responsables de sección

Vida de la Sociedad
Mariano Gasca
Universidad de Zaragoza
gasca@posta.unizar.es
fax: (976) 35 62 44

Congresos y seminarios
Juan Luis Vázquez
Universidad Autónoma de Madrid
jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es
fax: (91) 397 48 89

Novedades bibliográficas
Eduardo Casas
Universidad de Cantabria
sema@masun1.unican.es
fax: (942) 20 17 03

Actividad académica
Tomás Chacón
Universidad de Sevilla
chacon@cica.es
fax: (95) 455 28 98

Relaciones con la industria
Juan Manuel Viaño
Universidad de Santiago de Compostela
viano@zmat.usc.es
fax: (981) 59 70 54

sumario

edición

Editor jefe
FRANCISCO LISBONA CORTÉS
Dpto. Matemática Aplicada
Universidad de Zaragoza

Editor
FCO.JAVIER SAYAS GONZÁLEZ
Dpt. Matemática Aplicada
Edificio de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Imprime: COMETA, S.A., carretera de Castellón, km. 3,400. 50013 Zaragoza
Dirección editorial: Departamento de Matemática Aplicada, Edificio de Matemáticas, primera planta, Campus Universitario, 50009 Zaragoza.
e-mail: `sema@posta.unizar.es` Fax: (976) 76 11 25

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 3-34

EL PROBLEMA DEL REPARTO PROPORCIONAL DE ESCAÑOS

MICHEL BALINSKI
LABORATOIRE D'ÉCONOMÉTRIE DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS (FRANCIA)

VICTORIANO RAMÍREZ GONZÁLEZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA.
UNIVERSIDAD DE GRANADA.(ESPAÑA)

1 Introducción.

La asignación proporcional entera es un problema que puede aparecer en diversos contextos. El más conocido es el correspondiente al reparto de escaños en proporción a los votos obtenidos por los partidos que concurren en una elección; sin embargo no es el único. La asignación de los escaños de la Cámara de Diputados a las circunscripciones (las provincias en nuestro caso), en proporción a la población de cada una, es otro problema análogo. La asignación de puestos escolares a los pueblos en proporción a la población, y en general, muchos problemas de asignación de recursos en economía admiten planteamientos similares.

Por simplicidad, y por ser popularmente el problema más conocido en España, este trabajo se enfocará desde el punto de vista del problema de la asignación de escaños a los partidos que compiten en unas elecciones en una misma circunscripción electoral; además, en ocasiones, haremos alguna referencia a la asignación de escaños a las provincias.

Si tenemos que asignar una cantidad de escaños $h > 0$ en proporción a unos números $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ todos mayores que cero, no encierra ningún secreto decir que las cantidades $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, donde $q_i = h\dfrac{v_i}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}$, constituyen la solución. Sin embargo, la respuesta no es tan simple cuando se exige que la solución sea entera, como ocurre en los problemas de representación proporcional. En tal caso, en general, los valores anteriores, q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, (denominados **cuotas**) no constituyen la solución del problema. Sino que, una

solución o asignación será una n-upla, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, de números enteros, no negativos, "próximos" a las cuotas y que sumen h. Así pues, estamos ante un problema de aproximación y por tanto según como se mida esa "proximidad" resultará una solución u otra.

Empecemos con un ejemplo tomado de los resultados en Albacete de las elecciones generales de 1989. Los votos de los partidos elegibles (los que superaron la barrera actual del 3%) así como las cuotas y las asignaciones que se obtienen con algunos métodos conocidos se recogen en la Tabla 1.

Tabla 1

Resultados, cuotas y asignaciones para la provincia de Albacete en 1989.

Partido	Votos	Cuotas*	R. M.	R. p. e.	R. m. p.	R. p. d.
PSOE	97 693	2.062	2	1	2	3
PP	60 633	1.279	1	1	2	1
IU	16 523	0.349	1	1	0	0
CDS	14 670	0.310	0	1	0	0
Totales	189 519	4	4	4	4	4

* Redondeadas a la milésima más cercana (¡conseguir que la suma sea exactamente cuatro es, precisamente, nuestro problema!)

Los cuatro métodos que aparecen en la Tabla 1 (Restos Mayores, Redondeo por exceso, Redondeo al entero más próximo y Redondeo por defecto) son considerados de asignación proporcional; aunque todos ellos los describimos después, podemos adelantar que el método de los "Restos Mayores" también llamado por algunos "Proporcional Puro" consiste en redondear los restos mayores por exceso y los demás por defecto (de manera que sumen h); es el método más primitivo y el más intuitivo en un primer intento de aproximar las cuotas.

Observamos que, para un problema tan simple como es el reparto de los escaños de Albacete, cada método da una respuesta diferente.

La cuestión que se nos presenta es ¿qué solución se debe elegir para el problema anterior? y ¿por qué un método antes que otro?

Otro ejemplo. Vamos a suponer ahora que el número de escaños de la circunscripción de Albacete es 5, en lugar de 4, y que los resultados de la votación son los mismos. La Tabla 2 da las cuotas y las asignaciones obtenidas usando de nuevo los métodos que aparecen en la Tabla 1.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 3-34

Tabla 2

Cuotas y asignaciones en el supuesto de que Albacete tuviese 5 escaños.

Partido	Votos	Cuota	R. M.	R. p. e.	R. m. p.	R. p. d.
PSOE	97 693	2.577	3	2	3	3
PP	60 633	1.600	2	1	2	2
IU	16 523	0.436	0	1	0	0
CDS	14 670	0.387	0	1	0	0
Totales	189 519	5	5	5	5	5

En este caso la respuesta de los cuatro métodos es más unánime; todos salvo el método basado en redondeo por exceso dan la asignación: $(3,2,0,0)$. Pero, ¿no le extraña la solución obtenida en la Tabla 2 con el método de los Restos Mayores al compararla con la solución dada por este método en la Tabla 1?

2 Formulación matemática del problema

Además de exigir, en la asignación de escaños, que la solución sea entera a veces existen más restricciones; por ejemplo, en la asignación de escaños a circunscripciones es lógico pedir que ningún a_i sea nulo. Así , en EEUU para obtener los representantes de los estados se exige que cada estado reciba, al menos, 1 representante. En Francia, se exige que cada departamento reciba, al menos, 2 representantes. En el Parlamento Europeo, se fijan mínimos diferentes para los distintos países que lo integran (por ejemplo, el mínimo para Luxemburgo es 6, aunque su cuota es menor que 1). También podrían fijarse valores máximos para los a_i (aunque en problemas de representación no se usan nunca).

De manera general se puede notar un problema de asignación de escaños, con **restricciones** mínimas y máximas, por $(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$, donde h es un número natural y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) > \mathbf{0}$, $\mathbf{mín} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{máx} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \geq \mathbf{0}$, son tres n -vectores de componentes enteras no negativas. Una **asignación** de los h escaños es un vector de números enteros, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, que satisfaga $\sum a_i = h$, y además $m_i \leq a_i \leq t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Para que existan soluciones del problema anterior es necesario y suficiente que $m_i \leq t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. y que $\sum m_i \leq h \leq \sum t_i$. Supondremos que todo problema de asignación planteado verifica estas condiciones.

En la representación proporcional, cuando existen restricciones mínimas o máximas es razonable emplear el concepto de cuota ajustada. La **cuota ajustada** para el partido i, notada por r_i, se define como:

$r_i = \text{mediana}\{m_i, \frac{v_i}{x}, t_i\}$, con $x > 0$ elegido de forma que $\sum r_i = h$.

Los r_i son proporcionales a los v_i salvo si una de las cuotas es violada (una justificación rigurosa puede consultarse en [1]).

Un **método** M de asignación es una correspondencia que asigna, al menos, un vector $\mathbf{a}$ a cada problema $(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$. Se nota $\mathbf{a} \in M$ $(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$

En realidad, siempre, podemos entender por cuota el valor de la cuota ajustada; pues si no existen restricciones equivale a que $m_i = 0, t_i = h, \forall i$.

El problema es ¿qué método elegir en la representación proporcional? Las soluciones que han destacado a lo largo de la historia son: el método basado en los restos y los métodos basados en divisores. La asignación obtenida en cada caso parte de una idea simple y termina siendo la solución de un determinado problema de optimización.

3 El método de los Restos Mayores. Paradojas

El método más primitivo es el de los **Restos Mayores**. Es muy simple. En primer lugar, este método asigna a cada partido, i, la parte entera de su cuota ajustada, notémosla por $\lfloor r_i \rfloor$; a continuación se ordenan de mayor a menor los restos $r_i - \lfloor r_i \rfloor$ y se asigna un escaño más a cada uno de los partidos con mayor resto hasta completar los h escaños. Como con cualquier otro método, puede que exista más de una solución ya que pueden existir restos idénticos. Por ejemplo, sin restricciones (mínimas ni máximas), para $\mathbf{v} = (35000, 15000)$ y $h = 5$, el método de los Restos Mayores da como soluciones $\mathbf{a} = (4, 1)$ y $\mathbf{a} = (3, 2)$; mientras que, en iguales condiciones, si $\mathbf{v} = (34999, 15001)$ la solución es única y vale $\mathbf{a} = (3, 2)$.

Se dice que el método de los Restos Mayores verifica la cuota. De una parte, verifica la cuota inferior porque cada partido recibe, al menos, un número de escaños igual al redondeo por defecto de su cuota y, por otra, también verifica la cuota superior porque cada partido recibe, a lo sumo, el redondeo por exceso de su cuota.

Es inmediato que el método Restos Mayores da soluciones que minimizan

$$\sum |a_i - r_i|$$

y en general minimizan

$$\sum |a_i - r_i|^p$$

es decir, las soluciones de los Restos Mayores son óptimas cuando se usa la norma l_p.

Además el método de los Restos Mayores conduce a soluciones que difieren de la cuota en menos de 1 escaño para cualquier partido. Ello justifica que se use con frecuencia en problemas de asignación.

Unos ejemplos aislados no son indicativos del comportamiento de un método. Se necesita saber cómo reacciona cada método frente a cambios en los datos del problema, es decir, cómo cambian las soluciones en función de los datos. También interesa saber cómo se comporta un método frente a un elevado número de problemas de asignación.

Con respecto al método de los Restos Mayores habíamos planteado que se observara si existía algún comportamiento extraño entre las asignaciones obtenidas con él en las Tablas 1 y 2; pues bien, notamos que al aumentar el tamaño de Albacete de 4 a 5 escaños, con el método de los Restos Mayores, IU perdería un escaño. Este efecto se conoce como **Paradoja de Alabama** ¡al repartir más escaños un partido puede recibir menos! Para muchos, es increíble que ésto pueda ocurrir con un método de asignación y, sin lugar a duda, piensan que tal método es inaceptable. Una muestra es la frase de un orador del Congreso de los EEUU pronunciada en 1882 cuando fue descubierta esta paradoja: *"Pero aquí hay un nuevo sistema de matemáticas que demuestra que la verdad se vuelve falsa"*.

El método de los Restos Mayores presenta otras paradojas tan importantes como la de Alabama. Volviendo a los datos de las elecciones generales de 1989 en Albacete, si no participase en la asignación el cuarto partido, el CDS, (porque el mínimo para participar hubiese sido más alto o porque sus electores se hubiesen abstenido, etc), la asignación con el método de los Restos Mayores sería:

Tabla 3

Asignación de los 4 escaños de Albacete entre los tres partidos más votados en 1989.

