0 > 0$ , the domain  $\{\rho < \rho_0\}$ , expressed in the coordinates  $(\alpha, \rho, \varphi)$ , is an invariant tube of  $v_k$ .

Using the fields  $v_k$ , we can prescribe the initial vorticity as the compactly supported divergence-free vector field

$$\omega_0(x) := \begin{cases} v_k(x) & \text{if } x \in N_k, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup N_k. \end{cases}$$

Through the Biot–Savart operator, this initial vorticity corresponds to the initial velocity

$$u_0(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y) \times \omega_0(y)}{|x-y|^3} dy,$$

which falls off at infinity as  $|u_0(x)| < C/|x|^2$ .

By construction, the link  $L$  is a union of vortex lines of the initial vorticity  $\omega_0$ . This field is integrable and nondegenerate in the sense that each tubular neighbourhood  $N_k$  is filled by vortex tubes, and the vortex lines are either periodic

or quasi-periodic depending on whether the value of the function  $G(\rho^2)$  on the invariant torus  $\{\rho = \rho_0\}$  is rational or not. Therefore, the classical local (in time) existence theorem implies that there is a smooth solution to the Euler equations with initial datum  $u_0$  which is defined for  $t \in [0, T)$  (it is not known whether the maximal time of existence  $T > 0$  is actually infinite). The solution  $u$  has a set of vortex lines diffeomorphic to the link  $L$  for all  $t \in [0, T)$ , and vortex tubes enclosing these vortex lines, as we wanted to show.

The importance of this simple argument is that it suggests the existence of stationary solutions of the Euler equations with knotted and linked vortex lines and tubes. Heuristically, one can argue as follows. If there is a smooth global solution  $u(x, t)$  that evolves, for large times, into an equilibrium state, characterized by a stationary solution to Euler  $u_\infty(x)$ , it is conceivable, although certainly not at all obvious, that this stationary solution should also have a set of closed vortex lines diffeomorphic to  $L$ . Of course, these hypotheses prevent us from promoting this heuristic argument to a rigorous result.

In this direction, Moffatt [15] introduced a particularly influential scenario which was inspired by ideas of the physicists Zakharov and Zeldovitch. Moffatt's heuristic argument, based on the magnetic relaxation phenomenon, supports the existence of knotted stream lines, although making his approach precise seems to be way out of reach despite the recent rigorous results in this direction, see e.g. [10]. To explain this argument, let us consider the following magnetohydrodynamic system with viscosity  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u &= -\nabla P + \mu \Delta u + H \times \text{curl } H, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= [H, u], \quad \text{div } u = \text{div } H = 0. \end{aligned}$$

In this equation,  $u(x, t)$  represents the velocity field of a plasma,  $H(x, t)$  is the associated magnetic field and  $P(x, t)$  is the pressure of the plasma.

Just as in the case of the previous argument based on the vorticity transport, the idea is to take initial conditions  $(H_0, u_0)$  such that the vector field  $H_0$  has a prescribed set of invariant closed lines, possibly knotted and linked. The construction of  $H_0$ , whose only constraint is being volume preserving, can be done exactly as in the case of vortex lines. Then one can argue that, if there is a global solution with this choice of initial conditions, it is reasonable that the viscous term  $\mu \Delta u$  forces the velocity to become negligible as  $t \rightarrow \infty$ . If the magnetic field also has some definite limit  $H_\infty(x)$  as  $t \rightarrow \infty$ , then this limit field satisfies

$$H_\infty \times \text{curl } H_\infty = \nabla P_\infty, \quad \text{div } H_\infty = 0.$$

Formally, these equations are the same as the stationary Euler equations, so  $H_\infty$  is then a stationary solution to the Euler equations. Since the magnetic field is transported by the flow of the velocity field, the same argument as above suggests that one can hope that  $H_\infty$  should have a set of integral curves (i.e., stream lines) diffeomorphic to any prescribed link. The problems that appear when one tries to make this argument rigorous are similar to those appearing in the case of vortex lines, e.g., it relies on the global existence of solutions to the aforementioned MHD system, which is currently not known.

### 3. Arnold's structure theorem, Beltrami fields and the contact geometry approach

In spite of the fact that it is very challenging to make rigorous the ideas introduced in Section 2, these arguments are the main theoretical basis for the firm belief in the validity of Kelvin's and related conjectures among the physics community.

A landmark in this direction is Arnold's structure theorem [1, 2], which asserts that, under mild technical assumptions, the stream and vortex lines of a stationary solution to Euler whose velocity field is not everywhere collinear with its vorticity, are nicely stacked in a rigid structure akin to those which appear in the study of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom:

**Theorem 1 (Arnold's structure theorem)** *Let  $u$  be a solution to the stationary Euler equations in a bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  with analytic boundary. Suppose that  $u$  is tangent to the boundary and analytic in the closure of the domain. If  $u$  and its vorticity  $\omega$  are not everywhere collinear, then there is an analytic set  $C$ , of codimension at least 1, so that  $\Omega \setminus C$  consists of a finite number of subdomains in which the dynamics of  $u$  and  $\omega$  are of one of the following two types:*

- *The subdomain is trivially fibered by tori invariant under  $u$  and  $\omega$ . On each torus, the flows of  $u$  and  $\omega$  are conjugate to linear flows (rational or irrational).*
- *The subdomain is trivially fibered by cylinders invariant under  $u$  whose boundaries sit on  $\partial\Omega$ . All the stream lines of  $u$  on each cylinder are periodic.*

The proof of Arnold's structure theorem is based on two simple observations: the Bernoulli function  $B$  is a nontrivial first integral of both  $u$  and  $\omega$ , and on each regular level set of  $B$ , the fields  $u$  and  $\omega$  are linearly independent and commute. For our purposes, the main consequence of Arnold's theorem is that when  $u$  and  $\omega$  are not collinear, there is not much freedom in choosing how the vortex lines

and vortex tubes can sit in space, so it should be difficult to construct topologically complicated vortex structures. This rough idea was confirmed in [7] by showing that, under appropriate hypotheses, the rigid structure predicted by Arnold indeed leads to obstructions on admissible knot and link types for stream and vortex lines.

In fact, with suitable assumptions, it is not difficult to extend Arnold's theorem to solutions defined on the whole  $\mathbb{R}^3$ , so the hypothesis that  $u$  is defined on a bounded domain  $\Omega$  is not essential. Actually, Arnold himself emphasised that the key hypothesis is that the velocity and the vorticity should not be everywhere collinear, and predicted that when this condition is not satisfied, i.e., when the velocity and vorticity are everywhere parallel, then one should be able to construct stationary solutions to the Euler equations with stream and vortex lines of arbitrary topological complexity.

Therefore, if one tries to prove Kelvin's conjecture, or to construct stationary solutions with stream and vortex lines of any link type, it is natural to consider solutions of the form

$$\operatorname{curl} u = f u, \quad \operatorname{div} u = 0,$$

with  $f$  a smooth function on  $\mathbb{R}^3$ . Taking the divergence in this equation we infer that  $\nabla f \cdot u = 0$ , i.e., that  $f$  is a first integral of the velocity field. As a consequence of this, the trajectories of  $u$  must lie on the level sets of the function  $f$ . The solutions to this equation are very difficult to handle. In fact, it can be shown [6] that there are no nontrivial solutions for an open and dense set of factors  $f$  in the  $C^k$  topology,  $k \geq 7$ . In particular, there are no nontrivial solutions whenever  $f$  has a regular level set diffeomorphic to the sphere.

Accordingly, in order to keep things simple, we are naturally led to consider a constant proportionality factor  $f$  to construct stationary solutions with complex vortex patterns. Then, we will focus our attention on *Beltrami fields*, which satisfy the equation

$$\operatorname{curl} u = \lambda u$$

for some nonzero constant  $\lambda$ . This equation immediately implies that  $\operatorname{div} u = 0$ . Notice that Beltrami fields satisfy the equation  $\Delta u = -\lambda^2 u$ , and hence by standard elliptic regularity they are real analytic. However, they cannot be in  $L^2(\mathbb{R}^3)$  so they do not have finite energy. Actually, it is an open question whether the Euler equations in  $\mathbb{R}^3$  admit any (nonzero) stationary solutions with finite energy. Obviously the stream lines of a Beltrami field are the same as its vortex lines, so henceforth we will only refer to the latter.

After establishing his structure theorem, Arnold conjectured that, contrary to what happens in the non-collinear case, Beltrami fields could present vortex lines of arbitrary topological complexity, which is fully consistent with Kelvin's

conjecture. Indeed, there is abundant numerical evidence and some analytical results that suggest that the dynamics of a Beltrami field can be extremely complex. The most thoroughly studied examples are the ABC fields, introduced by Arnold in [1]:

$$u(x) = \left( A \sin x_3 + C \cos x_2, B \sin x_1 + A \cos x_3, \right. \\ \left. C \sin x_2 + B \cos x_1 \right) .$$

Here  $A, B, C$  are real parameters. It is remarkable that all our intuition about Beltrami fields comes from the analysis of a few exact solutions, which basically consist of fields with Euclidean symmetries and the ABC family.

From the experimental viewpoint, it was observed in actual fluid flows [18] that in turbulent regions of low dissipation, and hence governed by the Euler equations, the velocity and vorticity vectors have a tendency to align, which is precisely the Beltrami condition. This is an additional support in order to consider Beltrami fields as the right solutions if one wants to construct topologically complicated vortex structures. As a matter of fact, these fields also play an important role in magnetohydrodynamics, where they are known as force-free magnetic fields. These force-free solutions model the dynamics of plasmas in stellar atmospheres, where complicated magnetic tubes, which are the analogues of vortex tubes, have been observed.

An interesting approach to the problem on the existence of knotted and linked vortex lines in stationary Euler flows is due to Etnyre and Ghrist. It hinges on the connection of Beltrami fields with contact geometry [8]. The main observation is the following. Let  $u$  be a Beltrami field and  $\alpha$  its dual 1-form, so that the Beltrami equation can be written using the Hodge  $*$ -operator as

$$*d\alpha = \lambda\alpha .$$

Therefore, if the Beltrami field does not vanish anywhere, we have that

$$\alpha \wedge d\alpha = \lambda|u|^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

does not vanish either, so that by definition  $\alpha$  defines a contact 1-form. Conversely, if  $\alpha$  is a contact 1-form in  $\mathbb{R}^3$ , there is a smooth Riemannian metric  $g$  adapted to the form  $\alpha$  so that this 1-form satisfies the Beltrami equation above with the Hodge  $*$ -operator corresponding to the metric  $g$ . The vector field dual to the 1-form  $\alpha$  is a Beltrami field with respect to the adapted metric  $g$ , and is called Reeb field in contact geometry.