Partido	Votos	Cuota	R. M.
PSOE	97 693	2.235	2
PP	60 633	1.387	2
IU	16 523	0.378	0
Totales	174 849	4	4

Al comparar los resultados anteriores con los de la Tabla 1, observamos que en la Tabla 1 al participar un partido más en la asignación, el CDS, hay un partido (IU) que recibe más escaños. De nuevo ésto parece increíble e inaceptable. Un fenómeno similar se puede producir cuando entra o sale un partido en un reparto y el número de escaños varía en función de los que corresponden a ese partido; por ejemplo las cuotas en La Coruña, 9 escaños, en las elecciones de 1996 para PP, PSOE, BNG e IU son $\mathbf{q} = (4.34, 3.06, 1.20, 0.40)$ de forma que el método de los Restos Mayores da como solución $\mathbf{a} = (4, 3, 1, 1)$, sin embargo dado que BNG debe recibir 1 escaño, si se saca del reparto y se asignan ahora sólo 8 escaños entre PP, PSOE e IU las nuevas cuotas pasan a ser $\mathbf{q} = (4.45, 3.14, 0.41)$ con lo cual la salida de BNG obliga a IU a ceder un escaño en favor del PP. Al fenómeno que acabamos de describir se le denomina **paradoja de los nuevos partidos**.

A continuación damos un ejemplo en el que se comparan las asignaciones que da el método de los Restos Mayores para los resultados en las elecciones generales de 1986 y 1993 en la provincia de Toledo. Los tres partidos más votados fueron en ambas ocasiones PSOE, PP e IU. La Tabla 4 recoge los datos y la asignación de los 5 escaños con Restos Mayores para las dos elecciones.

Tabla 4

Toledo: 5 escaños. Asignaciones para los datos de 1986 y 1993.

Partido	Votos-86	Cuota-86	R. M.-86	Votos-93	Cuota-93	R. M.-93
PSOE	130 951	2.551	3	142 960	2.316	2
PP	100 685	1.962	2	142 403	2.307	2
IU	*25 000	0.487	0	23 324	0.377	1
Totales	256 636	5	5	308 687	5	5

* Este es el único dato que no es exacto, IU obtuvo en 1986, en Toledo, más votos que en 1993, pasó algo de esta cantidad. Hemos elegido esta aproximación porque además de ser realista nos permite mostrar la nueva paradoja con más simplicidad que eligiendo otra circunscripción (grande).

Observe la evolución de los votos en PSOE e IU. En 1993 PSOE obtuvo más votos que en 1986, mientras que IU obtuvo en 1993 menos votos que en 1986; sin embargo con los escaños les ocurre justo lo contrario. A esta paradoja se le denomina la **paradoja de los votos**.

Por último volvemos a establecer una comparación con el ejemplo desarrollado en la Tabla 1. En aquella ocasión, con Restos Mayores, entre PP e IU reciben 2 escaños (uno cada partido). Volvamos a repartir, con Restos Mayores, estos 2 escaños entre PP e IU (sin tener en cuenta los demás partidos). Se obtiene:

Tabla 5

Partido	Votos	Cuota	R. M.
PP	60 633	1.572	2
IU	16 523	0.428	0
Totales	77 156	2	2

Luego el método de los Restos Mayores no mantiene la misma solución en ambos casos, lo que prueba que este método **no es consistente**. Este inconveniente es muy importante, pues después de todo un problema de reparto proporcional de escaños es un problema de reparto equitativo. Y cada parte de un reparto equitativo debe ser equitativa. Análogamente: *cada parte de una solución proporcional debe ser proporcional.*

Tanto las paradojas mostradas como el hecho de no ser consistente, inducen a un rechazo social y científico del método de los Restos Mayores.

Nos planteamos otro tipo de métodos para la asignación proporcional.

4 Comparación por pares

4.1 La idea de Huntington

Una idea diferente a la de los Restos Mayores, de obtener métodos de asignación de escaños en proporción a los votos, fue sugerida por Huntington en 1921, [9]. Cuando los escaños recibidos por dos partidos no son "exactamente" proporcionales a sus votos existe una desigualdad que podemos medir. La proporcionalidad exacta, entre dos partidos i y j, puede expresarse como

$$\frac{a_i}{v_i} = \frac{a_j}{v_j} \tag{1}$$

Dada una asignación cualquiera, al comparar la representación obtenida por dos partidos con sus votos encontraremos que, en general, uno de ellos (digamos el partido i) está sobrerrepresentado con respecto al otro (el partido j); es decir, se verifica que

$$\frac{a_i}{v_i} > \frac{a_j}{v_j} \tag{2}$$

En (2) podemos medir la "cantidad de desigualdad" en la representación por $\frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j}$. La idea de Huntington es la siguiente: cambiemos 1 escaño del partido i al j. Entonces pueden darse las siguientes posibilidades: a) que el partido i siga estando sobrerrepresentado, en cuyo caso la nueva cantidad de desigualdad es menor y el cambio debe mantenerse; b) que el partido sobrerrepresentado haya pasado a ser ahora el j, y por tanto, la desigualdad (2) cambia de sentido; pero en este caso, podemos medir de nuevo la cantidad de desigualdad y si ha disminuido es lógico mantener dicho cambio; es decir, es lógico que se transfiera un escaño del partido i al j cuando la cantidad de desigualdad disminuye (si ambas cantidades son iguales es indiferente cambiar o no el escaño, corresponde a una situación de empate). Con el método de Huntington se trata de repetir el proceso hasta que no esté justificado ningún cambio de escaño entre dos partidos cualesquiera.

La primera cuestión que surge es acerca de la existencia de solución. En la comparación por pares, partiendo de una asignación inicial, puede ser que se encuentre una solución **estable**, es decir, que llege un momento en que ningún cambio esté justificado, y puede ser que eso no ocurra. Además, la igualdad (1) puede escribirse de muchas formas diferentes, por ejemplo, como $\frac{v_i}{a_i} = \frac{v_j}{a_j}$, $\frac{a_i\, v_j}{v_i} = a_j$, $\frac{v_i}{v_j} = \frac{a_i}{a_j}$, etc; para algunas es fácil encontrar problemas para los cuales la comparación por pares no conduce a una solución estable. Concretamente para la última pueden darse ejemplos en los que se produce una transferencia cíclica de escaños ([5], pág,102).

Observamos que si partimos de una igualdad en la que aparece en el denominador a_i o a_j todo partido debe recibir 1 escaño antes de que ningún otro reciba 2, pues cuando un partido recibe cero escaños la cantidad de desigualdad correspondiente se hace infinita. El método obtenido en ese caso no tiene interés para la asignación de escaños a los partidos, salvo que se les exija un número elevado de votos (o bien un porcentaje mínimo) para participar en la asignación; ya que en caso contrario los partidos pequeños serían muy beneficiados. Sin embargo en la asignación de escaños a las circunscripciones puede estar justificado el uso de un método de este tipo puesto que, en tal caso, toda circunscripción debe recibir escaños.

Cuando se contemplan todas las igualdades equivalentes a la (1) y se estudian los métodos correspondientes, se observa que todas las comparaciones convergentes conducen a sólo 5 métodos diferentes [8]. Además son métodos basados en divisores, como veremos después.

Por otra parte, se puede plantear medir, en la comparación por pares, diferencias relativas en lugar de diferencias absolutas. Entendemos por diferencia relativa de dos números la diferencia absoluta dividida entre el menor de ellos. De tal forma que si partimos de (2) la diferencia relativa vale $(\frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j})/\frac{a_j}{v_j}$, es decir, $\frac{v_j a_i}{v_i a_j} - 1$. Puede comprobarse que se obtiene la misma cantidad si se parte de cualquier otra igualdad equivalente a (1). Ésto hizo que **Huntington** se se inclinara por esta forma de medir la cantidad de desigualdad.

A continuación vamos a ver los pasos a seguir para obtener uno de los métodos basados en comparaciones dos a dos .

Por ejemplo, con el planteamiento hecho en (1), una solución es estable si ningún cambio de escaño está justificado. En tal caso, si cambiamos un escaño del partido i al j, el j está beneficiado y la cantidad de desigualdad entre ambos no disminuye con respecto a la que existía antes. Concretamente, en el estado de equilibrio se verifica:

$$\frac{a_j+1}{v_j} - \frac{a_i-1}{v_i} \geq \frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j} \geq 0, \quad \forall i, \text{ tal que } a_i \geq 1, \quad \forall j, \text{ tal que } a_j \geq 0$$

que equivale a

$$\frac{v_j}{a_j+\frac{1}{2}} \leq \frac{v_i}{a_i-\frac{1}{2}}, \quad \forall i, \text{ tal que } a_i \geq 1, \qquad \forall j, \text{ tal que } a_j \geq 0$$

y por tanto

$$\max_{a_j \geq 0} \left\{ \frac{v_j}{a_j+\frac{1}{2}} \right\} \leq \min_{a_i \geq 1} \left\{ \frac{v_i}{a_i-\frac{1}{2}} \right\} \tag{3}$$

De (3) es fácil deducir que si (a_i, a_j) son las asignaciones a los partidos i y j, cuando el número total de escaños es h y no existen empates (desigualdad estricta entre i y j), entonces ni $(a_i - r, a_j + s)$ ni $(a_i + r, a_j - s)$, con $r, s \geq 1$ pueden ser solución de la asignación de k escaños.

Por tanto, salvo en caso de empate, cuando se pasa de asignar h escaños a asignar $h+1$ escaños ningún partido puede perder escaños (uno de ellos ganará el nuevo escaño). En caso de empate lo que ocurre es que existen varias soluciones y en tal caso, al menos una, también será monótona en función de h. El método que acabamos de describir es el **método de St. Laguë**.

4.2 Procedimiento práctico para obtener la asignación

Es evidente que realizar comparaciones dos a dos hasta obtener la solución puede resultar laborioso. Veamos otras posibilidades.

Para que verifique (3), en la asignación de h escaños, se puede seguir el algoritmo que damos a continuación:

1. Hacer $a_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$

2. Cuando $\sum r_i < h$,

   (a) buscar k tal que $\dfrac{v_k}{a_k + \frac{1}{2}}$ sea máximo

   (b) aumentar en 1 el valor de a_k

3. Fin.

Veamos un segundo procedimiento práctico de obtener la solución para el método de St, Laguë. El algoritmo anterior equivale a hacer una tabla de fracciones, cuya fila i la componen aquellas que tienen como numerador a v_i y por denominadores los números: $0.5, 1.5, 2.5, ..., h - \frac{1}{2}$. A continuación se localizan en la tabla las h fracciones mayores y se asignan al partido i tantos escaños como fracciones mayores se encuentren en la fila i. La Tabla 6 muestra un ejemplo de llevar a cabo la asignación de los 5 escaños de la provincia de Gerona para los datos de las elecciones generales de 1993.

Se han incluido sólo aquellos partidos que obtuvieron más del 3% de los votos. Obsérvese que el método de los Restos Mayores daría la asignación $\mathbf{a} = (2, 1, 1, 1, 0)$, solución diferente a las otras dos dadas en esta tabla.

Tabla 6

Gerona: 5 escaños. asignación con St. Laguë para los datos de 1993. Comparación con las cuotas y con la asignación que dio d'Hondt

Partido	Votos	Cuota	$v_i/0.5$	$v_i/1.5$	$v_i/2.5$	$v_i/3.5$	St.L	Hondt
CiU	128 957	2.22	257 914	85 971	51 583	36 845	2	3
PSOE	84 586	1.46	169 172	56 391	33 834	24 167	2	2
PP	39 112	0.67	78 224	26 075	15 645	11 174	1	0
ERC	27 449	0.47	54 898	18 299	10 980	7 843	0	0
IC	10 437	0.18	20 874	6 958	4 175	2 982	0	0
Totales	290 541	5.00					5	5

De los 5 cocientes más grandes (los subrayados) 2 se encuentran en la primera fila, 2 en la segunda y 1 en la tercera, luego la asignación correspondiente al método de St. Laguë es $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 0, 0)$. En la última columna de la tabla se recoge la asignación que dio el método d'Hondt. Observe la prima que ha dado la asignación actual (d'Hondt) al primer partido en detrimento del tercero.

El método obtenido es un método basado en divisores, por el procedimiento práctico para efectuar la asignación que acabamos de describir, es decir usando los divisores $d(s) = s + \frac{1}{2}$, $s = 0, 1, 2, ...$ (estos divisores son equivalentes a $d(s) = 2s + 1$ ya que darían el mismo resultado, de ahí que los escandinavos denominen a St. Laguë método de los números impares). Además es indiferente realizar los cocientes con los votos o con otras cantidades proporcionales como por ejemplo las cuotas. También hemos de indicar que aunque hemos mostrado varios ejemplos en los que el método de St. Laguë y el de los Restos Mayores dan resultados diferentes lo normal no es eso, sino que a menudo dan la misma solución.

4.3 Otros métodos obtenidos mediante comparaciones por pares

Análogamente, partiendo de las demás expresiones para medir la cantidad de desigualdad, se obtienen los cinco métodos estables posibles (métodos de Huntington). En la Tabla 7 se relacionan tales métodos así como una de las expresiones para la cantidad de desigualdad que los origina (para obtener la medida suponemos que el partido beneficiado es el i).

Tabla 7

Método	Medida	Divisores
Divisores Pequeños (Adams)	$a_i - a_j \frac{v_i}{v_j}$	$d(s) = s$
Media Armónica (Dean)	$\frac{v_j}{a_j} - \frac{v_i}{a_i}$	$d(s) = 2s\frac{s+1}{2s+1}$
Media Geométrica (Hill)	$\frac{v_j a_i}{v_i a_j} - 1$	$d(s) = \sqrt{s(s+1)}$
St.Laguë (Webster)	$\frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j}$	$d(s) = s + \frac{1}{2}$
d'Hondt (Jefferson)	$a_i \frac{v_j}{v_i} - a_j$	$d(s) = s + 1$

A un mismo método se llega desde planteamientos diferentes. Eso ha hecho que se atribuya su invención a personas diferentes, incluso hay quienes creen que se trata de métodos distintos, cuando en realidad no es así. De hecho los métodos más importantes tienen distinto nombre en la literatura europea que en la americana. Así el método atribuido a d'Hondt, [6, 7], en realidad fue una reinvención del obtenido mucho antes por Jefferson, lo mismo ocurre con St. Laguë,[13], respecto a Webster.

El método de los Divisores Pequeños, el de la Media Armónica y el de la Media Geométrica tienen el primer divisor nulo, $d(0) = 0$, quiere decir que antes de asignar el segundo escaño al partido más votado debe recibir un escaño cada uno de los restantes.

Al desarrollar el método de St. Laguë se ha visto que para obtener la asignación correspondiente se puede proceder mediante un algoritmo recursivo, o bien calculando una tabla de cocientes entre los votos de los partidos y los divisores del método (también mediante comparaciones por pares cuando este proceso se estabilice). Estos procedimientos son comunes a los cinco métodos obtenidos por Huntington; no obstante, con posterioridad a la idea de Huntington, se ha generalizado la idea de divisores y se ha obtenido una familia infinita de métodos basados en divisores que contiene como casos particulares a los cinco métodos anteriores. Como se verá en el apartado siguiente, la asignación de escaños con un método basado en divisores se puede realizar mediante otro procedimiento basado en la búsqueda de un divisor. Lógicamente dicho procedimiento también es válido para los métodos de Huntington.

5 Los métodos basados en divisores

5.1 Definición general

Una idea más general de obtener métodos de asignación de escaños, mediante divisores, se basa en la definición de un *"umbral para redondear"* fracciones a cantidades enteras, y buscar un divisor x tal que la suma de los redondeos de las fracciones $\frac{v_i}{x}$ sea h. Los métodos obtenidos de esta forma se denominan **métodos basados en divisores**. Los que acabamos de mencionar son casos particulares de ellos. Pero puede darse un procedimiento completamente general. Para ello, sea d una función estrictamente creciente definida en los enteros no negativos que verifique $s \leq d(s) \leq s+1$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, para la cual no existen dos enteros $a \geq 1$, $b \geq 0$ tales que $d(a) = a$ y $d(b) = b + 1$. Un d-redondeo $[r]_d$ de un número real no negativo r se define por:

$$[r]_d = \begin{cases} 0 & \text{si } r < d(s) \text{ o } r = 0 \\ s \text{ o } s+1 \text{ (indiferente)} & \text{si } r = d(s) \text{ y } r > 0 \\ s+1 & \text{si } d(s) < r < d(s+1) \end{cases}$$

Un método M^d basado en los divisores d, para asignar h escaños entre n partidos (existiendo restricciones mínimas y máximas) consiste en encontrar un divisor x, tal que

$$\sum \text{mediana} \left\{ m_i, \left[\frac{v_i}{x}\right]_d, t_i \right\} = h,$$

para algún d-redondeo de las cantidades $\frac{v_i}{x}$. Cuando no existen límites máximos, t_i, la mediana se sustituye por el máximo de las dos cantidades restantes; y en el caso más frecuente, es decir, cuando no existen restricciones, sólo se necesita $\sum \left[\frac{v_i}{x}\right]_d = h$.

Un procedimiento práctico de aplicar un método de este tipo es el mostrado en la Tabla 6 cambiando los divisores $0.5, 1.5, 2.5, \ldots$ por $d(0), d(1), d(2), \ldots$

5.2 La familia paramétrica

Una posibilidad de elección de la función d es $d(s) = s + \mu$, donde μ es un valor fijo del intervalo $[0, 1]$, que constituye la familia paramétrica de métodos de divisores. Para $\mu = 0$ obtenemos el método de los Pequeños Divisores, para $\mu = \frac{1}{2}$ el método de St.Laguë, para $\mu = 1$ el de d'Hondt . Menos conocido, para $\mu = 0.4$ es el método de Condorcet. Por otra parte $\mu = \frac{2}{3}$ es un valor que hemos propuesto como una posible alternativa a d'Hondt en España, [11]. Pequeñas variaciones de μ conducen a métodos muy similares, pero no cubren todos los métodos basados en divisores. En [1] se muestran ejemplos para los cuales no existe ningún valor de μ que conduzca a un método equivalente al de Hill, por ejemplo. No obstante la familia paramétrica representa un conjunto interesante de métodos.

Después de ver la formulación general de los métodos de divisores ¿qué método elegir? No tenemos una respuesta que permita elegir uno antes que cualquier otro.

6 Optimización

Otro enfoque de la asignación de escaños es plantearla como un problema de optimización. Lógicamente las restricciones serían las dadas al principio, es decir, componentes enteras no negativas, con suma h y comprendidas entre ciertos valores (caso de existir restricciones). La optimización representa una técnica moderna mediante la cual el problema de asignación se plantea como un problema de **programación entera**. Es decir, a las restricciones citadas hay que añadir una función a optimizar, o función objetivo. ¡Pero hay infinitas elecciones posibles!

Una posibilidad es minimizar la suma de las diferencias absolutas entre la cuota, q_i, de cada partido y los escaños, a_i, que recibe. También podría considerarse una potencia de las diferencias absolutas. En todos los casos es un planteamiento perfectamente razonable puesto que se interpreta como minimizar la suma de los errores individuales o una potencia de los mismos. Es frecuente utilizar los cuadrados de las diferencias, con lo cual se trataría de minimizar $\sum (a_i - q_i)^2$.

El número medio de votantes por escaño es $\dfrac{v}{h}$, siendo v el total de votos. El número de votos por escaño del partido i es $\dfrac{v_i}{a_i}$. Las diferencias entre ambas cantidades constituyen otra forma de medir el error, pero es razonable introducir un peso en función del número de escaños afectados en cada caso (así lo plantearía un estadístico). Por tanto, otra función objetivo que podemos sugerir es la siguiente minimizar $\sum a_i \left(\frac{v_i}{a_i} - \frac{v}{h}\right)^2$.

Pero si se acepta la función anterior, por qué no tomar la siguiente, minimizar $\sum v_i \left(\frac{a_i}{v_i} - \frac{h}{v}\right)^2$, donde hemos invertido los papeles.

El coste medio, en votos, de cada escaño del partido i es $\frac{v_i}{a_i}$. El partido menos favorecido corresponde a $\max_i \left\{\frac{v_i}{a_i}\right\}$. Dicho máximo será siempre mayor o igual que $\frac{v}{h}$ (si el máximo fuese igual a $\frac{v}{h}$ tendríamos la proporcionalidad exacta). Por tanto es lógico plantear minimizar el máximo anterior, es decir: $\min_{\mathbf{a}} \max_i \left\{\frac{v_i}{a_i}\right\}$.

Podemos continuar realizando planteamientos lógicos de expresiones a maximizar o a minimizar, por ejemplo, otras serían: minimizar $\sum \left|\frac{v_i}{a_i} - \frac{v}{h}\right|$, maximizar $\min_i \left\{\frac{a_i}{v_i}\right\}$, etc. Pero al final se tendría que elegir uno de ellos, y la cuestión es ¿por qué una de estas funciones objetivo es mejor que las otras?

En principio todos los planteamientos anteriores son aceptables. Lo deseable sería que todos condujesen a la misma solución, porque no existe una justificación universal de uno sobre todos los demás. Sin embargo no es así. Los problemas de optimización planteados conducen a distintos métodos. Por ejemplo, la solución del primero es el método de los Restos Mayores, la del segundo el método de la Media Geométrica, el siguiente corresponde al método de St. Laguë, etc.

Por tanto mediante optimización se vuelve al mismo problema con el que nos hemos encontrado en más ocasiones anteriormente, el problema de la elección. ¿Qué función optimizar?, que equivale a ¿qué método elegir? No existe una justificación bien fundada que permita elegir uno de ellos y descartar los demás.

De hecho, es evidente que los repartos de cada método de divisores optimizan una función. El ejemplo de la Tabla 6 lo indica claramente: en este caso es necesario elegir 5 cantidades entre todos los cocientes $\frac{v_i}{k+.5}$, k entero no negativo, cuya suma es máxima (lo que equivale a elegir 5 cantidades entre todos los cocientes de la forma $\frac{k+.5}{v_i}$ cuya suma sea mínima).

Todas las técnicas descritas para encontrar métodos de aproximación de la proporcionalidad nos dejan en un **estado de ambiguedad**: no existe una razón para elegir un método antes que los demás.

Así pues, ¿por qué, en lugar de inventar métodos basados en ideas, no establecemos las propiedades que desearíamos que posean todos los métodos, imaginables, de asignación de escaños y después deducir las consecuencias de tales deseos? Ésto es una técnica antigua en matemáticas que se denomina la axiomática.

Por tanto vamos a establecer una lista de propiedades deseables para los métodos de asignación proporcional, [3].

7 Propiedades deseables

Citamos a continuación algunas de las propiedades más importantes que sería deseable que cumpliese un método de asignación proporcional.

1. Exactitud.

Es muy difícil que se presente un ejemplo real para el cual todas las cuotas sean números enteros, pero si se diera este caso es lógico que la única solución al problema de asignación fuese la exacta, es decir, la constituida por las cuotas. Por tanto una propiedad deseable para un método M de asignación proporcional se escribe: si $\mathbf{q}$ tiene todas sus componentes enteras, $\mathbf{q} = M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$.