The reason why this observation is useful is that the machinery of contact geometry is very well suited for the construction of contact forms whose associated

Reeb fields have a prescribed invariant set, e.g. a set of closed integral curves or invariant tori. Therefore, one finds that there is a metric in  $\mathbb{R}^3$ , which in general is neither flat nor complete, such that the Euler equations in this metric admit a stationary solution of Beltrami type having a set of vortex lines and vortex tubes of any knot and link type. The geometric properties of a metric adapted to a contact 1-form are very rigid [9], so this strategy cannot work when we consider the Euler equations for a fixed (e.g. Euclidean) metric.

#### 4. A realisation theorem for knotted vortex lines

In this section we shall discuss a realisation theorem showing the existence of Beltrami fields with a set of closed vortex lines diffeomorphic to any given link [4]:

**Theorem 2** *Let  $L \subset \mathbb{R}^3$  be a finite link and let  $\lambda$  be any nonzero real number. Then one can deform the link  $L$  by a diffeomorphism  $\Phi$  of  $\mathbb{R}^3$ , arbitrarily close to the identity in any  $C^m$  norm, such that  $\Phi(L)$  is a set of vortex lines of a Beltrami field  $u$ , which satisfies the equation  $\text{curl } u = \lambda u$  in  $\mathbb{R}^3$ . Moreover,  $u$  falls off at infinity as  $|D^j u(x)| < C_j/|x|$ .*

We have only considered the case of finite links, but the case of locally finite links can be tackled similarly at the expense of losing the decay condition of the velocity field. In particular, taking into account the fact that the knot types modulo diffeomorphism are countable, it follows that there exists a stationary solution to the Euler equations whose stream lines realise all knots at the same time, thus yielding a positive answer to a question of Williams [22].

The closed vortex lines in the set  $\Phi(L)$  are hyperbolic, i.e. their associated monodromy matrices do not have any nontrivial eigenvalues of modulus 1. Since  $\text{div } u = 0$ , this immediately implies that these vortex lines are unstable. Notice, however, that the theorem does not guarantee that  $\Phi(L)$  contains all closed vortex lines of the Beltrami field.

The  $1/|x|$  decay we have is optimal within the class of Beltrami solutions, not necessarily with constant proportionality factor [17], so our solutions belong to the space  $L^p(\mathbb{R}^3)$  for all  $p > 3$ . Notice that the  $1/|x|$  decay was not proved in [4] (indeed, in this paper the Beltrami field was not shown to satisfy any conditions at infinity), but follows from the more refined global approximation theorem that we proved in [5].

We shall next sketch the proof of Theorem 2. The heart of the problem is that one needs to extract topological information from a PDE. Our basic philosophy is to use the methods of differential topology and dynamical systems to control

auxiliary constructions and those of PDEs to realise these auxiliary constructions in the framework of solutions to the Euler equations. For concreteness, to explain the gist of the proof we will concentrate on constructing a solution for which we are prescribing just one vortex line  $L$ , which is a (possibly knotted) curve in  $\mathbb{R}^3$ .

### Step 1: a geometric construction

It is well known that, perturbing the knot a little through a small diffeomorphism, we can assume that  $L$  is analytic. Since the normal bundle of a knot is trivial, we can take an analytic ribbon  $\Sigma$  around  $L$ . More precisely, there is an analytic embedding  $h$  of the cylinder  $\mathbb{S}^1 \times (-\delta, \delta)$  into  $\mathbb{R}^3$  whose image is  $\Sigma$  and such that  $h(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = L$ .

In a small tubular neighbourhood  $N$  of the knot  $L$  we can take an analytic coordinate system

$$(\theta, z, \rho) : N \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)$$

adapted to the ribbon  $\Sigma$ . Basically,  $\theta$  and  $z$  are suitable extensions of the angular variable on the knot and of the signed distance to  $L$  as measured along the ribbon  $\Sigma$ , while  $\rho$  is the signed distance to  $\Sigma$ .

The reason why this coordinate system is useful is that it allows us to define a vector field  $w$  in the neighbourhood  $N$  that is key in the proof: simply,  $w$  is the field dual to the closed 1-form

$$d\theta - z dz.$$

From this expression and the definition of the coordinates it stems that  $w$  is an analytic vector field tangent to the ribbon  $\Sigma$  and that  $L$  is a stable hyperbolic closed integral curve of the pullback of  $w$  to  $\Sigma$ .

### Step 2: a robust local Beltrami field

The field  $w$  we constructed in Step 1 will now be used to define a local Beltrami field  $v$ . To this end we will consider the Cauchy problem

$$\operatorname{curl} v = \lambda v, \quad v|_{\Sigma} = w. \tag{1}$$

One cannot apply the Cauchy–Kowalewski theorem directly because the curl operator does not have any non-characteristic surfaces as its symbol is an skew-symmetric matrix. In fact, a direct computation shows that there are some analytic Cauchy data  $w$ , tangent to the surface  $\Sigma$ , for which this Cauchy problem does not have any solutions: a necessary condition for the existence of a solution, when the

field  $w$  is tangent to  $\Sigma$ , is that the pullback to the ribbon of the 1-form dual to the Cauchy datum must be a closed 1-form.

Through a more elaborate argument that involves a Dirac-type operator, one can prove that this condition is not only necessary but also sufficient. Therefore, the properties of the field  $w$  constructed in Step 1 allow us to ensure that there is a unique analytic field  $v$  in a neighbourhood of the knot  $L$  which solves the Cauchy problem (1).

It is obvious that the knot  $L$  is a closed vortex line of the local Beltrami field  $v$ . As a matter of fact, it is easy to check that this line is hyperbolic (and therefore stable under small perturbations). The idea is that, by construction, the ribbon  $\Sigma$  is an invariant manifold under the flow of  $v$  that contracts into  $L$  exponentially. As the flow of  $v$  preserves volume because  $\operatorname{div} v = 0$ , there must exist an invariant manifold that is exponentially expanding and intersects  $\Sigma$  transversally on  $L$ , which guarantees its hyperbolicity.

Accordingly,  $L$  is a robust closed vortex line. More concretely, by the hyperbolic permanence theorem any field  $u$  that is close enough to  $v$  in the  $C^m(N)$  norm,  $m \geq 1$ , has a closed integral curve diffeomorphic to  $L$ , and this diffeomorphism can be chosen  $C^m$ -close to the identity (and different from the identity only in  $N$ ).

### Step 3: a Runge-type global approximation theorem

The global Beltrami field  $u$  is obtained through a Runge-type theorem for the operator  $\operatorname{curl} - \lambda$ . This result allows us to approximate the local Beltrami field  $v$  by a global Beltrami field  $u$  in the  $C^m(N)$  norm. More precisely, for any positive  $\delta$  and any positive integer  $m$  there is a global Beltrami field  $u$  such that

$$\|u - v\|_{C^m(N)} < \delta.$$

Besides, the field  $u$  falls off at infinity as

$$|D^j u(x)| < \frac{C_j}{|x|}.$$

Basically, the proof of our Runge-type theorem [5] consists of two steps. In the first step we use functional-analytic methods and Green's functions estimates to approximate the field  $v$  by an auxiliary vector field  $\tilde{v}$  that satisfies the elliptic equation  $\Delta \tilde{v} = -\lambda^2 \tilde{v}$  in a large ball of  $\mathbb{R}^3$  that contains the set  $N$ . In the second step, we define the approximating global Beltrami field  $u$  in terms of a truncation of a Fourier-Bessel series representation of the field  $\tilde{v}$  and a simple algebraic trick.



To conclude the proof of the theorem it is enough to take  $\delta$  small enough so that the hyperbolic permanence theorem ensures that if  $\|u - v\|_{C^m(N)} < \delta$  then there is a diffeomorphism  $\Phi$  of  $\mathbb{R}^3$  such that  $\Phi(L)$  is a closed vortex line of  $u$  and  $\Phi - \text{id}$  is supported in  $N$  with  $\|\Phi - \text{id}\|_{C^m(\mathbb{R}^3)}$  as small as wanted.

## 5. A realisation theorem for knotted vortex tubes

In Theorem 2 we have used Beltrami fields to prove the existence of stationary solutions to the Euler equations with vortex lines of any link type. Let us now show that one can construct stationary solutions with knotted vortex tubes, as predicted by Kelvin, using Beltrami fields as well. To state this result, let us denote by  $\mathcal{T}_\epsilon(L)$  the  $\epsilon$ -thickening of a given link  $L$  in  $\mathbb{R}^3$ , that is, the set of points that are at distance at most  $\epsilon$  from  $L$ . The realisation theorem for vortex tubes can then be stated as follows [5]:

**Theorem 3** *Let  $L$  be a finite link in  $\mathbb{R}^3$ . For any small enough  $\epsilon$ , one can transform the collection of pairwise disjoint thin tubes  $\mathcal{T}_\epsilon(L)$  by a diffeomorphism  $\Phi$  of  $\mathbb{R}^3$ , arbitrarily close to the identity in any  $C^m$  norm, so that  $\Phi[\mathcal{T}_\epsilon(L)]$  is a set of vortex tubes of a Beltrami field  $u$ , which satisfies the equation  $\text{curl } u = \lambda u$  in  $\mathbb{R}^3$  for some nonzero constant  $\lambda$ . Moreover, the field  $u$  decays at infinity as  $|D^j u(x)| < C_j/|x|$ .*

The parameter  $\lambda$  in the theorem cannot be chosen freely: it must be of order  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ . In fact, if we allow a diffeomorphism  $\Phi$  that is not close to the identity, we can get any nonzero constant  $\lambda'$  just by considering the rescaled field

$$u'(x) := u\left(\frac{\lambda' x}{\lambda}\right),$$

which satisfies the Beltrami equation  $\text{curl } u' = \lambda' u'$ . However, the fact that the vortex tubes are thin in the sense that their width is much smaller than their length, is a crucial ingredient in the proof of the theorem.

The proof of Theorem 3 also yields information on the structure of the vortex lines inside each vortex tube:

- (i) There are infinitely many nested invariant tori (which bound vortex tubes). On each of these tori, the vortex lines are ergodic.
- (ii) In the region bounded by any pair of these invariant tori there are infinitely many closed vortex lines, not necessarily of the same knot type as the curves in the link  $L$ .

- (iii) There is a set of elliptic<sup>4</sup> closed vortex lines diffeomorphic to the link  $L$  near the core of the vortex tubes. Being elliptic, they are linearly stable.
- (iv) The vortex tubes are both Lyapunov stable and structurally stable.

The proof of Theorem 3 also relies on the combination of a robust local construction and a global approximation result, as in the case of Theorem 2. In fact, this global approximation result was used in the statement of Theorem 2 to ensure that our Beltrami fields fall off at infinity. However, the construction of the robust local solution is much more sophisticated than in the case of vortex lines and requires entirely different ideas.

Basically, the robustness of the tubes follows from a KAM-theoretic argument with two small parameters: the thinness  $\epsilon$  of the tubes and the constant  $\lambda$ . The local solution must now be defined in the whole tubes, not just on a neighbourhood of the boundary. This makes it impossible to construct the local solution using a theorem of Cauchy-Kowalewski type, as we did in Step 2 of Theorem 2. Instead, we need to consider a boundary value problem for the curl operator in which the tangential part of the field cannot be prescribed. As a consequence of this, one cannot directly take local Beltrami fields which satisfy the non-degeneracy conditions of the KAM-type theorem: these conditions must be extracted from the equation using fine PDE estimates. This is in great contrast with the prescription of the Cauchy datum that we made in Step 1 of Theorem 2, which readily ensures the hyperbolicity of the closed vortex lines, and leads to very subtle problems with a deep interplay of PDE and dynamical systems techniques.

As we did in the sketch of proof of Theorem 2, we will concentrate on constructing a solution for which we are prescribing just one vortex tube  $\mathcal{T}_\epsilon \equiv \mathcal{T}_\epsilon(L)$ , where  $L$  is a (possibly knotted) curve in  $\mathbb{R}^3$ .

### Step 1: a local Beltrami field in a tube

We will obtain a local Beltrami field  $v$  in  $\mathcal{T}_\epsilon$  as the unique solution to certain boundary value problem for the Beltrami equation. To specify this problem, let us fix a (nonzero) harmonic field  $h$  in  $\mathcal{T}_\epsilon$ , which satisfies

$$\operatorname{div} h = 0 \quad \text{and} \quad \operatorname{curl} h = 0$$

in the tube and is tangent to the boundary. By Hodge theory, it is standard that there is a unique harmonic field in  $\mathcal{T}_\epsilon$  up to a multiplicative constant. For concreteness, let us assume that  $\|h\|_{L^2(\mathcal{T}_\epsilon)} = 1$ .

---

<sup>4</sup>We recall that a closed integral curve of a vector field is elliptic if its associated monodromy matrix has all its eigenvalues of modulus 1.

The boundary problem we will then consider is

$$\operatorname{curl} v = \lambda v$$

in  $\mathcal{T}_\epsilon$ , supplemented with the boundary condition  $\partial_n v = 0$  and a condition on the harmonic part of  $v$  such as

$$\int_{\mathcal{T}_\epsilon} v \cdot h \, dx = 1.$$

Notice that in this boundary problem we are specifying the normal component of  $v$  on the boundary (which we set to zero, to ensure that  $\partial\mathcal{T}_\epsilon$  is an invariant torus) but not the tangential component. This will be important later on.

Through a duality argument, it is not hard to prove that for any  $\lambda$  outside some discrete set, and in particular whenever  $|\lambda|$  is smaller than some  $\epsilon$ -independent constant, there is a unique solution to this problem. An easy consequence of the proof is that the field  $v$  becomes close to  $h$  for small  $\lambda$ , in the sense that

$$\|v - h\|_{H^k(\mathcal{T}_\epsilon)} \leq C_{k,\epsilon} |\lambda|. \quad (2)$$

The problem now is that, when one tries to verify the conditions for the preservation of the invariant torus  $\partial\mathcal{T}_\epsilon$  under small perturbations of  $v$ , one realizes that the above existence result is far from enough: the robustness of the invariant torus depends on KAM arguments, which require very fine information on the behavior of  $v$  in a neighbourhood of  $\partial\mathcal{T}_\epsilon$ .

An important simplification is suggested by the estimate (2): if we take small nonzero values of  $\lambda$ , it should be enough to understand the behavior of the harmonic field  $h$ , since the local solution  $v$  is going to look basically like this field (more refined estimates are needed to fully exploit this fact, but this is the basic idea.)

Therefore, our next goal is to estimate various analytic properties of the harmonic field  $h$ . To simplify this task, we will introduce coordinates adapted to the tube  $\mathcal{T}_\epsilon$ , which essentially correspond to an arc-length parametrization of the knot  $L$  and to rectangular coordinates in a transverse section of the tube defined using a Frenet frame. Thus we consider an angular coordinate  $\alpha$ , taking values in  $\mathbb{S}_\ell^1 := \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$  (with  $\ell$  the length of the knot  $L$ ), and rectangular coordinates  $y = (y_1, y_2)$  taking values in the unit 2-disk  $\mathbb{D}$ .

To extract information about  $h$ , we start with a good guess of what  $h$  should look like: one can check that there is some function of the form  $1 + \mathcal{O}(\epsilon)$  such that the vector field

$$h_0 := [1 + \mathcal{O}(\epsilon)] (\partial_\alpha + \tau \partial_\theta)$$

is “almost harmonic”, in the sense that it is curl-free, tangent to the boundary and satisfies

$$\rho := -\operatorname{div} h_0 = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Here  $\tau$  is the torsion of the curve  $L$  and  $\theta$  is the angular polar coordinate in the 2-disk. The actual form of  $h_0$  and  $\rho$  is important, but we will not write these details to keep the exposition simple.

From the above considerations we infer that the harmonic field is given by

$$h = h_0 + \nabla\psi,$$

where  $\psi$  solves the Neumann boundary value problem

$$\Delta\psi = \rho \quad \text{in } \mathcal{T}_\epsilon, \quad \partial_n\psi|_{\partial\mathcal{T}_\epsilon} = 0, \quad \int_{\mathcal{T}_\epsilon} \psi \, dx = 0. \quad (3)$$

When written in the natural coordinates  $(\alpha, y)$ , we obtain a boundary value problem in the domain  $\mathbb{S}_\ell^1 \times \mathbb{D}$ , the coefficients of the Laplacian in these coordinates depending on the geometry of the tube strongly through its thickness  $\epsilon$  and the curvature and torsion of  $L$ .

In the derivation of the result on preservation of the invariant torus we will need to solve approximately the boundary value problem (3), thus showing that  $\psi$  is of the following form:

- $\psi = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ ,
- $D_y\psi = (\text{certain explicit function}) + \mathcal{O}(\epsilon^4)$ ,
- $\partial_\theta\psi = (\text{certain explicit function}) + \mathcal{O}(\epsilon^5)$ .

The explicit expressions above are important, but we will omit them so as not to obscure the main points of the proof.

To obtain these expression, we need estimates for the  $L^2$  norm of  $\psi$  and its derivatives that are optimal with respect to the parameter  $\epsilon$ . The reason for this is that standard energy estimates of the form

$$\|\psi\|_{H^{k+2}(\mathcal{T}_\epsilon)} \leq C_{\epsilon,k} \|\rho\|_{H^k(\mathcal{T}_\epsilon)}$$

are of little use to us because for the preservation of the torus we will need to be very careful in dealing with powers of the small parameter  $\epsilon$ . In particular, it is crucial to distinguish between estimates for derivatives of  $\psi$  with respect to the “slow” variable  $\alpha$  and the “fast” variable  $y$ , and even to trade some of the

gain of derivatives associated with the elliptic equation (3) (in some cases) for an improvement of the dependence on  $\epsilon$  of the constants. Estimates optimal with respect to  $\epsilon$  are also derived for the equation  $\text{curl } v = \lambda v$  in  $\mathcal{T}_\epsilon$  to help us exploit the connection between Beltrami fields with small  $\lambda$  and harmonic fields.

## Step 2: A KAM theorem for Beltrami fields

To analyse the robustness of the invariant torus  $\partial\mathcal{T}_\epsilon$  of the local solution  $v$ , the natural tool is KAM theory. At first, it may not be immediate to see why we can apply KAM-type arguments, as  $v$  is a divergence-free vector field in a three-dimensional domain and KAM theory is usually discussed in the context of integrable Hamiltonian systems in even-dimensional spaces.

The key here is to consider the Poincaré (or first return) map of  $v$ . To define this map, we take a normal section of the tube  $\mathcal{T}_\epsilon$ , say  $\{\alpha = 0\}$ . Given a point  $x_0$  in this section, the Poincaré map  $\Pi$  associates to  $x_0$  the point where the vortex line  $x(\tau)$  with initial condition  $x(0) = x_0$  cuts the section  $\{\alpha = 0\}$  for the first positive time. The analysis in Step 1 gives that the harmonic field  $h$  is of the form

$$h = \partial_\alpha + \tau(\alpha) (y_1 \partial_2 - y_2 \partial_1) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4)$$

so with a little work one can prove that the Poincaré map is well defined for small enough  $\epsilon$  and  $\lambda$ . Identifying this section with the disk  $\mathbb{D}$  via the coordinates  $y$ , this defines the Poincaré map as a diffeomorphism

$$\Pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}.$$

Since the vector field  $v$  is divergence-free, one can prove that the Poincaré map preserves some measure on the disk.

Notice that the invariant torus  $\partial\mathcal{T}_\epsilon$  manifests itself as an invariant circle (namely,  $\partial\mathbb{D}$ ) of the Poincaré map. To establish the robustness of the invariant torus  $\partial\mathcal{T}_\epsilon$ , we will resort to a KAM theorem [11] to prove that the invariant circle of  $\Pi$  is preserved under small area-preserving perturbations. After taking care of several technicalities that will be disregarded here, thanks to this theorem we can conclude that the invariant torus  $\partial\mathcal{T}_\epsilon$  is robust provided two conditions are met: that the rotation number of  $\Pi$  on the invariant circle is Diophantine and that  $\Pi$  satisfies a nondegeneracy twist condition.

We would like to emphasize that computing the rotation number  $\omega_\Pi$  and the twist  $\mathcal{N}_\Pi$  of the Poincaré map amounts to obtaining quantitative information about the vortex lines of  $v$ . This is a hard, messy, lengthy calculation that we carry out by combining an iterative approach to control the integral curves of the associated

dynamical system (i.e., the vortex lines) with small parameter  $\epsilon$  and the PDE estimates, optimal with respect to  $\epsilon$ , that we obtained for  $v$  in Step 1. The final formulas are

$$\begin{aligned}\omega_{\Pi} &= \int_0^{\ell} \tau(\alpha) d\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \mathcal{N}_{\Pi} &= -\frac{5\pi\epsilon^2}{8} \int_0^{\ell} \kappa(\alpha)^2 \tau(\alpha) d\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^3),\end{aligned}\tag{5}$$

where  $\kappa$  and  $\tau$  respectively denote the curvature and torsion of the knot  $L$ . The leading term of  $\omega_{\Pi}$  is the total torsion of the curve  $L$ , while the leading term of the twist  $\mathcal{N}_{\Pi}$  is proportional to the helicity of the velocity field associated with the vortex filament motion under LIA [19]. These quantities are the first and the third constants of the motion for the LIA equation <sup>5</sup>.