2. Homogéneo.

La idea de proporcionalidad demanda la homogeneidad del método que se expresa de la siguiente forma:

$$\text{si } \mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h) \Rightarrow \mathbf{a} \in M(\lambda\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h), \forall\lambda > 0.$$

3. Monotonía con respecto a la cantidad de escaños.

Si aumenta el número h de escaños de la circunscripción ningún partido debe recibir menos escaños (para una distribución fija de votos). No obstante, podemos imaginar una situación en la que la asignación del último escaño presenta un triple empate entre los partidos A, B y C. Una de las soluciones sería asignarlo a A. Si existe un escaño más para asignar, $h+1$ en total, es posible que se vuelva a presentarse un triple empate en la asignación de los 2 últimos escaños. Una de las soluciones es ahora asignarlos a B y C, con lo cual el partido A recibe un escaño menos que en la solución citada cuando el tamaño era h, esta situación es inevitable, sin embargo para el reparto de los $h+1$ escaños hay 2 soluciones más y con cualquiera de ellas ninguno de los tres partidos pierde escaños al aumentar de h a $h+1$ el tamaño de la circunscripción. De ahí la siguiente definición de monotonía respecto a la cantidad de escaños:

si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$ entonces $\exists\ \mathbf{b} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h+1)$ tal que $a_i \leq b_i$, $i = 1, ..., n$.

4. Monotonía con respecto a los votos.

Si, al comparar los resultados de dos elecciones, ha aumentado el número de votos de un partido y ha disminuido el de los votos del otro no debe ocurrir que el primero disminuya en número de escaños a costa de que el segundo aumente en escaños, es decir,

si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$ y $\mathbf{a}' \in M(\mathbf{v}', \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$ con $v'_i > v_i$ y $v'_j < v_j$ implica que no ocurre $\{\ a'_i < a_i$ y $a'_j > a_j\ \}$.

5. Consistencia.

Las partes proporcionales de una asignación proporcional deben ser proporcionales. Por ejemplo, si un método M de asignación proporcional, en una elección en la que participan los partidos A, B, C, .. otorga a_1 escaños a A y a_2 a B, es lógico exigir que si sólo hubiesen participado estos dos partidos y el número de escaños a asignar hubiese sido $a_1 + a_2$ la asignación debería ser la misma. Además, los empates se deben reproducir. De manera general, si el conjunto de índices se separa en dos partes $S \cup T = \{1, 2, ...n\}$, y $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$, notamos por $\mathbf{a}^S$ la parte del vector $\mathbf{a}$ que corresponde a los índices de S, y similar para los de T; entonces se dice que el método M es consistente si

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{a}^S, \mathbf{a}^T\right) \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$$

implica

$$\mathbf{a}^S \in M\left(\mathbf{v}^S, \mathbf{mín}^S, \mathbf{máx}^S, \sum_S a_i\right)$$

y si además

$$\mathbf{b}^S \in M\left(\mathbf{v}^S, \mathbf{mín}^S, \mathbf{máx}^S, \sum_S a_i\right)$$

entonces

$$\left(\mathbf{b}^S, \mathbf{a}^T\right) \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h).$$

Los ejemplos mostrados en la primeras tablas reflejan que el método de los Restos Mayores no verifica las propiedades 3, 4 y 5.

6. Cuota.

Cuando un partido ha recibido un número de escaños igual al entero superior a su cuota (cuota superior), ya ha sido beneficiado en la asignación y, parece lógico que no deba recibir más. El razonamiento recíproco (con respecto a la cuota inferior) admite la misma justificación. Es decir puede parecer lógico exigir que ninguna diferencia absoluta entre escaños y cuota sea superior a la unidad.

Se dice que un método M satisface la cuota si toda asignación difiere en menos de un escaño de su cuota, es decir, si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$, entonces $|q_i - a_i| < 1$, $i = 1, ..., n$.

Teorema de imposibilidad, [5]. *No es posible definir un método de asignación que sea homogéneo, monótono con respecto a los votos y verifique la cuota.*

Por tanto hay que prescindir de alguna de las propiedades anteriores, ya que todo método incumple alguna de ellas.

Aparentemente la pretensión de que un método verifique la cuota surge de manera muy intuitiva. Si embargo verificar la cuota supone exigir mucho a los grandes partidos y muy poco a los pequeños. A un partido pequeño le exige que la diferencia entre su cuota exacta de escaños y la asignación que obtiene sea menor que 1. A un partido grande le exige la misma diferencia. De tal forma que si, en un reparto, a un partido cuya cuota es 0.5 escaños se le asigna 1 escaño, recibe el doble, y se verifica la cuota, pero otro partido al que correspondan 10.5 no puede recibir el doble, esto es 22 escaños, ni siquiera 12, para verificar la cuota. Por tanto, las limitaciones que marca la cuota no corresponden a una idea de proporcionalidad.

7. Continuo.

Si un vector $\mathbf{a}$ es solución de una sucesión de problemas que converge a un problema, todos con el mismo h, entonces $\mathbf{a}$ debe ser una solución del problema límite, es decir,

si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}^m, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$ y $\mathbf{v}^m \to \mathbf{v}$ entonces $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$.

Teorema, [5]. *Un método es exacto, monótono con respecto a los votos, consistente, homogéneo y continuo si y solo si es un método de divisores.*

El resultado anterior constituye la razón más poderosa para considerar que los métodos de divisores son los únicos candidatos razonables en la elección de métodos de asignación proporcional.

Los métodos de divisores verifican todas las propiedades anteriores excepto la cuota. De ellos, el de d'Hondt es el único que verifica la cuota inferior y el de los Pequeños Divisores es el único que verifica la cuota superior.

No todos tienen las mismas posibilidades de violar la cuota y, además, otras propiedades pueden ser interesantes. Por ejemplo, podríamos tratar de suavizar la propiedad 6 con la siguiente

8. Cerca de la cuota.

Se dice que M está cerca de la cuota si para todo par de índices $i \neq j$ se tiene

$$\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$$

implica que no ocurre

$$\{|a_i - r_i| > |a_i + 1 - r_i| \text{ y } |a_j - r_j| > |a_j - 1 - r_j|\},$$

es decir, que sería imposible transferir un escaño de un partido j a un partido i de manera que ambos estén más próximos a sus respectivas cuotas.

Esta propiedad admite que un partido pueda violar la cuota superior, pero no puede ser a costa de partidos cuyo resto es superior a 0.5 y, análogamente, se admite que algún partido pueda recibir menos de su cuota inferior pero no podrá ser a causa de que partidos con resto menor que 0.5 hayan sido beneficiados con respecto a su cuota.

Teorema. *El único método consistente que está cerca de la cuota es el de St. Laguë.*

9. Sesgo.

La idea de sesgo concierne con la tendencia sistemática de fovorecer a unos partidos a costa de otros: grandes partidos frente a pequeños partidos o viceversa. Por supuesto, cada reparto aislado favorece necesariamente a unos partidos y penaliza a otros: el concepto de sesgo se refiere al comportamiento de un método para un gran número de problemas. Método insesgado (o sin sesgo) significa que la media de las cuotas de cada partido es igual a la media de los escaños que recibe con dicho método. Pero, ¿qué significa "gran número de problemas"? ¿De dónde proceden y cómo están distribuidos?

Se puede reclamar que el método de los Restos Mayores es insesgado: es razonable argumentar que los restos de las cuotas están uniformemente distribuidos y son independientes de las partes enteras de las cuotas. De ésto se sigue inmediatamente que el método de los Restos Mayores es insesgado.

Por otra parte es obvio que algunos métodos de divisores favorecen a los grandes partidos (por ejemplo, d'Hondt) mientras que evidentemente otros favorecen a los pequeños partidos (por ejemplo los pequeños divisores); basta examinar un pequeño número de problemas para que esta afirmación se ponga de manifiesto. Sin embargo, no es fácil precisar estas ideas porque muchos modelos resultan intratables matemáticamente. A continuación vamos a describir dos aproximaciones.

Una primera aproximación está motivada por el hecho de que un método de divisor está completamente determinado por sus soluciones para todos los problemas con sólo 2 partidos. Supongamos que el conjunto de todos los posibles problemas entre dos partidos $((v_1, v_2), h)$, donde $v_1 + v_2 = h$ están uniformemente distribuidos. Geométricamente, el conjunto de todos los posibles problemas pueden representarse en puntos sobre una recta y todas las posibles soluciones (a_1, a_2) están sobre la misma recta. Un método de divisores es insesgado si para cada solución $(a_1, a_2) > 0$ la media de los votos (v_1, v_2) para los cuales el método admite la solución (a_1, a_2) es igual a (a_1, a_2).

Es fácil ver que el método es insesgado si y solo si (a_1, a_2) es el punto medio de los votos que dan esta solución y por tanto el método de St.Laguë es insesgado.

La idea puede generalizarse. Sea $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ una asignación, $\sum_i a_i = h$ y consideremos el conjunto de todos los problemas $(\mathbf{v}, h)$ para los cuales el método basado en los divisores d da la solución $\mathbf{a}$ con divisor $x > 0$:

$$\mathbf{R}_x(\mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{v} > 0 : d(a_i - 1) \leq \frac{v_i}{x} \leq d(a_i), \quad i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Supongamos que los vectores de votos $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_x(\mathbf{a})$ están uniformemente distribuidos. Por tanto no se se hace una hipótesis acerca de la distribución global de los votos, en su lugar se ha supuesto que los votos, localmente, están uniformemente distribuidos. Un método de divisores es **insesgado** si para cada $\mathbf{a} > 0$ y para cada divisor $x > 0$ la media de los votos $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_x(\mathbf{a})$ es igual a $\mathbf{a}$. $\mathbf{R}_x(\mathbf{a})$ es un n-prisma rectangular cuyos 2^n vértices tienen como coordenada i-ésima o $d(a_i - 1)$ o $d(a_i)$. El método basado en los divisores d admite como solución $\mathbf{a}$ para cualquier vector de votos que esté en n-prisma, y por supuesto $\mathbf{a}$ está en el n-prisma. El modelo asume que cada punto del n-prisma tiene la misma probabilidad.

Teorema. *El único método de divisor insesgado con respecto a repartos es el de St. Laguë.*

Teorema. Para los métodos de la familia paramétrica $d(s) = s + \mu$ se tiene:

i) Si $\mu = 0.5$ el método es insesgado.

ii) Si $\mu > 0.5$ el método es sesgado en favor de los partidos más votados, tanto más cuanto mayor es μ.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 3-34

iii) Si $\mu < 0.5$ el método es sesgado en favor de los partidos pequeños, tanto más cuanto menor es μ.

Para los restantes métodos de Huntington se tiene:

iv) Los métodos de la Media Armónica y de la Media Geométrica son sesgados en favor de los pequeños partidos.

Estas conclusiones teóricas han sido confirmadas substancialmente al analizar datos históricos.

8 El Sistema Electoral Español para la Cámara de Diputados

8.1 Breve descripción

La Constitución de 1978 establece las siguientes limitaciones al sistema electoral: 1) La Cámara de Diputados se compone de un mínimo de 300 y un máximo de 400 diputados. 2) La circunscripción electoral es la provincia. Las poblaciones de Ceuta y Melilla estarán representadas cada una de ellas por un diputado. La ley debe determinar el número de diputados de cada provincia asignado una representación mínima inicial a cada circunscripción y distribuyendo los demás en proporción a la población. 3) La asignación de los escaños en cada provincia atenderá a criterios de representación proporcional.

Posteriormente la Ley Electoral de 1985 fijó el número de Diputados en 350, el mínimo inicial en 2 escaños a cada provincia (independiente de su censo), el método de los Restos Mayores para distribuir los restantes 248 escaños entre las provincias y el método d'Hondt para asignar los escaños de cada provincia a los partidos. Además la barrera para participar en la asignación de escaños a los partidos es el 3%.

Por tanto, como ocurre en la mayoría de las democracias basadas en la representación proporcional, la elección de los miembros de la Cámara de Diputados conlleva en España la resolución de dos problemas de asignación. Uno sobre la asignación de los escaños de la Cámara a las circunscripciones; el otro la asignación de los escaños de cada circunscripción a los partidos que concurren a la misma. Es lógico establecer dos métodos diferentes para su resolución, pues, aunque desde un punto de vista matemático ambos problemas son el mismo, las restricciones de uno y otro pueden ser diametralmente opuestas. Así, cualquier circunscripción debe recibir al menos un escaño (por pequeña que sea), pero lógicamente no puede hacerse lo mismo con los partidos que concurren en cada circunscripción, sino que a veces se pone una barrera mínima que deben superar para participar en la asignación (superar el 3% de los votos válidos, en nuestro caso). Por otra parte, nada justifica dar mayor voz a los ciudadanos por pertenecer a una circunscripción u otra (salvo por la exigencia de un mínimo), sin embargo con los partidos se acepta, en algunas democracias, beneficiar a los más votados para dar mayor estabilidad al parlamento y a los propios partidos; por ello se puede justificar el uso de un método insesgado para la asignación a las provincias y un método que sea sesgado en favor de los grandes partidos para la asignación de los escaños de cada provincia a los partidos.

El procedimiento de asegurar un mínimo inicial a las provincias ha provocado una sobrerrepresentación de las provincias más pequeñas. Así, Madrid con más de 5 millones de habitantes recibe 34 escaños mientras Soria con menos de 100000 y otras provincias con unos 150000 habitantes reciben 3 escaños. En el Apéndice vemos este efecto y otros los resultados con otros métodos. El uso del método de los Restos Mayores para asignar parte de los escaños a las provincias hace que se presente la paradoja de Alabama en muchas ocasiones cuando efectuamos los repartos para todos los tamaños de Cámara comprendidos entre 300 y 400.

La mayoría de las circunscripciones son pequeñas (más de 30 de ellas no superan los 5 escaños) y en estos casos sólo 2 partidos suelen tener opción a escaño. De hecho, al combinar la fórmula d'Hondt con circunscripciones pequeñas el resultado es bastante similar al que se obtiene con un sistema mayoritario. Por tanto, en cada una de estas provincias los votos que no corresponden a uno de los dos partidos más votados no contribuyen a la obtención de escaño alguno. En tal sentido, en España se ha creado la cultura del "voto útil" induciendo a los electores a votar a los partidos grandes si desean que su voto sea útil, ¿por qué?. Evidentemente, no es correcto llamar votos "no útiles" a los que no dan lugar a representación, sin embargo los partidos grandes han tenido interés en usar este nombre y ello debe darles ventajas.

El efecto acumulado, de los votos que no consiguen escaños, sobre la tercera fuerza, si corresponden siempre al mismo partido, es una desproporción en la representación con respecto a los dos primeros (la tercera fuerza pierde la mitad de los escaños en favor de éstos, ver Tabla 8), y un agravio con respecto a aquellos otros partidos con similar número de votos pero concentrados en pocas provincias.

8.2 Los efectos del sistema electoral

Por tanto, de forma resumida, para el sistema electoral español a la Cámara de Diputados, podemos decir que origina una baja proporcionalidad entre votos y escaños totales recibidos por los diferentes partidos. Así, por ejemplo, el coste medio de un diputado de IU ha sido, en 1996, superior a 125000 votos mientras que el coste medio de un diputado del PP ha sido inferior a 62000 votos y el de CC de unos 54000 votos. ¿Es lógico que existan estas diferencias?

El coste medio de un escaño difiere de unas provincias a otras hasta en 4 veces.

En todas las elecciones existen muchos votos de los que se les ha llamado en España "no útiles" (cerca de 3 millones en una ocasión, y entre 2 y 2.5 millones en muchas otras).

Las listas de los partidos son cerradas y bloqueadas.

En 7 convocatorias de elecciones generales, entre 1977 y 1996, se han producido sólo 2 mayorías absolutas (1982 y 1986). Además sólo en los períodos 1982-1986 y 1989-1993 puede decirse que no haya existido un adelanto importante de las elecciones.

Las coaliciones son cada vez más imprescindibles y además el partido ganador se ve casi seguro obligado a pactar con partidos nacionalistas.

En términos de proporcionalidad todos los partidos de ámbito autonómico reciben un número de escaños muy similar a su cuota, los dos más votados de ámbito nacional reciben más de su cuota, el tercer partido de ámbito nacional recibe aproximadamente la mitad de los escaños que corresponden a su cuota y los restantes partidos de ámbito nacional tienden a desaparecer (incluso, a la larga, puede ocurrir lo mismo con el 3º). En tal sentido, la Tabla 8 es muy ilustrativa.

Los agravios que produce el sistema electoral español entre partidos nacionalistas y partidos de ámbito nacional con similar número de votos han favorecido la consolidación y un ligero crecimiento en el Parlamento de los primeros frente al debilitamiento y la desaparición de parte de los segundos (todos excepto PP, PSOE e IU), ésto no ha servido, sin embargo, para conseguir una mayor gobernabilidad, sino más bien al contrario, pues desde 1982 a 1996 las posibilidades de formar un gobierno estable sin necesidad de pactar han sido cada vez menores, ya que ha decrecido el número total de escaños del partido vencedor: 202 diputados en 1982, 184 en 1986, 175 en 1989, 159 en 1993 y 156 en 1996.

Tabla 8

Cuotas y asignaciones para la 3^a y 4^a fuerzas de ámbito nacional en todas las elecciones generales a la Cámara de Diputados

Elección	1977	1979	1982	1986	1989	1993	1996
3^{er} partido	PCE	PCE	UCD	CDS	IU	IU	IU
Cuota del 3^{er}part.	37	40	26	35	34	36	38
Escaños del 3^{er} part.	20	23	12	19	17	18	21
4^opartido	AP	AP	PCE	IU	CDS	CDS	UC
Cuota del 4^o part.	33	22	15	17	29	7	1
Escaños del 4^o part.	16	9	4	7	14	0	0

8.3 ¿Reforma del sistema electoral?

El comportamiento del sistema electoral es motivo de crítica para unos y de elogios para otros. Los críticos presentan alternativas, muchas veces completamente insensatas puesto que magnifican un solo aspecto del sistema electoral y ofrecen un cambio radical que corrige ese aspecto pero no analizan cómo se modifican los restantes. En cualquier caso las tendencias de quienes proponen reformalo, en su mayoría, suelen orientarse hacia un aumento de la proporcionalidad, aunque también hay quienes "piensan" que un sistema mayoritario facilitaría la gobernabilidad.

Contrariamente a lo que se suele decir, la principal causa de la baja proporcionalidad del sistema electoral no es el uso del método d'Hondt sino la existencia de muchas circunscripciones pequeñas. Por tanto una reforma que aspire a conseguir una proporcionalidad mucho mayor o bien una reforma en la que la desproporción, entre los votos y escaños de los partidos, no sea exclusivamente a costa de ciertos partidos de ámbito nacional requiere modificar la Constitución, ya que actualmente fija como circunscripción a la provincia. Algunas alternativas en esa dirección, incluyendo la adaptación del sistema electoral alemán, serán publicadas próximamente, [12]. El cambio al sistema mayoritario también supone reformar la Constitución.

8.4 *¿Reforma del sistema electoral sin modificar la Constitución?*

Dentro del marco constitucional pueden llevarse a cabo sólo "ligeras" modificaciones en la Ley Electoral con objeto de cambiar algún aspecto del sistema electoral actual. Por ejemplo, vamos a desarrollar una alternativa que aumente la proporción entre votos y escaños de los partidos y la proporción entre censo de las provincias y escaños de las mismas.

En tal sentido se puede aumentar el tamaño de la Cámara al máximo permitido (400 diputados), disminuir la asignación inicial a sólo un escaño por provincia (los demás se asignarían con St. Laguë) y cambiar el método d'Hondt por otro más imparcial. Pero, ¿por cuál? El problema de la elección del método de asignación se volvería a presentar. Lógicamente debe seguir siendo un método basado en divisores, y tal vez es deseable que favorezca a los partidos más grandes, aunque en menor medida que d'Hondt; pero ¿qué divisores? Con objeto de simplificar, se puede pensar en un método de la familia paramétrica $d(s) = s + \mu$, $0.5 \leq \mu \leq 1$, ¿qué valor de μ?

Para tener un fundamento cara a dar una respuesta a la elección de μ vamos a hacer algunas observaciones sobre resultados de elecciones generales en España y, en base a ellos, definir una nueva propiedad.

8.5 Repartos entre tres partidos beneficiando a los más votados

En circunscripciones de tamaño pequeño e intermedio, como son la mayoría de las de España, el número de partidos que consigue al menos un escaño no suele pasar de tres. La Tabla 9 refleja, para varios procesos electorales, que todos los escaños en 2 circunscripciones los gana un solo partido (en Ceuta y Melilla, lógicamente); la siguiente columna muestra que todos los escaños se le asignan a sólo dos partidos en más de la mitad de las circunscripciones, etc.

Tabla 9

Número de partidos que obtuvieron escaños en las distintas provincias con d' Hondt en las elecciones de 1986 a 1996

nº de partidos que obtuvieron escaños	1	2	3	4	5
nº de provincias en las que ocurrió en 1996	2	29	17	1	3
nº de provincias en las que ocurrió en 1993	2	33	12	3	2
nº de provincias en las que ocurrió en 1989	2	30	8	8	4
nº de provincias en las que ocurrió en 1986	2	26	16	6	2

Sólo en 4 circunscripciones consiguieron escaños más de tres partidos en 1996.
Sólo en 5 circunscripciones consiguieron escaños más de tres partidos en 1993.
Sólo en 12 circunscripciones consiguieron escaños más de tres partidos en 1989.
Sólo en 8 circunscripciones consiguieron escaños más de tres partidos en 1986.

Por tanto en la mayor parte de las circunscripciones el número de partidos que consiguen escaños no pasa de tres. En las últimas elecciones, las circunscripciones en las que más de tres partidos consiguieron escaños fueron sólo Barcelona, Guipúzcoa, Vizcaya y Valencia. Teniendo en cuenta estas observaciones, deseamos definir una nueva propiedad que garantice a los grandes partidos ventajas respecto a los más pequeños en el siguiente sentido:

La propiedad p(3)

Supongamos que sólo tres partidos obtienen escaños en una circunscripción y que las cuotas respectivas q_1, q_2, y q_3, las descomponemos de la forma siguiente:

$$q_1 = e_1 + f_1,\ q_2 = e_2 + f_2,\ q_3 = e_3 + f_3$$

donde e_i es la parte entera de la cuota q_i y f_i es el resto. Además, sin pérdida de generalidad, suponemos las cuotas ordenadas de mayor a menor, $q_1 \geq q_2 \geq q_3$. Para que un método de reparto no prime el resto del tercer partido sobre los otros dos ni el resto del segundo partido sobre el correspondiente al primero, la asignación $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ debe verificar la siguiente propiedad:

i) Si $f_1 \geq f_2$, y $a_2 > q_2$ entonces $a_1 > q_1$

ii) Si $f_1 \geq f_3$, y $a_3 > q_3$ entonces $a_1 > q_1$

iii) Si $f_2 \geq f_3$, y $a_3 > q_3$ entonces $a_2 > q_2$

es decir, pensando en el fortalecimiento de los grandes partidos, es lógico que,

"un resto más pequeño de un partido menos votado no pueda ser redondeado por exceso sin que lo sea todo resto más grande correspondiente a cualquier partido más votado".

Diremos que un método de asignación de escaños tiene la propiedad p(3) si para todo problema de asignación de escaños, en el que a lo sumo tres partidos consigan representación, al menos una de las soluciones verifica la propiedad p(3).