These expressions allow us to prove that for a “generic” curve  $L$  the rotation number is Diophantine and the twist is nonzero, so the hypotheses of the KAM theorem are satisfied. Hence the invariant torus  $\partial\mathcal{T}_{\epsilon}$  of the local Beltrami field  $v$  is robust: if  $u$  is a divergence-free vector field in a neighbourhood of the tubes that is close enough to  $v$  in a suitable sense (e.g., in a  $C^m$  norm with  $m \geq 4$ ), then  $u$  also has an invariant tube diffeomorphic to  $\mathcal{T}_{\epsilon}$ , and moreover the corresponding diffeomorphism can be taken close to the identity.

It is worth mentioning that the formula (5) provides some intuition about the question of why one needs to be so careful with the dependence on  $\epsilon$  of the various estimates: the twist, which must be nonzero, is of order  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Another way of understanding this is by looking at the expression (4) for the harmonic field, which implies that our local solution  $v$  is an  $\epsilon$ -small perturbation of the most degenerate kind of vector field from the point of view of KAM theory: a field with constant rotation number.

### Step 3: a Runge-type global approximation theorem

To complete the proof of the theorem, we use the same Runge-type theorem as in Step 3 of the outline of the proof of Theorem 2, to show that there is a Beltrami field  $u$  in  $\mathbb{R}^3$  close to the local solution:

$$\|u - v\|_{C^m(\mathcal{T}_{\epsilon})} < \delta,$$

---

<sup>5</sup>This connection between the quantities measuring the nondegeneracy of the KAM argument for the vortex tubes and the LIA equation is quite surprising, and we do not see any obvious explanation for it.

falling off at infinity as

$$|D^j u(x)| < \frac{C_j}{|x|}.$$

Putting all three steps together, this gives the outline of the proof of Theorem 3.

## Referencias

- [1] V.I. Arnold, Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits. *C. R. Acad. Sci. Paris* 261 (1965) 17–20.
- [2] V.I. Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier* 16 (1966) 319–361.
- [3] V.I. Arnold, B. Khesin, *Topological methods in hydrodynamics*. Springer, 1999.
- [4] A. Enciso, D. Peralta-Salas, Knots and links in steady solutions of the Euler equation. *Ann. of Math.* 175 (2012) 345–367.
- [5] A. Enciso, D. Peralta-Salas, Existence of knotted vortex tubes in steady Euler flows. *Acta Math.* 214 (2015) 61–134.
- [6] A. Enciso, D. Peralta-Salas, Beltrami fields with a nonconstant proportionality factor are rare. Preprint (arXiv:1402.6825).
- [7] J. Etnyre, R. Ghrist, Stratified integrals and unknots in inviscid flows. *Contemp. Math.* 246 (1999) 99–111.
- [8] J. Etnyre, R. Ghrist, Contact topology and hydrodynamics III. Knotted orbits. *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000) 5781–5794.
- [9] J. Etnyre, R. Komendarczyk, P. Massot, Tightness in contact metric 3-manifolds. *Invent. Math.* 188 (2012) 621–657.
- [10] C.L. Fefferman, D.S. McCormick, J.C. Robinson, J.L. Rodrigo, Higher order commutator estimates and local existence for the non-resistive MHD equations and related models. *J. Funct. Anal.* 267 (2014) 1035–1056.
- [11] A. González-Enríquez, R. de la Llave, Analytic smoothing of geometric maps with applications to KAM theory. *J. Differential Equations* 245 (2008) 1243–1298.

- [12] H. von Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *J. Reine Angew. Math.* 55 (1858) 25–55.
- [13] D. Kleckner, W.T.M. Irvine, Creation and dynamics of knotted vortices. *Nature Phys.* 9 (2013) 253–258.
- [14] H.K. Moffatt, The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J. Fluid Mech.* 35 (1969) 117–129.
- [15] H.K. Moffatt, Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology I. *J. Fluid Mech.* 159 (1985) 359–378.
- [16] H.K. Moffatt, Vortex- and magneto-dynamics, a topological perspective, in *Mathematical Physics 2000*, pp. 170–182. Imperial College Press, London, 2000.
- [17] N. Nadirashvili, Liouville theorem for Beltrami flow. *Geom. Funct. Anal.* 24 (2014) 916–921.
- [18] R.B. Pelz, V. Yakhot, S.A. Orszag, L. Shtilman, E. Levich, Velocity-vorticity patterns in turbulent flow. *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985) 2505–2508.
- [19] R. Ricca, Physical interpretation of certain invariants for vortex filament motion under LIA. *Phys. Fluids* 4 (1992) 938–944.
- [20] W. Thomson (Lord Kelvin), On vortex atoms. *Proc. Roy. Soc. Edin.* 6 (1867) 94–105 (reprinted in: *Mathematical and physical papers IV*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [21] W. Thomson (Lord Kelvin), Vortex statics. *Proc. Roy. Soc. Edin.* 9 (1875) 59–73 (reprinted in: *Mathematical and physical papers IV*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [22] R.F. Williams, The universal templates of Ghrist. *Bull. Amer. Math. Soc.* 35 (1998) 145–156.



## **2.2 Toma de decisiones bajo incertidumbre en la industria del petróleo**

Publicamos a continuación una interesante contribución proveniente de la Matemática Industrial, realizada por Rubén Rodríguez y Francisco José Mustieles con la autorización expresa de REPSOL.

# **Toma de decisiones bajo incertidumbre en la industria del petróleo**

---

Rubén Rodríguez Torrado y Francisco José Mustieles Moreno  
REPSOL

## **1. Introducción**

El número de descubrimientos y reservas de hidrocarburos está decayendo cada vez más. Más aún, cuando la existencia de hidrocarburos ha sido probada en una cierta región, es todavía muy complicado no solo determinar cuál es el tamaño del yacimiento sino la cantidad de hidrocarburos que puede ser eventualmente recuperada. Las decisiones sobre la adquisición de campos en la industria de la exploración-producción petrolífera son extremadamente delicadas debido al alto nivel de incertidumbre inherente en los estudios del subsuelo y la complejidad del análisis de los fenómenos físicos asociados.

En consecuencia, el desarrollo de nuevas metodologías que permitan caracterizar el subsuelo y realizar una evaluación del potencial de los yacimientos, constituye un elemento básico para el descubrimiento de nuevas oportunidades de negocio y obtener una ventaja competitiva con respecto a otros competidores en escenarios complejos donde el precio del barril de petróleo está por debajo de las expectativas recientes.

En las primeras etapas de la vida de un campo petrolífero se dispone de pocos pozos los cuales nos proporcionan los datos puntuales del subsuelo. En este contexto, se utilizan diversas herramientas de geoestadística [3], que permiten inferir las propiedades petrofísicas y geológicas existentes entre los pozos. Las técnicas de geoestadística están asociadas a procesos estocásticos, por lo que para caracterizar la incertidumbre del subsuelo es necesario implementar un elevado número de realizaciones equiprobables (normalmente se trabaja con cientos o miles de ellas).

Una vez que la incertidumbre está caracterizada, el siguiente paso es determinar la estrategia de producción adecuada. Esta selección es esencial para una correcta evaluación del potencial de un campo petrolífero. Si, por ejemplo, el análisis considera pozos en una ubicación errónea, la producción de hidrocarburos podría ser claramente subestimada y consecuentemente conllevaría a una incorrecta evaluación económica. Por lo tanto, este proceso se convierte en la piedra angular en la evaluación y optimización de los planes de desarrollo de un yacimiento. En consecuencia, los correspondientes parámetros de control (por ejemplo, número y tipo de pozos, localización de los mismos, perfiles de producción,...) deberán ser elegidos cuidadosamente y basados en un criterio de optimización adecuado.

Aunque hay abundante literatura, en la industria del petróleo, sobre el tratamiento de la incertidumbre y el análisis del riesgo en la toma de decisiones, hay una falta clara de estudios sobre la optimización de la explotación de yacimientos en el marco de grandes incertidumbres. Por ejemplo, el popular método de Rose [16, 17] y la procesos de evaluación en Otis and Schneidermann [14] realmente no incorporan ninguna métrica dinámica en su análisis (esto es, el uso de simuladores de flujo) y las técnicas presentes en [21] y [12] trabajan con estrategias de producción muy simples (decisiones relacionadas con números de pozos y sus ubicaciones no son incluidas). También podemos encontrar diversas herramientas comerciales que ayudan a la evaluación de un campo petrolífero [9, 5, 18]. No obstante, muchas de estas herramientas están construidas bajo un marco muy general que requiere de usuarios muy avanzados para la selección y combinación correcta de parámetros. Estas soluciones pueden llevar en algunas ocasiones a formulaciones muy sencillas que no capturan la complejidad de la toma de decisiones o problemas con muchos parámetros que son computacionalmente imposibles de resolver.

La aplicación de las matemáticas ha sido el eje esencial en la toma de decisiones en los últimos años en la industria del petróleo. Este proceso de toma de decisiones puede formalmente formularse bajo la perspectiva de un problema de optimización [23]. Por ejemplo, los métodos de optimización introducidos en [10, 7] pueden ser usados para analizar diferentes planes de desarrollo y las técnicas utilizadas en [25, 11] permiten incluir el uso de incertidumbres. Conviene remarcar que en el marco en que nos encontramos todos los algoritmos de optimización utilizan una primera etapa donde el espacio de búsqueda requiere una exploración global que no permite trabajar con más de unas cuantas decenas de variables de optimización o parámetros de control (especialmente si se requieren simulaciones con alto poder computacional). Después de esta etapa de exploración, la solución encontrada es frecuentemente mejorada con técnicas de optimización local hasta que se alcance un cierto criterio de parada.

En la sección 2, se presenta una visión general de las diferentes metodologías de optimización de los planes de desarrollo en la explotación de yacimientos, indicándose en la sección 3 como se incluye el manejo de la incertidumbre en dichos procesos.

## 2. Optimización de los planes de desarrollo

En esta sección introducimos una visión general de las diferentes metodologías de optimización, formulaciones y estrategias que pueden ser usadas para la optimización de los planes de desarrollos de un campo petrolífero.

Generalmente, los problemas de optimización están constituidos por tres componentes principales: función objetivo, restricciones y variables/controles. Es práctica común en la industria, el uso de una medida dinámica, como el Valor Actual Neto (VAN) de un campo, como función objetivo a la hora de evaluar un determinado yacimiento. Normalmente este valor depende de ciertas magnitudes como número de pozos, tipo, localización, control, perfiles de producción, las cuales constituyen las variables de control dentro de nuestro problema. El VAN es calculado basado en modelos económicos reales que incluyen CAPEX (coste de inversiones), OPEX (costes operacionales), precio del petróleo, tasa de descuento y descuentos fiscales. Finalmente, tenemos diversas restricciones operacionales como por ejemplo la mínima distancia entre pozos o la máxima capacidad de fluidos a producir. Estas restricciones son generalmente no lineales.