El métodos de los Restos Mayores y el d' Hondt, a pesar de tener propiedades muy diferentes y conducir con frecuencia a repartos distintos, verifican la propiedad anterior incluso cuando el número de partidos es diferente de tres. Sin embargo, el método de St. Laguë, a pesar de conducir con mucha frecuencia al mismo reparto que el método de los Restos Mayores, no verifica la propiedad p(3) cuando el número de partidos es mayor que 2; basta para ello observar los datos correspondientes a la circunscripción de Cantabria de 1996,

Tabla 10

Resultados y asignaciones para la votación de Cantabria en las generales de 1996.

Partido	Votos	Cuota	St. Laguë	d'Hondt
PP	174 867	2.60	2	3
PSOE	122 464	1.82	2	2
IU	39 399	0.58	1	0
Totales	336 710	5	5	5

Para IU $f_3 = 0.58$ y St. Laguë le ha asignado 1 escaño, sin embargo al PP que tiene $f_1 = 0.60$ le asigna sólo 2 escaños, es decir menos de su cuota.

En Barcelona se daría una situación similar (sólo que con partidos distintos).

En el caso de España, otro factor contra el uso de St. Laguë para la asignación de escaños a los partidos es que puede asignar escaño a un partido con cuota baja, por ejemplo menor que 0.5. Un ejemplo lo constituyen los datos de Burgos de las últimas elecciones, donde las cuotas de PSOE, PP, e IU fueron $\mathbf{q} = (2.28, 1.26, 0.46)$ con lo que la asignación de St.Laguë es $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$; repartos como éste distan mucho de la tradición española de primar bastante a los grandes partidos.

La propiedad p(n)

Se puede definir una propiedad que generalice a la propiedad p(3) de la siguiente forma (suponemos de nuevo las cuotas ordenadas de mayor a menor $q_1 \geq q_2 \geq ... \geq q_n$):

Sean $i, j \in \{1, ..., n\}$, con $i < j$, si $f_i \geq f_j$ y $a_j > q_j$ entonces $a_i > q_i$

cuyo significado es el mismo que con p(3) sólo que ahora el número de partidos es arbitrario. Es decir, el significado es el siguiente: si la asignación de un partido es, al menos, el redondeo de su cuota por exceso, todo partido que tenga más votos que él y resto igual o mayor también debe recibir, al menos, el redondeo de su cuota por exceso.

El único inconveniente de la generalización es que si admitimos que n puede tomar cualquier valor por grande que sea la única fórmula, de la familia paramétrica, que verifica la propiedad p(n) es d'Hondt. No obstante es evidente que n no puede ser mayor que el tamaño de la circunscripción y que dicho tamaño no puede ser mayor que el de la Cámara de Diputados.

8.6 El Método $\frac{2}{3}$

Las observaciones hechas en la tabla 9 muestran que en la práctica en España el número de partidos que consiguen escaño en una provincia es muy bajo, casi siempre menor o igual a 3. Por ello, nos centramos de nuevo en la elección de una fórmula que no castigue tanto al tercer partido y que verifique p(3).

A medida que disminuye el valor de μ desde 1 hasta 0.5, se perjudica menos al tercer partido, pero deseamos que se verifiquen i), ii) y iii). En este sentido, entendemos como valor óptimo de μ es el mínimo valor de μ que verifica p(3).

La solución a este problema de optimización es $\mu = \frac{2}{3}$, [10]. Por ello en adelante al método electoral basado en los divisores $d(s) = s + \frac{2}{3}$ lo denominamos **método** $\frac{2}{3}$. Esta va a ser la elección que completa nuestra alternativa en el marco de la Constitución

Teorema, [12] *Si* $q_3 > \frac{2}{3}$ *entonces con el método* $\frac{2}{3}$ *se tiene* $a_3 \geq 1$.

Es decir, el tercer partido obtiene un escaño, al menos, en el momento en que su cuota supere el valor $\frac{2}{3}$. No significa que sea necesario que la cuota sobrepase el valor $\frac{2}{3}$, sino que, en caso de sobrepasarla, el tercer partido consigue escaño con toda seguridad. Sin embargo con cuota inferior a 2/3 puede conseguir escaño el tercer partido, como ocurriría en la provincia de Badajoz en las elecciones de 1996, ver Tabla 11.

Tabla 11

Resultados y asignaciones para Badajoz en 1996.

Partido	Votos	Cuota	Método $\frac{2}{3}$	d'Hondt
PSOE	207 262	2.99	3	3
PP	166 550	2.40	2	3
IU	42 299	0.61	1	0
Totales	416 111	6	6	6

Otro ejemplo se daría en Gerona donde las cuotas para CiU, PSOE, PP, IU y ERC, en las elecciones de 1996, han sido $\mathbf{q} = (2.10, 1.84, 0.61, 0.28, 0.17)$ y la asignación d'Hondt $\mathbf{a} = (3, 2, 0, 0, 0)$, mientras que la asignación con el método 2/3 sería $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 0, 0)$.

Como consecuencia de esta última propiedad mostramos a continuación, en la Tabla 12, el porcentaje de votos que aseguraría al tercer partido ganar al menos un escaño en circunscripciones de diferentes tamaños. Al mismo tiempo mostramos el porcentaje de votos que asegura escaño al tercer partido con la fórmula d'Hondt.

siempre menor o igual a 3. Por ello, nos centramos de nuevo en la elección de una fórmula que no castigue tanto al tercer partido y que verifique p(3).

A medida que disminuye el valor de μ desde 1 hasta 0.5, se perjudica menos al tercer partido, pero deseamos que se verifiquen i), ii) y iii). En este sentido, entendemos como valor óptimo de μ es el mínimo valor de μ que verifica p(3).

La solución a este problema de optimización es $\mu = \frac{2}{3}$, [10]. Por ello en adelante al método electoral basado en los divisores $d(s) = s + \frac{2}{3}$ lo denominamos **método** $\frac{2}{3}$. Esta va a ser la elección que completa nuestra alternativa en el marco de la Constitución

Teorema, [12] *Si* $q_3 > \frac{2}{3}$ *entonces con el método* $\frac{2}{3}$ *se tiene* $a_3 \geq 1$.

Es decir, el tercer partido obtiene un escaño, al menos, en el momento en que su cuota supere el valor $\frac{2}{3}$. No significa que sea necesario que la cuota sobrepase el valor $\frac{2}{3}$, sino que, en caso de sobrepasarla, el tercer partido consigue escaño con toda seguridad. Sin embargo con cuota inferior a 2/3 puede conseguir escaño el tercer partido, como ocurriría en la provincia de Badajoz en las elecciones de 1996, ver Tabla 11.

Tabla 11

Resultados y asignaciones para Badajoz en 1996.

Partido	Votos	Cuota	Método $\frac{2}{3}$	d'Hondt
PSOE	207 262	2.99	3	3
PP	166 550	2.40	2	3
IU	42 299	0.61	1	0
Totales	416 111	6	6	6

Otro ejemplo se daría en Gerona donde las cuotas para CiU, PSOE, PP, IU y ERC, en las elecciones de 1996, han sido $\mathbf{q} = (2.10, 1.84, 0.61, 0.28, 0.17)$ y la asignación d'Hondt $\mathbf{a} = (3, 2, 0, 0, 0)$, mientras que la asignación con el método 2/3 sería $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 0, 0)$.

Como consecuencia de esta última propiedad mostramos a continuación, en la Tabla 12, el porcentaje de votos que aseguraría al tercer partido ganar al menos un escaño en circunscripciones de diferentes tamaños. Al mismo tiempo mostramos el porcentaje de votos que asegura escaño al tercer partido con la fórmula d'Hondt.

Tabla 12

Escaños de la prov.	3	4	5	6	7	8	9	10
% votos para $\frac{2}{3}$	22.3	16.7	13.4	11.2	9.53	8.34	7.41	6.67
% votos para d'Hont	25	20	16.7	14.3	12.5	11.2	10	9.10

Es decir, aproximadamente en la mayoría de las provincias, con la fórmula $\frac{2}{3}$ el tercer partido necesita un 2.5% menos que con la fórmula d'Hondt para asegurar un escaño. Esta diferencia porcentual aunque no sea muy elevada puede tener una importancia grande, pues obsérvese que si el tercer partido consigue el 9.5% de los votos la fórmula $\frac{2}{3}$ garantiza escaño en circunscripciones de 7 escaños, o más, mientras que con d'Hondt es necesario que tenga al menos 10 escaños la circunscripción (de las que hay muy pocas en el caso de España). Por otra parte si el tercer partido supera el 13.4% de los votos la fórmula $\frac{2}{3}$ le asegura escaño en las circunscripciones con más de cuatro escaños mientras que d'Hondt sólo se lo garantiza si tiene 7 escaños o más (en España hay muchas circunscripciones con 5 o con 6 escaños).

8.7 Simulaciones usando los datos de las elecciones de 1996

Para finalizar mostramos los resultados de las elecciones de 1996 con el método actual, con dos métodos más (St.Laguë y $\frac{2}{3}$) sin variar el tamaño de la Cámara ni la asignación de los escaños a las provincias, y también los resultados para la alternativa dada (Cámara de 400 diputados, asignación inicial de un escaño por provincia y los restantes por St. Laguë y uso del método $\frac{2}{3}$ para la asignación a los partidos).

Los tres primeros partidos son de ámbito nacional y los restantes son de ámbito autonómico. La columna "Votos" refleja la totalidad de los votos de cada partido en las circunscripciones que ha sobrepasado el 3% de los votos. La columna "Cuota 350" contiene la cuota global de cada partido con respecto al tamaño actual de la Cámara que es 350. Los tres columnas siguientes contienen los resultados de aplicar cada uno de los métodos St Laguë, 2/3 y d'Hondt en las 52 circunscripciones y sumar (se resalta en negrita la columna del método d'Hondt que corresponde a los resultados actuales). Después se da la cuota que correspondería a cada partido si la Cámara fuera de 400 diputados y por último se presentan los resultados que se habrían obtenido con la alternativa que hemos descrito.

Tabla 13

Resultados globales de la elecciones generales de 1996. Votos, cuotas y asignaciones con distintos métodos con el sistema actual y con la alternativa propuesta.

Partido	Votos	Cuota 350	St. L.	$\frac{2}{3}$	d'Hont (actual)	Cuota 400	Alt.
PP	9 658 519	140.09	149	153	**156**	160.10	169
PSOE	9 318 510	135.16	136	139	**141**	154.46	160
IU	2 629 846	38.14	32	28	**21**	43.59	33
CiU	1 144 884	16.61	15	14	**16**	18.98	19
PNV	317 373	4.60	5	5	**5**	5.26	7
CC	220 069	3.19	4	4	**4**	3.65	4
BNG	219 043	3.18	3	2	**2**	3.63	2
HB	180 979	2.62	2	2	**2**	3.00	2
ERC	161 831	2.35	1	1	**1**	2.68	1
EA	115 512	1.67	1	1	**1**	1.91	1
UV	91 350	1.32	1	1	**1**	1.51	1
PA	74 059	1.07	1	0	**0**	1.23	1
Totales	24 131 975	350	350	350	350	400	400

Para el PA se han contabilizado sólo los votos de Cádiz y Sevilla puesto que en las restantes provincias no superó la barrera del 3% (en total, PA obtuvo 134000 votos).

El comportamiento del sistema electoral en 1996 es una muestra del que repetidamente ha tenido desde 1977. Por otra parte, la simulación con la alternativa elaborada, para las demás elecciones generales daría una respuesta similar, [11]. Por ejemplo, los partidos tercero y cuarto de ámbito nacional habrían estado menos perjudicados, los partidos nacionalistas seguirían recibiendo un número de escaños similar a su cuota y el partido ganador habría estado menos sobrerrepresentado. ¿Debe hacerse una reforma de este tipo? ¿Debe hacerse una reforma más profunda? ¿En qué sentido?