Como explicamos en la introducción, se busca la optimización de las variables de control bajo entornos de incertidumbre geológica. Esta incertidumbre está caracterizada por un conjunto de realizaciones geoestadísticas. Una formulación general del problema de optimización bajo incertidumbre sería la siguiente:

Encontrar el valor de las variables de control  $x$ , en el espacio de búsqueda  $X$ , que maximice la función objetivo,

$$J = E_{\pi}[G(x, w)], \quad \text{sujeta a} \quad c(x) \leq 0,$$

donde  $E_{\pi}$  representa el valor esperado de la función objetivo  $J$  sobre el conjunto de todas las realizaciones  $\pi$ .  $G$  es el proceso numérico que calcula la observación de la función objetivo  $J$  para una determinada  $x$  y una realización  $w$  y  $c$  es la función que representa todas las restricciones operacionales del plan de desarrollo.

La función  $G(x, w)$  es evaluada mediante el simulador de yacimientos basado en la realización  $w$  y las variables de control  $x$ . En el contexto de problemas de simulación de yacimientos, el conjunto  $\pi$  es finito. Por lo tanto si  $N$  es el número de realizaciones que caracterizan nuestro campo, el valor esperado puede

ser aproximado como

$$E_{\pi}[G(x, w)] = \sum_{i=1}^N G(x, w_i) p(w_i) \quad (6)$$

donde  $p(w_i)$  es la probabilidad asociada a la realización  $w_i$ . Normalmente, las simulaciones de una determinada realización son computacionalmente muy costosas lo que implica que sea inviable la evaluación para un número  $N$  muy grande. En la sección siguiente se estudiará en más detalle cómo tratar esta problemática.

En nuestro caso, el espacio de búsqueda  $X$  de las variables de control  $x$  puede subdividirse en tres espacios:

- (i) El denominado espacio continuo  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_l \leq x \leq x_u\}$  para las variables de control continuas.
- (ii) El denominado espacio discreto  $\Omega_d = \{x_d \in \mathbb{N}^{n'} : x_{dl} \leq x_d \leq x_{du}\}$  para la identificación de las celdas de la localización de los pozos a perforar.
- (iii) El denominado espacio binario  $\Omega_b = \{x_b \in \{0, 1\}\}$  caracterizado por variables decisionales tales como perforar/no perforar; elección del tipo de pozo como inyector/productor.

Debido a la naturaleza de estas variables y de las restricciones operacionales nuestro problema es formulado como un problema de Programación No lineal Entera Mixta (MINLP). Estos problemas por lo general son muy difíciles de resolver y no existe ninguna técnica clara en la literatura que permita garantizar la convergencia hacia soluciones óptimas. Como alternativa, se aconseja realizar una relajación del problema que permita eliminar variables binarias y discretas mediante una nueva formulación [23], transformando nuestro problema, de esta manera, en un problema de programación no lineal (NLP).

Las diferentes metodologías de optimización pueden ser clasificadas según la naturaleza de búsqueda del valor óptimo de la función objetivo. Siguiendo esta clasificación, se puede distinguir entre técnicas de optimización local o basadas en el cálculo de la derivada y aproximaciones de búsqueda global. Es importante puntualizar que hablamos de búsqueda global en lugar de optimización global. La principal razón es que encontrar un óptimo global en situaciones prácticas donde la evaluación de la función objetivo requiere grandes tiempos de cálculo, en espacios de búsquedas grandes se convierte en una tarea ardua y no existen algoritmos adaptados para esta funcionalidad.

## **Optimización basada en el cálculo de la derivada**

La definición de óptimo local depende de la naturaleza de la variable y su concepto de vecindad. La vecindad para variables continuas puede ser rigurosamente identificada como una bola, mientras que para las variables discretas puede ser definida como una cruceta. Las restricciones en el problema de optimización identifican puntos no factibles en nuestro espacio de búsqueda. El óptimo local para variables continuas puede ser obtenido buscando los valores de las variables de control que anulan el gradiente de la función objetivo. Esta caracterización es la base de la teoría matemática que garantiza la convergencia de la mayoría de los algoritmos de optimización local así como de la familia de métodos conocidos como métodos basados en el gradiente. Es importante puntualizar que solo podemos extender este concepto a optimización global en condiciones muy particulares con funciones objetivo convexas en un espacio de búsqueda convexo. Uno de los métodos más populares para el cálculo de la “derivada” es el método basado en el cálculo del adjunto, el cual requiere un considerable esfuerzo computacional y un conocimiento exhaustivo de la función objetivo. Cabe destacar que los métodos basados en el gradiente normalmente presentan una convergencia rápida, pero requieren el uso del cálculo de la “derivada”, lo que no siempre es posible. Este es el caso en la optimización de los planes de desarrollo para los yacimientos ya que la función objetivo es evaluada mediante la llamada a un simulador.

Bajo este contexto, el uso de técnicas de “derivada libre” [1] son cada vez más utilizadas en la industria del petróleo. Esencialmente, se emplean dos métodos de técnicas de derivada libre. El primero de ellos está basado en búsquedas de patrones. Para ello, se define una cruceta, Figura 3, y se calcula el valor de la función objetivo en todos los puntos de ella. Se escoge el punto que optimiza la función objetivo y se define una nueva cruceta con el mismo tamaño tomando como centro dicho punto. En el caso que no se obtenga ninguna mejora, el tamaño de la cruceta es reducido, garantizando de esta forma la convergencia de la solución. Este proceso es repetido hasta que el criterio de parada es alcanzando. El segundo método de técnicas de derivada libre está basado en el uso de modelos subrogados de la función objetivo. Un conjunto de simulaciones iniciales, elegidas utilizando diseño experimental, definen un modelo subrogado mediante técnicas de interpolación, el cual es optimizado dando una solución intermedia en el problema de optimización. El algoritmo de optimización más popular en esta área es el “Bound Optimization By Quadratic Approximation” (BOBYQA) [15]. Estos métodos han dado muy buenos resultados para simulaciones de yacimientos paralelizables muy costosas computacionalmente [22].

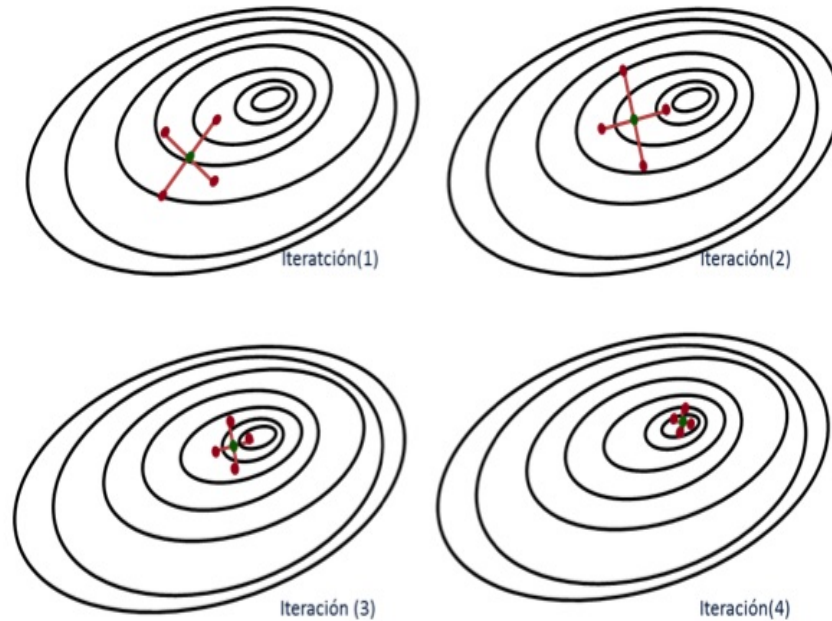


Figura 3: Cuatro iteraciones de la búsqueda por patrón.

### Búsqueda global

Los métodos de búsqueda globales están basados en una heurística, que permite explorar espacios de búsqueda grandes sin quedar atrapados en mínimos locales. Esta heurística, aunque es eficiente en la mayoría de los casos, no garantiza, a priori, la convergencia al óptimo global. Estos métodos están basados en el cálculo de la función objetivo para una población inicial. En cada una de las iteraciones, se definen nuevos elementos de la población sobre los que evaluar la función objetivo. No existe una clara metodología para definir el tamaño de las poblaciones ni los parámetros que definen la heurística. Cada metodología, requiere la definición de un conjunto óptimo de parámetros, difícil de conocer a priori, aun teniendo un conocimiento experto de la misma.

En los últimos años han surgido una gran variedad de técnicas heurísticas: el recocido simulado, la búsqueda tabú, pero las más extendidas son los algoritmos genéticos [8]. Estas técnicas están basadas en la simulación de las leyes evolutivas de Darwin, donde el cálculo de las nuevas poblaciones está basado en dos

operadores, cruzamiento y mutación. El primero nos permite la mezcla de poblaciones, simulando la reproducción de las especies y realiza una búsqueda global, mientras que el operador de mutación introduce pequeñas modificaciones en los individuos (variables) para evitar quedar atrapados en mínimos locales.

Una de las técnicas heurísticas que mejor ha funcionado para la optimización de los planes de desarrollo es la “Particle Swarm Optimization”, PSO [4, 23]. Este método intenta simular el comportamiento de enjambres de partículas, optimizando su movimiento, al reproducir un patrón en la naturaleza. Desde el punto de vista matemático el comportamiento de los PSO depende de unos pocos parámetros, cuyo uso correcto es bastante complejo pero existen diversos trabajos en la literatura para su elección [6]. Los PSO están compuestos por un número finito,  $S$ , de partículas. Cada partícula tiene una localización en el espacio de búsqueda y una velocidad. La nueva posición de la partícula  $j$  en la iteración  $k + 1$ , es determinada como sigue:

$$x_{k+1}^j = x_k^j + v_{k+1}^j \Delta t \quad \forall j \in \{1, \dots, S\},$$

donde  $v_{k+1}^j$  es la velocidad de la partícula  $j$  en la iteración  $k + 1$  y  $\Delta t$  es el incremento del tiempo. Normalmente este parámetro es fijado a 1, por criterios de convergencia. La velocidad es asociada con cada partícula como sigue:

$$v_{k+1}^j = wv_k^j + \underbrace{c_1 D_{k+1}^1 (y_k^j - x_k^j)}_{\text{término cognitivo}} + \underbrace{c_2 D_{k+1}^2 (\hat{y}_{k,j} - x_k^j)}_{\text{término social}},$$

donde  $w$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  son los denominados parámetros de inercia, cognitivo y social, respectivamente. Las matrices  $D_{k+1}^1$  y  $D_{k+1}^2$  son matrices diagonales, con elementos aleatorios elegidos con una distribución uniforme  $[0, 1]$ . El término de inercia tiende a mover a la partícula hacia espacios de búsquedas teniendo en cuenta la historia de los movimientos previos de la partícula. El término cognitivo atrae a la partícula hacia la mejor solución computada en la historia de la partícula,  $y_k^j$ . Finalmente, el término social atrae a la partícula hacia la mejor solución global de todas las partículas,  $\hat{y}_{k,j}$ . Es la combinación de las tres velocidades lo que permite la exploración en vecindades de óptimos locales. Es importante determinar con precisión los términos y poblaciones iniciales, ya que estos métodos tienden a colapsar en un óptimo local. Diversas técnicas han sido desarrolladas para evitarlo, como las denominadas “multi-start”, las cuales se basan en iniciar diversos PSO en paralelo con diferentes poblaciones iniciales.

Cada vez es más común el uso de técnicas híbridas que permiten combinar búsquedas globales con técnicas de optimización locales, lo que acelera la convergencia al refinar los espacios de búsqueda de las técnicas heurísticas. La introducción de restricciones no lineales en algoritmos de optimización es bastante

complicada. Diversas técnicas se han analizado en [23], basadas, principalmente, en reconducir los valores obtenidos durante la optimización a regiones factibles.

### 3. Optimización de los planes de desarrollo bajo incertidumbre

Como comentamos en la introducción, el manejo de la incertidumbre es clave en la optimización y toma de decisiones en la industria de la exploración/producción de hidrocarburos. La caracterización del subsuelo se basa en mediciones puntuales, pozos petrolíferos, a partir de los cuales se debe inferir las propiedades geológicas del subsuelo mediante técnicas de geoestadística que correlacionan espacialmente las mediciones observadas. Bajo este contexto, diferentes metodologías [22] determinan el potencial de producción de un yacimiento/campo en el cual la incertidumbre es caracterizada mediante un conjunto arbitrario  $N$  de realizaciones petrofísicas. La base de estos métodos es la propagación de la incertidumbre a lo largo de todo el “workflow”, por lo que al final se obtiene una distribución de probabilidad de la función objetivo seleccionada, en el problema de optimización, para cada una de las soluciones computadas. Por ejemplo, dada una estrategia de producción, caracterizada por un conjunto de variables de control  $x$ , ésta debe ser evaluada  $N$  veces en el simulador y el VAN debe ser calculado para cada una de ellas, obteniéndose, así, la distribución probabilística.

Debido a que la simulación del flujo en los yacimientos normalmente es muy costosa computacionalmente y  $N$  es usualmente grande (en el orden de las centenas o millares), es necesaria la selección de un pequeño conjunto de realizaciones,  $N_s < N$ , que caractericen la distribución probabilística. Para ello, las  $N$  realizaciones originales son primero mapeadas en un espacio de dimensión relativamente reducida mediante el uso de “multidimensional scaling” [2, 19]. En este espacio de dimensión reducida, las  $N$  realizaciones pueden ser agrupadas mediante  $N_s$  “clusters”, por ejemplo usando técnicas de  $k$ -means [20]. Finalmente, una representativa realización es escogida para cada uno de los  $N_s$  “clusters” [24].

La técnica de “multidimensional scaling” está basada en definir una función que cuantifique cómo de diferente son dos realizaciones distintas. En el contexto de optimización de planes de desarrollo de los yacimientos, es deseable que la distancia entre dos realizaciones sea calculada de forma rápida y correlacionada con el potencial de producción utilizado como métrica y, en consecuencia, el VAN. La función de distancia determinada mediante propiedades estáticas (por ejemplo, productividad de los pozos, índice de oportunidad [22], típicamente tiene la ventaja de tener un poder computacional bajo pero en algunos casos no captura complejos fenómenos físicos de la simulación de yacimientos. Por otro lado, funciones de distancia asociadas a una propiedad dinámica, mediante el uso de



rápidas simulaciones mediante líneas de corriente [19] podrían caracterizar mejor el conjunto de las  $N_s$  realizaciones pero elevan los tiempos de cálculo en gran medida.

Estas técnicas de muestreo, conocidas como “Smart Sampling”, permiten obtener la probabilidad de cada una de las soluciones computadas calculando el número de puntos que se obtienen en cada uno de los “clusters”. Finalmente, el valor esperado puede ser calculado mediante la ecuación 6 y la incertidumbre es propagada a lo largo del “workflow” de optimización. Es importante destacar que diferentes operadores, que transforman la probabilidad de distribución en un valor puntual, han sido bien estudiados y utilizados en los problemas de análisis de riesgo en la última década [24].

El “workflow” de optimización bajo incertidumbre esta descrito en la Figura 4.

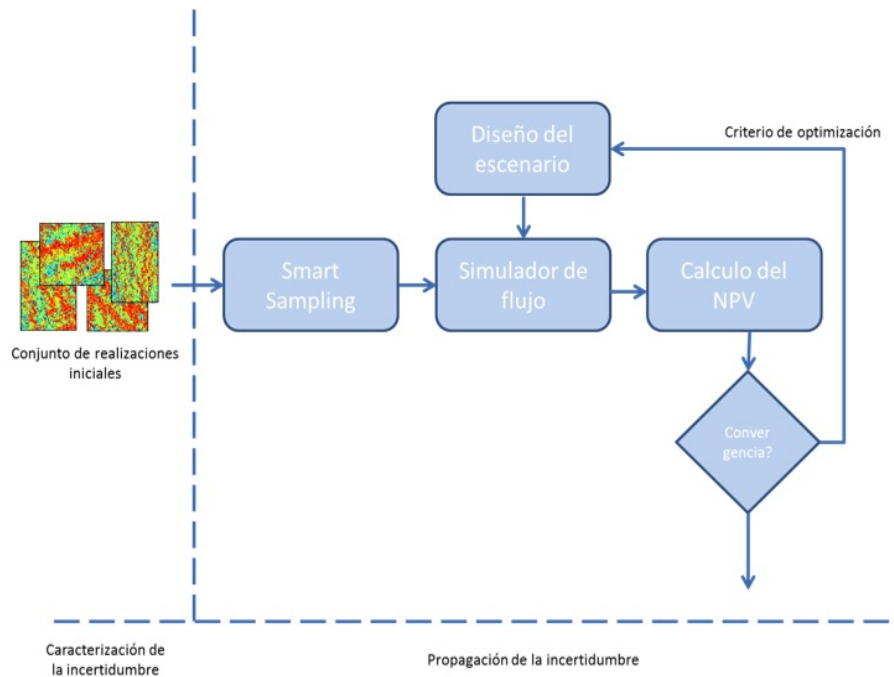


Figura 4: Workflow de optimización bajo incertidumbre.

#### 4. Conclusión

En este artículo se han presentado, a modo de estado del arte, las técnicas matemáticas más utilizadas en la industria petrolera para la optimización de los planes de desarrollo de los yacimientos de hidrocarburos. Esas técnicas están fuertemente condicionadas por la elevada incertidumbre asociada al conocimiento del subsuelo. Por ello, constituyen hoy en día una de las líneas abiertas de mayor interés para la industria ya que lo que finalmente se pretende es encontrar herramientas que permitan cuantificar incertidumbre y el riesgo de los diferentes activos que constituyen el port-folio de una compañía de exploración/producción de hidrocarburos.

#### Referencias

- [1] Conn, A.R., Scheinberg, K. and Vicente, L.N. 2009. Introduction to Derivative-Free Optimization. Philadelphia, Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [2] Cox, T.F. and Cox, M.A.A. 2001. Multidimensional Scaling, second edition. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- [3] De Paola, G., Torrado, R. R., Bhattacharjya, D., and Mello, U. (2013, September 30). Generation of an Accurate Conceptual Model for Green Fields. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/166500-MS
- [4] Eberhart R. C., and Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory. In Proceedings of the Sixth International Symposium on Micromachine and Human Science, pages 39–43, 1995.
- [5] Evans, S. 2005. A Modern Approach to E&P Asset Valuation, Development, and Decision Making. J Pet Technol 57 (7): 36–38. SPE-0705- 0036-JPT. <http://dx.doi.org/10.2118/0705-0036-JPT>.
- [6] Fernández Martínez J. L. and García Gonzalo E. Stochastic stability analysis of the linear continuous and discrete PSO models. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 15(3):405–423, 2011.
- [7] Forouzanfar F., Li G., and Reynolds A.C. 2010. A two-stage well placement optimization method based on adjoint gradient. Paper SPE 135403 presented at the 2010 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Florence, Italy, 19-22 September.

- [8] Goldberg, David. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Addison-Wesley Educational Publishers Inc
- [9] Hegstad, B.K., Tollefsen, S., Arghir, D.V., et al. 2004. Rapid Scenario and Risk Analysis for a Complex Gas Field With Large Uncertainties. Presented at the 2004 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, 26–29 September. SPE 90961-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/90961-MS>.
- [10] Isebor O.J., EcheverríaCiaurri D., and Durlofsky L.J. 2014. Generalized field-development optimization with derivative-free procedures. SPE Journal 19(5): 891-908.
- [11] Li, L., Jafarpour, B. and Mohammad-Khaninezhad, M.R. 2013. A Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation Algorithm for Coupled Well Placement and Control Optimization Under Geologic Uncertainty. Computat. Geosci. 17 (1): 167–188. <http://dx.doi.org/10.1007/s10596-012-9323-1>.
- [12] Ligeró, E.L., Alves Risso, F.V. and Schiozer, D.J. 2007. Comparison of Methodologies To Evaluate the Risk of Petroleum Fields. Presented at the Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference, Buenos Aires, Argentina, 15–18 April. SPE-107736-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/107736-MS>.
- [13] Onwunalu J. E. and Durlofsky L. J. Application of a particle swarm optimization algorithm for determining optimum well location and type. Computational Geosciences, 14(1):183–198, 2010.
- [14] Otis, R.M. and Schneidermann, N. 1997. A Process for Evaluating Exploration Prospects. AAPG Bull. 81 (7): 1087–1109.
- [15] Powell, M.J.D. 2009. The BOBYQA Algorithm for Bound Constrained Optimization Without Derivatives. Technical report No. DAMTP 2009/NA06, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Centre for Mathematical Sciences, University of Cambridge, Cambridge, UK (August 2009).
- [16] Rose, P.R. 2001. Risk Analysis and Management of Petroleum Exploration Ventures. Tulsa, Oklahoma: American Association of Petroleum Geologists.
- [17] Rose, P.R. 1999. Taking the Risk out of Petroleum Exploration—The Adoption of Systematic Risk Analysis by Oil and Gas Corporations During the 1990s. The Leading Edge 18 (2): 192–199. <http://dx.doi.org/10.1190/1.1438250>.