Si se desea hacer un cambio de sistema electoral, lo importante es que la clase política defina los efectos que desearía producir con el nuevo sistema electoral y los especialistas en sistemas electorales tendrían que analizar las posibilidades de definir un sistema electoral que produzca dichos efectos.

Todo sistema electoral requiere la transformación de unos números (votos/poblaciones) en otros números (escaños), y ello requiere definir correctamente una función matemática que haga esa transformación. Intentar definir un sistema electoral sin contar con un asesoramiento especializado, puede llevar a los políticos a escribir leyes contradictorias e incompletas. La Constitución y la Ley Electoral de 1989 de México es un ejemplo (entre sus muchos defectos estaba el conceder, en situaciones concretas, ¡mayoría absoluta a dos partidos!), [2].

NOTA: Los datos de las elecciones de 1996 han sido tomados del periódico El País (5-2-96) y los restantes del Ministerio del Interior. El recuento final de los votos de 1996, realizado por la Junta Electoral Central no ha modificado la asignación d'Hondt, aunque la diferencia de votos entre el PP y el PSOE ha disminuido a menos de 300000.

Agradecimientos. Los autores desean agradecer a la CNRS de Francia y a la DGICYT de España las ayudas concedidas para la investigación en el problema de representación proporcional. También agradecen al Presidente de SEMA y al Departamento de de Matemática Aplicada de Zaragoza por la invitación a publicar este trabajo y por las sugerencias en la elaboración del mismo.

9 Apéndice

Las columnas de las Tablas siguientes recogen la población de las 50 provincias correspondiente al censo de 1993, la cuota que corresponde a cada una para $h = 348$ (los 2 escaños restantes hasta 350 corresponden a Ceuta y Melilla), la asignación actual, la asignación que se obtiene con los métodos de los Pequeños Divisores, Media Armónica, Media Geométrica, St. Laguë y d'Hondt. Para estos 5 métodos se ha considerado una asignación inicial de 1 escaño a cada provincia (para respetar la Constitución) y se han distribuido los 298 restantes con el método correspondiente.

La penúltima columna corresponde a la alternativa que hemos planteado dentro del marco constitucional, que contempla una Cámara con 400 diputados, de los que se asignan inicialmente 1 a cada provincia y los 348 restantes con St. Laguë y la última columna da la cuota que coresponde a cada provincia en el supuesto de que la Cámara tuviese 400 diputados.

Provincia	Población	q_i 348	Act.	PD	MA	MG	SL	d'H	Al.	q_i 398
Madrid	5 084 966	44.6	34	36	38	39	39	42	46	51.0
Barcelona	4 712 850	41.4	32	34	36	36	36	39	42	47.3
Valencia	2 165 455	19.0	16	16	17	17	17	18	20	21.7
Sevilla	1 678 168	14.7	13	13	13	13	13	14	16	16.8
Alicante	1 327 592	11.6	10	11	11	11	11	11	13	13.3
Málaga	1 191 995	10.5	10	10	10	10	10	10	11	12.0
Vizcaya	1 163 671	10.2	9	10	10	10	10	10	11	11.7
Coruña	1 119 295	9.8	9	9	9	9	9	10	11	11.2
Asturias	1 112 415	9.8	9	9	9	9	9	10	11	11.2

Provincia	Población	q_i 348	Act.	PD	MA	MG	SL	d'H	Al.	q_i 398
Cádiz	1 104 248	9.7	9	9	9	9	9	10	11	11.1
Murcia	1 080 986	9.5	9	9	9	9	9	9	10	10.8
Pontevedra	920 517	8.1	8	8	8	8	8	8	9	9.2
Zaragoza	845 571	7.4	7	7	7	7	7	7	8	8.5
Granada	817 005	7.2	7	7	7	7	7	7	8	8.2
Las Palmas	809 981	7.1	7	7	7	7	7	7	8	8.1
Córdoba	772 018	6.8	7	7	7	7	7	7	8	7.7
Baleares	765 126	6.7	7	7	7	7	7	7	8	7.7
Tenerife	751 422	6.6	7	7	7	7	7	7	8	7.5
Guipúzcoa	684 599	6.0	6	6	6	6	6	6	7	6.9
Badajoz	665 406	5.8	6	6	6	6	6	6	7	6.7
Jaén	656 093	5.8	6	6	6	6	6	6	7	6.6
Tarragona	560 022	4.9	6	5	5	5	5	5	6	5.6
Cantabria	534 730	4.7	5	5	5	5	5	5	6	5.4
León	530 773	4.7	5	5	5	5	5	5	6	5.3
Navarra	528 837	4.6	5	5	5	5	5	5	6	5.3
Gerona	528 148	4.6	5	5	5	5	5	5	6	5.3
Toledo	503 913	4.4	5	5	5	5	5	5	5	5.1
Valladolid	501 515	4.4	5	5	5	5	5	5	5	5.0
C.Real	484 917	4.3	5	5	5	5	5	4	5	4.9
Almería	475 062	4.2	5	5	5	5	5	4	5	4.8
Castellón	457 246	4.0	5	5	4	4	4	4	5	4.6
Huelva	450 758	4.0	5	5	4	4	4	4	5	4.5
Cáceres	418 693	3.7	5	4	4	4	4	4	5	4.2
Lugo	386 240	3.4	4	4	4	4	4	4	4	3.9
Salamanca	363 072	3.2	4	4	4	4	4	3	4	3.6
Orense	359 867	3.2	4	4	4	4	4	3	4	3.6
Burgos	358 038	3.1	4	4	4	4	4	3	4	3.6
Lleida	357 655	3.1	4	4	4	4	4	3	4	3.6
Albacete	353 517	3.1	4	4	4	4	4	3	4	3.5
Álava	279 702	2.5	4	3	3	3	3	3	3	2.8
Rioja	266 101	2.3	4	3	3	3	3	3	3	2.7
Zamora	214 705	1.9	3	3	3	3	3	2	3	2.2
Huesca	209 565	1.8	3	3	3	3	3	2	3	2.1
Cuenca	206 708	1.8	3	3	3	3	3	2	3	2.1
Palencia	186 049	1.6	3	3	3	2	2	2	3	1.9
Ávila	176 358	1.5	3	3	2	2	2	2	3	1.8
Guadalajara	150 660	1.3	3	3	2	2	2	2	2	1.5
Segovia	148 076	1.3	3	3	2	2	2	2	2	1.5
Teruel	143 607	1.3	3	2	2	2	2	2	2	1.4
Soria	94 731	0.8	3	2	2	2	2	1	2	1.0
Totales	39 658 644	348	348	348	348	348	348	348	398	398

Bibliografía

[1] Balinski, M. L., "The problem with apportionment," *Journal of the Operations Research Society of Japan* 36, 1993, 134-148.

[2] Balinski, M. L. y Ramírez González, V., "A case study of electoral manipulation: the Mexican laws of 1989 and 1994," to appear in *Electoral Studies.*

[3] Balinski, M. L. y Young, H. P., "Apportioning the United States House of Representatives," *Interfaces* 13.4, 1983, 35-43.

[4] Balinski, M. L. y Young, H. P., "Apportionment," in S. M. Pollock, M. H. Rothkopf and A. Barnett, editors, *Operations Research and the Public Sector*, Handbooks in Operations Resarch and Management Science, Vol. 6, North-Holland, Amsterdam, 1994, 529-560.

[5] Balinski, M. L. y Young, H. P., *Fair Representation : Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Yale University Press, New Haven, Ct. and London, 1982. Japanese translation, Chikura-Shobo Publishing Company, Tokyo, 1987.

[6] D' Hondt, V., *La représentation proportionnelle des partis par un électeur*, Ghent, 1878.

[7] D'Hondt, V., *Système pratique et raisonné de représentation proportionnelle*, Muquardt, Bruxelles, 1882.

[8] Huntington, E. V., "The apportionment of Representatives in Congress," *Transactions of the American Mathematical Society* 30, 1928, 85-110.

[9] Huntington, E. V., "The mathematical theory of the apportionment of Representatives," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, U.S.A. 7, 1921, 123-127.

[10] Márquez, M. L., *Representación proporcional*, preprint, Depto. Matemática Aplicada (Granada), 1996.

[11] Rae, D. y Ramírez V., *El Sistema Electoral Español. Quince años de experiencia.* Mc-Graw-Hill, 1993.

[12] Ramírez, V., Pérez, R. y Márquez, M. L. *Alternativas al sistema electoral español. Adaptación del sistema electoral alemán.* Libro que parecer en 1996.

[13] Sainte-Laguë, A., "La représentation et la méthode des moindres carrés," *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* 151, 1910, 377-378.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 35-41

LA TEORÍA DE LA ELECCIÓN SOCIAL: MÉTODOS DE VOTACIÓN NO MANIPULABLES

JORDI MASSÓ
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA Y CODE
UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA
08193, BELLATERRA (BARCELONA)

e-mail:jmasso@volcano.uab.es

El objetivo de esta nota es ilustrar, a través de un ejemplo, el tipo de investigación realizada por un grupo de economistas, que utilizando las matemáticas como lenguaje, se ha ido consolidando en el Departamento de Economía e Historia Económica de la Universitat Autonoma de Barcelona, alrededor de los temas de la teoría de la elección social, la teoría de los juegos y sus aplicaciones a la teoría económica. El ejemplo que he escogido es el de los métodos de votación no manipulables. A pesar de los abundantes resultados negativos de la teoría de la elección social, los procedimientos de votación son ampliamente utilizados como métodos de asignación y de toma de decisiones. Parece, pues, especialmente productivo colocarse en ámbitos suficientemente restringidos para que en ellos se produzcan resultados de posibilidad, y donde puedan plantearse, por tanto, cuestiones de diseño y selección de métodos alternativos. Veámoslo.

La teoría de la elección social trata sobre la toma de decisiones colectivas a partir de las preferencias de los individuos que conforman una sociedad. Consideremos un conjunto de alternativas sociales y una sociedad cuyos individuos tienen preferencias sobre dicho conjunto. Representemos estas preferencias por relaciones binarias sobre el conjunto de alternativas; tengamos presente que los individuos pueden tener opiniones distintas sobre las alternativas sociales. La teoría de la elección social estudia el proceso de agregación de las preferencias individuales en una preferencia social. Las decisiones colectivas, entonces, se tomarán a partir de la relación binaria social que se ha obtenido al agregar las preferencias individuales. Más formalmente, dado un conjunto de alternativas sociales, una función de bienestar social asigna a cada estado de opinión una relación binaria. No es difícil darse cuenta de que, en general, existen infinidad de procesos de agregación; algunos parecen interesantes y otros lo parecen muy poco (por ejemplo, la función constante es muy poco interesante ya que la preferencia social no depende de las preferencias individuales).

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 35-41

Arrow [1] propone algunas propiedades que, en su opinión, los procesos de agregación social deberían cumplir: (i) Función de bienestar social: si las preferencias individuales son preórdenes totales, entonces la preferencia social debería ser también un preorden total. (ii) Dominio universal: cualquier preferencia individual es legítima. (iii) Principio de Pareto: Si hay unanimidad en considerar una alternativa mejor que otra, entonces la preferencia social debería colocar a la alternativa mejor por delante de la peor. (iv) Independencia de alternativas irrelevantes: La ordenación social entre dos alternativas sólo depende de las ordenaciones individuales de las dos alternativas y no de la forma en que éstas ordenan a otras.

El famoso teorema de imposibilidad de Arrow, Arrow [1], nos dice que las cuatro condiciones anteriores sólo son compatibles con procesos de agregación dictatoriales; a saber, si una función de bienestar social satisface las propiedades de dominio universal, pareto e independencia de alternativas irrelevantes, debe ser dictatorial, es decir, las ordenaciones sociales son las ordenaciones de uno de los individuos fijado previamente.