- [18] Saputelli, L., Mijares, G., Rodriguez, J.A., et al. 2007. Managing Risk and Uncertainty in the Visualization of Production Scenarios. Presented at the SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium, Dallas, Texas, 1–3 April. SPE-107562-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/107562-MS>.
- [19] Scheidt, C. and Caers, J. 2009. Representing Spatial Uncertainty Using Distances and Kernels. *Math. Geosci.* 41 (4): 397–419. <http://dx.doi.org/10.1007/s11004-008-9186-0>.
- [20] Seber, G.A.F. 2004. *Multivariate Observations*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- [21] Suslick, S.B. and Schiozer, D.J. 2004. Risk Analysis Applied to Petroleum Exploration and Production: An Overview. *J. Pet. Sci. Eng.* 44 (1–2): 1–9. <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2004.02.001>.
- [22] Torrado, R. R., Echeverría Ciaurri, D., Mello, U., and Embid, S. 2013. Fast Reservoir Performance Evaluation Under Uncertainty: Opening New Opportunities. Paper SPE 166392-MS presented at the Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, USA, 30 September- 2 October 2013.
- [23] Torrado, R R., Echeverría-Ciaurri, D., Mello, U., and Embid, S. (2015, July 1). Opening New Opportunities With Fast Reservoir-Performance Evaluation Under Uncertainty: Brugge Field Case Study. Society of Petroleum Engineers.[doi:10.2118/166392-P](https://doi.org/10.2118/166392-P)
- [24] Valladao, D. M., Torrado, R. R., Flach, B., and Embid, S. (2013, October 28). On The Stochastic Response Surface Methodology For The Determination Of The Development Plan Of An Oil & Gas Field. Society of Petroleum Engineers.[doi:10.2118/167446-M](https://doi.org/10.2118/167446-M)
- [25] Wang, H., Echeverría Ciaurri, D., Durlofsky, L.J., et al. 2012. Optimal Well Placement Under Uncertainty Using a Retrospective Optimization Framework. *SPE J.* 17 (1): 112–121. SPE-141950-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/141950-PA>.

### 3 Otras noticias y anuncios

#### 3.1 Sobre la escuela *New Perspectives in Markov Chain Monte Carlo*

##### **New Perspectives in Markov Chain Monte Carlo**

Valladolid, 8-12 junio 2015

<http://wmatem.eis.uva.es/npmcmc>

---

Mari Paz Calvo

Universidad de Valladolid

Del 8 al 12 de junio de 2015 tuvo lugar en el edificio histórico de la Universidad de Valladolid la escuela ‘New Perspectives in Markov Chain Monte Carlo’, organizada por J.M. Sanz Serna y M.P. Calvo. El principal objetivo de la escuela era hacer una revisión de los avances más recientes que han tenido lugar en relación con los métodos de Montecarlo, métodos que, sin duda, están entre los algoritmos más utilizados en las distintas ciencias. La escuela estaba orientada a matemáticos, estadísticos y científicos interesados en los métodos de Montecarlo y contó con cerca de cuarenta participantes de nueve países distintos (Alemania, Austria, China, España, Estados Unidos, Finlandia, Francia, Reino Unido y Suecia), de los que la mitad fueron estudiantes de doctorado y jóvenes investigadores postdoctorales que contaron con becas de alojamiento financiadas por la organización para facilitar su participación en la escuela.

Como estaba previsto, la escuela se organizó en torno a tres cursos de cuatro horas de duración cada uno, impartidos por especialistas internacionales. Hubo, además, cuatro sesiones de charlas breves en las que ocho investigadores pudieron presentar los resultados de su investigación.

El primer curso, titulado “*Exact approximations of MCMC algorithms*”, fue impartido por Christophe Andrieu, University of Bristol (Reino Unido). El segundo curso, “*MCMC-based integrators for SDEs*”, corrió a cargo de Nawaf Bou-Rabee, Rutgers-The State University of New Jersey (Estados Unidos), y el tercer curso, titulado “*MCMC in High Dimensions*”, fue presentado por Andrew Stuart, University of Warwick (Reino Unido).

Las charlas breves corrieron a cargo de Caifang Cai, CentraleSupélec-CNRS-Univ. Paris-Sud (France), Cédric M. Campos, Universidad de Valladolid (Spain),

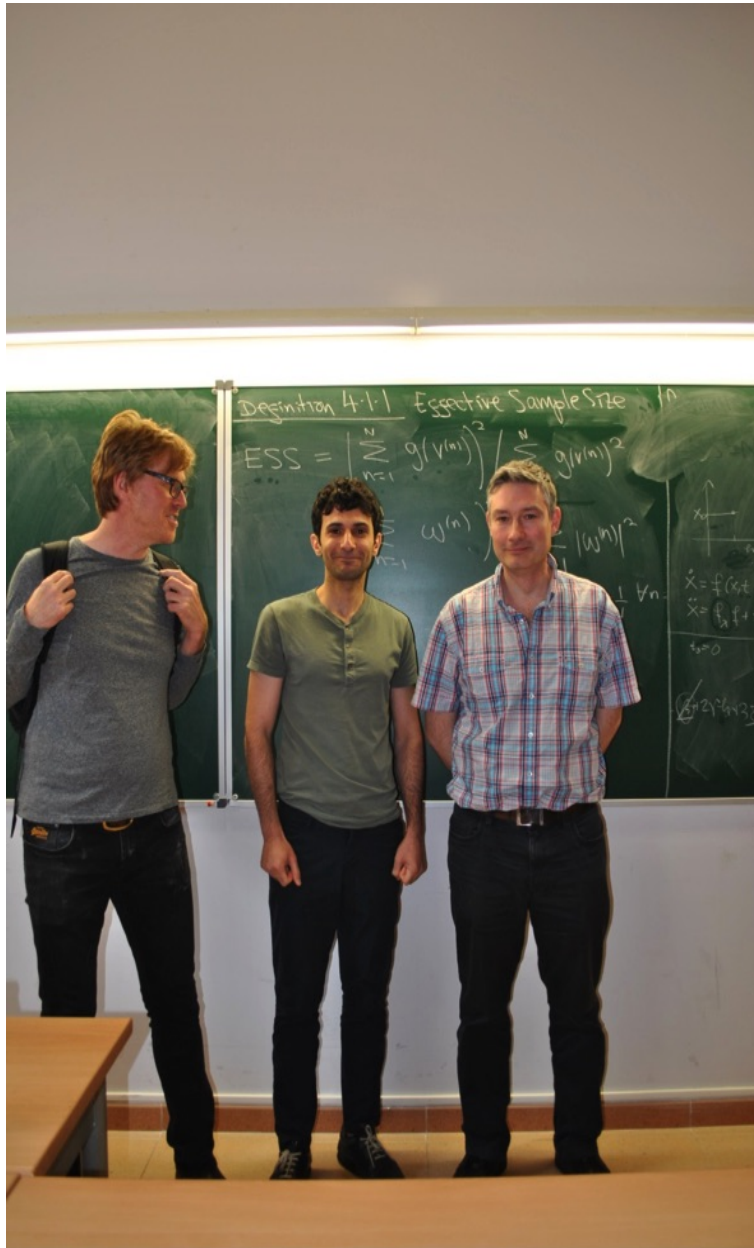


Figura 5: De izquierda a derecha, Andrew Stuart, Nawaf Bou-Rabee y Christophe Andrieu, responsables de los tres cursos impartidos en la escuela NPMCMC.

Begoña Cano, Universidad de Valladolid (Spain), Moody Chu, North Carolina State University (United States), Andreas Eberle, University of Bonn (Germany), Jeremy Heng, University of Oxford (United Kingdom), Samuel Livingstone, University College London (United Kingdom) y Philip Maybank, University of Reading (United Kingdom).

El programa social de la escuela incluyó una visita guiada al Palacio de Santa Cruz, sede del Rectorado de la Universidad de Valladolid, donde los participantes tuvieron acceso a la Biblioteca Histórica y a la colección de arte africano de la Fundación Jiménez-Arellano-Alonso.

Se puede encontrar más información en

<http://wmatem.eis.uva.es/npmcmc>



Figura 6: Los participantes en la escuela NPMCMC atendiendo a uno de los cursos.

### 3.2 Enrique Zuazua, elegido miembro de la *Academia Europæa*

Enrique Zuazua (Eibar, 1961) ha sido elegido miembro ordinario con número 4059 de la *Academia Europæa* en su sección de Matemáticas en 2015. Como todos los socios de SEMA conocen, Enrique Zuazua es Catedrático de Matemática Aplicada en la Universidad Autónoma de Madrid. Durante el periodo 2008-2015 fue Distinguished Research Professor en Ikerbasque y fundador y Director Científico del BCAM (Basque Center for Applied Mathematics) desde 2008 hasta 2012. El profesor Zuazua cuenta además con numerosos premios a su trayectoria científica, entre los que cabe destacar el Premio Euskadi de Ciencia y Tecnología en 2006 y el Premio Nacional Julio Rey Pastor en Matemáticas y Tecnología de la Información y la Comunicación en 2007. Es también Visiting Professor en la Universidad de Reading (Reino Unido), Doctor Honoris Causa por la Universidad de Lorraine (Francia) y Humboldt Research Awardee en la Universidad de Erlangen (Alemania).

La *Academia Europæa* actúa como una Academia Europea de Humanidades, Letras y Ciencias, compuesta de miembros individuales elegidos a través de un proceso de nominación basado en la evaluación por pares de los méritos contraídos por los candidatos en el campo particular de que se trate. La elección es posteriormente confirmada por el Consejo de la Academia.

Los miembros se eligen en todo el continente europeo (no sólo en Europa Occidental) e incluyen también los académicos europeos residentes en otras regiones del mundo. El número de miembros en la actualidad ronda los 2800, entre ellos 52 Premios Nobel, algunos de ellos elegidos por la Academia antes de ser galardonados con dicho premio.

La sección de Matemáticas incluye miembros que han sido galardonados con el Premio Abel, el premio Wolf, la Medalla Fields, etc. Algunos de dichos miembros son Michael Atiyah, Enrico Bombieri, Jean Pierre Bourguignon, Haim Brezis, Philippe Ciarlet, Ingrid Daubechies, Timothy Gowers, Martin Hairer, Maxim Kontsevich, Pierre-Louis Lions, Yuri Manin, Sergei Novikov, Alfio Quarteroni, Peter Sarnak, Yakov Sinai, Endre Szemerédi, Cedric Villani, Vendelin Werner y Andrew Wiles.

Desde el Boletín Electrónico de SEMA queremos felicitar al profesor Enrique Zuazua por su elección en tan prestigioso foro.



### 3.3 SeMA Journal

#### Índice del Vol. 70, issue 1, October 2015 de SĚMA Journal

- (i) Alicia Cordero, Antonio Franques and Juan R. Torregrosa, *Multidimensional Homeier's generalized class and its application to planar 1D Bratu problem*, pages 1-10.
- (ii) S. Amat, J.A. Ezquerro and M.A. Hernández-Verón, *Iterative methods for computing the matrix square root*, pages 11-21.
- (iii) J.A. Ezquerro, M. Grau-Sánchez, M.A. Hernández-Verón and M. Noguera, *A study of optimization for Steffensen-type methods with frozen divided differences*, pages 23-46.
- (iv) Ioannis K. Argyros and Santhosh George, *Local convergence for some high convergence order Newton-like methods with frozen derivatives*, pages 47-59.

#### Índice del Vol. 71, issue 1, November 2015 de SĚMA Journal

- (i) Natalia Romero, *Solving the one dimensional Bratu problem with efficient fourth order iterative methods*, pages 1-14.
- (ii) Miquel Grau-Sánchez, Miquel Noguera and José L. Díaz-Barrero, *Note on the efficiency of some iterative methods for solving nonlinear equations*, pages 15-22.
- (iii) Goerge A. Anastassiou and Ioannis K. Argyros, *Convergence for iterative methods on Banach spaces of a convergence structure with applications to fractional calculus*, pages 23-37.
- (iv) Á. Alberto Magreñán and Ioannis K. Argyros, *Ball convergence theorems and the convergence planes of an iterative method for nonlinear equations*, pages 39-55.
- (v) Martín García-Olivo, José M. Gutiérrez and Á. Alberto Magreñán, *A complex dynamical approach of Chebyshev's method*, pages 57-68.

**Índice del Vol. 72, issue 1, December 2015 de SĉMA Journal**

- (i) Ioannis K. Argyros and Santhosh George, *Ball comparison between two optimal eight-order methods under weak conditions*, pages 1-11.
- (ii) Joan-Josep Climent, Francisco J. Garcĉa and Ver3nica Requena, *On the construction of new bent functions from the max-weight and min-weight functions of old bent functions*, pages 13-36.
- (iii) A. Ebadian, H. Rahmani Fazli and A.A. Khajehnasiri, *Solution of nonlinear fractional diffusion-wave equation by traingular functions*, pages 37-46.
- (iv) M. Jos3 Legaz, *Computer aided ship design: a brief overview*, pages 47-59.
- (v) Omid Solaymani Fard and Tayebah Aliabdoli Bidgoli, *Solving hybrid fuzzy differential equations by Chebyshev wavelet*, pages 61-82.
- (vi) Shwet Nisha and P.K. Parida, *An improved bisection Newton-like method for enclosing simple zeros of nonlinear equations*, pages 83-92.

### **3.4 Noticias de RedIUM**

#### **Programa de Estancias Posdoctorales de RedIUM. Segunda Convocatoria**

El propósito de este programa es la cofinanciación de estancias posdoctorales entre la Red de Institutos Universitarios de Matemáticas (RedIUM) y los institutos adheridos a la misma.

1) El programa se centra en la cofinanciación de gastos asociados a estancias cortas de jóvenes doctores en los institutos adheridos a la RedIUM. La Red financiará hasta un máximo de 1.000 euros al mes en concepto de gastos justificables de viajes, estancia y dietas, y se espera que los centros receptores puedan aportar una cifra similar. En esta segunda convocatoria, la RedIUM destina 6.000 euros a este programa.

2) La cofinanciación de estancias por parte de la RedIUM requiere que estas se repartan entre varios de los institutos adheridos.

3) Bases:

- 3.1 Las propuestas serán presentadas preferiblemente por dos o más institutos para la realización de una estancia posdoctoral compartida. Las solicitudes se enviarán por correo electrónico al coordinador de la RedIUM dentro de los plazos que se acuerden.
- 3.2 En la propuesta se adjuntará un curriculum vitae de la persona candidata, una breve descripción del trabajo a realizar, los nombres de los institutos involucrados, el número de meses de estancia que se solicitan en cada instituto y el compromiso de cofinanciación.
- 3.3 Las estancias solicitadas serán de un mínimo de dos meses y un máximo de seis. En esta segunda convocatoria la incorporación deberá producirse antes del 1 de junio de 2016 y la terminación será antes del 30 de noviembre de 2016.
- 3.4 El plazo de presentación de las solicitudes concluirá el 29 de enero de 2016.

4) La decisión acerca de la selección de las solicitudes a subvencionar será tomada por el equipo gestor de la RedIUM. Se podrán conceder estancias por una duración menor que la solicitada, siempre que esta supere los dos meses en total. En la evaluación se tendrán en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos:

- méritos de la persona candidata;
- antigüedad de la defensa de la tesis (no más de cinco años);
- utilidad previsible de las ayudas para el acceso de los beneficiarios a otras oportunidades profesionales.

Toda la información relevante se puede encontrar en  
<http://www.redium.es>

## 4 Socios Institucionales de SeMA



- (i) Banco Santander (Socio de Honor)
- (ii) Basque Center for Applied Mathematics (BCAM)
- (iii) Centre de Recerca Matemàtica (CRM)
- (iv) Iberdrola
- (v) Libros Guijarro
- (vi) Dep. de Matemáticas (Facultad de Ciencias, Univ. Autónoma de Madrid)
- (vii) Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT)
- (viii) Dep. de Matemáticas (Escuela Politécnica Superior, Univ. Carlos III de Madrid)
- (ix) Dep. de Matemática Aplicada (Facultad de CC. Matemáticas, Univ. Complutense de Madrid)
- (x) Dep. de Matemáticas (Facultad de Ciencias, Univ. de Cádiz)
- (xi) Dep. de Matemática Aplicada y C. de la Computación (E.T.S.I. Industriales y de Telecomunicación, Univ. de Cantabria)
- (xii) Dep. de Matemáticas, Estadística y Computación (Facultad de Ciencias, Univ. de Cantabria)
- (xiii) Dep. de Matemáticas (E.T.S.I. Industriales, Univ. de Castilla-La Mancha)
- (xiv) Instituto de Matemática Aplicada a la Ciencia y la Ingeniería (IMACI) (E. T. S. de Ingenieros Industriales, Univ. de Castilla-La Mancha)
- (xv) Dep. de Informática y Análisis Numérico (Facultad de Ciencias, Univ. de Córdoba)
- (xvi) Dep. de Matemática Aplicada (Facultad de Ciencias, Univ. de Granada)
- (xvii) Dep. de Matemáticas (Facultad de Ciencias Experimentales, Univ. de Huelva)

- (xviii) Dep. de Matemáticas (Facultad de Informática, Univ. de La Coruña)
- (xix) Dep. de Análisis Matemático (Facultad de Matemáticas, Univ. de La Laguna)
- (xx) Dep. de Matemáticas (E.I. Industrial e Informática, Univ. de León)
- (xxi) Dep. de Matemática (Escuela Politécnica Superior, Univ. de Lleida)
- (xxii) Dep. de Análisis Matemático (Facultad de Ciencias, Univ. de Málaga)
- (xxiii) Dep. de Matemáticas (Facultad de Ciencias, Univ. de Oviedo)
- (xxiv) Facultad de Ciencias (Univ. de Oviedo)
- (xxv) Dep. de Matemática Aplicada (Facultad de Ciencias, Univ. de Salamanca)
- (xxvi) Dep. de Matemática Aplicada (Facultade de Matemáticas, Univ. de Santiago de Compostela)
- (xxvii) Facultad de Matemáticas (Univ. de Santiago de Compostela)
- (xxviii) Dep. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico (Facultad de Matemáticas, Univ. de Sevilla)
- (xxix) Facultad de Matemáticas (Univ. de Sevilla)
- (xxx) Dep. de Matemática Aplicada II (E.S. Ingenieros, Univ. de Sevilla)
- (xxx1) Dep. de Matemática Aplicada (Univ. de Valencia)
- (xxxii) Dep. de Matemática Aplicada II (E.T.S.I. Telecomunicación, Univ. de Vigo)
- (xxxiii) Dep. de Matemática Aplicada I (E.T.S.I. Telecomunicación, Univ. de Vigo)
- (xxxiv) Dep. de Matemática Aplicada (Univ. de Zaragoza)
- (xxxv) Dep. de Matemática Aplicada, Estadística e Investig. Operativa (Facultad de Ciencias, Univ. del País Vasco)
- (xxxvi) Dep. de Matemática Aplicada I (E.T.S.I. Industriales, Univ. Nacional de Educación a Distancia)
- (xxxvii) Dep. de Matemática Aplicada y Estadística (E.U.I.T. Civil y Naval, Univ. Politécnica de Cartagena)
- (xxxviii) Dep. de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil (E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, Univ. Politécnica de Madrid)

- (xxxix) Dep. de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial (E.T.S.I. Aeronáuticos, Univ. Politécnica de Madrid)
- (xl) Dep. de Matemática Aplicada a la Arquitectura Técnica (E.U. Arquitectura Técnica, Univ. Politécnica de Madrid)
- (xli) Dep. de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información (E.T.S.I. Telecomunicación, Univ. Politécnica de Madrid)
- (xlii) Dep. de Matemática Aplicada (E. U. de Ingeniería Técnica Industrial, Univ. Politécnica de Madrid)
- (xliii) Departamento Matemática Aplicada (Univ. Politécnica de Valencia)
- (xliv) Institut de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló (IMAC, Universitat Jaume I)
- (xlv) Instituto de Matemática Multidisciplinar (IM2, Univ. Politècnica de València)
- (xlvi) Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada (IUMPA, Univ. Politècnica de València)
- (xlvii) Dep. de Ingeniería Matemática e Informática (Univ. Pública de Navarra)

## **Boletín Electrónico de la Sociedad Española de Matemática Aplicada SĒMA**

### **Editores**

Fernando Casas (U. Jaime I)  
Vicente Martínez (U. Jaime I)

### **Comité Editorial**

R. Bru (U. Politècnica de València)	M.P. Calvo (U. de Valladolid)
J. Moro (U. Carlos III)	D. Gómez (U. de Santiago)
J.L. García Guirao (U.P. Cartagena)	I.A. García (U. de Lleida)
C. Gorria (U. del País Vasco)	F. Ortegón (U. de Cadiz)
L. Rández (U. de Zaragoza)	S. Amat (U.P. Cartagena)
S. Busquier (U.P. Cartagena)	J.A. Murillo (U.P. Cartagena)
M. Moncayo (U.P. Cartagena)	

### **Página web de SĒMA**

<http://www.sema.org.es/>

### **e-mail**

[boletin@sema.org](mailto:boletin@sema.org)