Existe una amplia literatura generada por el resultado de imposibilidad de Arrow. Parte de esta literatura ha tratado de proponer conjuntos de propiedades alternativos al propuesto por Arrow, manteniendo el mismo marco conceptual determinado por el objeto *función de bienestar social*, es decir, la propiedad (i). Otra parte de la literatura trata de salirse del contexto de Arrow. Nuestros intereses se sitúan en esta segunda parte. Una gran proporción de estas dos vertientes de la literatura tiene como objetivo la obtención de resultados positivos; esto es, la existencia de funciones de bienestar social no dictatoriales.

En muchos casos quizás, la dificultad en el proceso de agregación radica en determinar qué alternativas sitúan la preferencia social en tercer y cuarto lugar, por ejemplo. Se pretende obtener una ordenación social para luego escoger una, y sólo una, de las alternativas. Un objetivo natural, entonces, no es plantearse obtener como resultado del proceso de agregación una ordenación completa de las alternativas, sino determinar directamente cuál de ellas será la elegida. Más formalmente, dado un conjunto de alternativas sociales, una función de decisión social asigna a cada estado de opinión una y sólo una de las alternativas sociales. La mayoría de los métodos de votación constituyen ejemplos de funciones de decisión social; en muchos casos se vota no tanto para determinar la ordenación entre las alternativas sino para elegir (quizás temporalmente) una y sólo una de ellas. Tampoco es difícil darse cuenta de que, en general, existen infinidad de funciones de decisión social; algunas de ellas pueden también parecer interesantes y otras pueden parecerlo muy poco (por ejemplo, la función constante también es una función de decisión social; la manipulación de los procesos de votación para escoger a un candidato previamente determinado es un ejemplo de función constante de decisión).

Un segundo aspecto no contemplado por Arrow (él mismo explícitamente lo reconoce), es el aspecto estratégico del problema. Si para tomar decisiones colectivas tenemos que basarnos en las opiniones individuales, deberemos preguntar por ellas. Pero entonces, cada individuo, al darse cuenta de que las decisiones colectivas se basan en parte en sus opiniones particulares, podría intentar deformar su opinión (y de hecho estaría dispuesto a hacerlo) si con ello obtuviera decisiones sociales más favorables desde su verdadero punto de vista. Supongamos que, conociendo la función de decisión social que se va a utilizar, cada individuo fuera capaz de determinar que, independientemente de las preferencias de los demás, declarar preferencias falsas sólo puede perjudicarle. Es decir, estamos suponiendo que declarar la verdad es una estrategia dominante para todos los individuos. Una función de decisión social con esta propiedad se llama no manipulable. Esta clase de funciones es interesante porque nos ahorra considerar, en el propio diseño de la función particular, los aspectos estratégicos del proceso de decisión social. La teoría de la implementación trata explícitamente sobre estos aspectos estratégicos del proceso de decisión, utilizando nociones más débiles de equilibrio.

El teorema de Gibbard y Satterthwaite, demostrado independientemente por Gibbard [2] y Satterthwaite [3], da una respuesta negativa a la posibilidad de considerar simultáneamente, y de forma interesante, los dos aspectos anteriormente mencionados. Más precisamente, una función de decisión social cuyo rango tenga al menos tres alternativas es no manipulable si y sólo si es dictatorial (elige la mejor alternativa de un individuo pretederminado).

Una hipótesis esencial en el teorema anterior es que, dado el conjunto de alternativas, los individuos pueden ordenarlo como les plazca; es decir, todas las posibles preferencias sobre el conjunto de alternativas son admisibles. De todos modos, pueden haber situaciones en las que, debido a que el conjunto de alternativas sociales tiene una estructura determinada, no tiene sentido esta hipótesis de dominio universal. Pensemos por ejemplo en la ordenación izquierda-derecha cuando las alternativas son partidos políticos, o en la ordenación de distintos proyectos legales sobre el aborto en función de los supuestos en los que el aborto es tratado como una práctica legal, o en la ordenación de las distintas temperaturas que puede tener una sala, etc. Cada una de éstas ordenaciones (exclusivamente asociadas con las propiedades objetivas de las alternativas), podría ser unánimemente aceptada por todos los individuos. Supongamos, por lo tanto, que el conjunto de alternativas puede ser ordenado en una dimensión. Al mismo tiempo, prodríamos pensar que los individuos no ordenarían de cualquier manera estas alternativas. La restricción de dominio más conocida es la de las preferencias unimodales (o de único *pico*). Una preferencia es unimodal si una vez fijada la mejor alternativa, al alejarnos en cualquiera de las dos direcciones encontramos alternativas menos preferidas. Las funciones de decisión no manipulables en el ámbito de las preferencias unimodales han sido ampliamente estudiadas en la literatura; véanse, por ejemplo, Black [4] y Moulin [5]. Moulin demuestra que situados en este ámbito de dominio restringido (preferencias unimodales en una dimensión), existen funciones de decisión social no manipulables y de notable interés. El mismo caracteriza a este conjunto como la familia de funciones que pueden ser representadas como un sistema del votante mediano.

Hay varias maneras alternativas de describir un sistema del votante mediano. La más intuitiva es la basada en los sistemas de coaliciones por la izquierda (o simétricamente por la derecha). Para simplificar supongamos que el conjunto de alternativas es finito y que lo tenemos ordenado de izquierda a derecha. Para cada subconjunto de votantes y para cada alternativa, un sistema de coaliciones por la izquierda nos indica si este conjunto de votantes (coalición) pertenece o no al sistema en esta alternativa concreta. Si pertenece, querrá decir que, dada una votación, la alternativa escogida por la función no podrá ser mayor (en el sentido de la ordenación inicial), siempre que las votaciones de todos los miembros de la coalición sea menor o igual que la alternativa considerada. Para que esta interpretación sea consistente, se deben imponer algunas condiciones naturales a los conjuntos de coaliciones. En primer lugar, si una coalición está en el sistema para una alternativa determinada cualquier conjunto que contenga a la coalición también está en el sistema. En segundo lugar, si una coalición está en el sistema para un alternativa determinada también lo está para todas las alternativas mayores en la ordenación inicial. En tercer lugar, todas las coaliciones pertenecen al sistema de la alternativa mayor. Cualquier sistema de coaliciones por la izquierda sobre un conjunto de alternativas ordenado genera una función de decisión social a través del siguiente procedimiento: los votantes declaran sus alternativas preferidas, la alternativa escogida es la única con la propiedad de que el conjunto de individuos que votaron a la misma alternativa o por alternativas inferiores es una coalición del sistema para la alternativa en cuestión, mientras que el conjunto de individuos que votaron por alternativas estrictamente inferiores no está en el sistema. Informalmente, podemos pensar que la función escoge la alternativa más alta posible, dadas las habilidades de las coaliciones de *tirar* del resultado lo más abajo posible. Estas habilidades vienen expresadas por el sistema de coaliciones por la izquierda. A una función de elección social que escoja segun este procedimiento se le llama un sistema del votante mediano.

Varios autores han extendido el concepto de unimodalidad a varias dimensiones con el objeto de estudiar funciones de decisión social en este ámbito más general. Por ejemplo Border y Jordan [6], Barberà, Sonnenschein y Zhou [7], Serizawa [8], Barberà, Gul y Stacchetti [9], etc. El interés de esta línea de investigación radica en que una gran variedad de problemas de decisión social tienen la propiedad de que la descripción completa de una alternativa social requiere varias dimensiones. Por ejemplo, una empresa que quiere contratar a nuevos trabajadores debe de escoger un conjunto de empleados de entre todos los posibles subconjuntos de solicitantes. En este caso, el conjunto de alternativas se puede identificar con los vértices del hipercubo, ya que cada subconjunto puede ser descrito por su función característica: uno si el elemento pertenece al subconjunto y cero si no pertenece. Otro ejemplo consiste en el problema de decisión de una institución pública que debe de escoger entre distintas opciones alternativas de varios proyectos públicos. En este caso podemos identificar el conjunto de alternativas sociales con una retícula en un espacio euclídeo. Nótese que en ambos casos hemos identificado un conjunto de alternativas como un producto cartesiano de un espacio euclídeo.

La generalización natural de un sistema del votante mediano a contextos multidimensionales es el llamado sistema generalizado del votante mediano que consiste en escoger tantos sistemas de coaliciones por la izquierda como dimensiones, uno para cada una de ellas. Cada votante declarará su alternativa preferida que será proyectada en cada dimensión. Entonces, se aplicarán los correspondientes sistemas del votante mediano para determinar cada una de las componentes de la decisión colectiva. Estos mecanismos están basados en un proceso de toma de decisión enormemente descentralizada: se selecciona un valor para cada una de las características que describen a una alternativa, y entonces el resultado de la decisión colectiva es la alternativa definida conjuntamente por estos valores seleccionados independientemente.

Los artículos de Barberà, Sonneschein y Zhou [7], para el caso del hipercubo, y Barberà, Gul y Stacchetti [9], para el caso general, caracterizan los sistemas generalizados del votante mediano como las únicas funciones de decisión social no manipulables en estos contextos multidimensionales. Sus resultados utilizan la hipótesis adicional de que la función de decisión social es exhaustiva.

En nuestro trabajo (Barberà, Massó y Neme [10]) introducimos explícitamente el hecho de que en muchas decisiones sociales las restricciones económicas provocan que el conjunto factible de alternativas no sea un producto cartesiano. Por ejemplo, conjuntos generados por restricciones presupuestarias caen plenamente dentro del ámbito de aplicación de nuestros resultados, pero en cambio son excluidos por la hipótesis de exhaustividad de la función de decisión.

Lo que es específico de nuestro enfoque es la incorporación explícita de diferentes clases de restricciones en la toma de decisiones colectivas. Nos concentramos en situaciones donde los individuos tienen preferencias unimodales (generalizadas a varias dimensiones) e investigamos en este contexto el conjunto de funciones de decisión social no manipulables. En primer lugar demostramos que son sistemas de votación (es decir, las funciones no manipulables sólo pueden depender de las mejores alternativas declaradas por los individuos), descomponibles por dimensiones y que pueden expresarse como sistemas generalizados del votante mediano. Obtenemos también una caracterización de las funciones que preservan factibilidad y damos un resultado de maximalidad de la restricción de dominio. Finalmente, vemos que el teorema de Gibbard y Satterthwaite, el resultado más general en el área, es un Corolario inmediato de nuestra caracterización.

Resumiendo, nuestro proyecto consiste en explorar las posibilidades abiertas por una forma concreta de extender la noción de unimodalidad a conjuntos multidimensionales de alternativas. Esto es especialmente productivo porque dicha restricción permite también describir contextos en los que pueden evitarse manipulaciones estratégicas de las reglas de decisión colectivas incluso cuando se tenga que considerar restricciones de factibilidad.

Referencias

[1] K. Arrow, Social Choice and Individual Values, Wiley, New York, (1963).

[2] A. Gibbard, *Manipulation of Voting Schemes: A General Result*, Econometrica **41**, 587-601, (1973).

[3] M.A. Satterthwaite, *Strategy-proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions*, Journal of Economic Theory **10**, 187-217, (1975).

[4] D. Black, *On the Rational of Public Decision Making*, Journal of Political Economy **56**, 23-34, (1948).

[5] H. Moulin, *On Strategy Proofness and Single-Peakedness*, Public Choice **35**, 437-455, (1980).

[6] K. Border y J. Jordan, *Straightforward Elections, Unanimity and Phantom Agents*, Review of Economic Studies **50**, 153-170, (1983).

[7] S. Barberà, H. Sonnnenschein y L. Zhou, *Voting by Committees*, Econometrica **59**, 595-609, (1991).

[8] S. Serizawa, *Cross-Shaped Preferences and Voting by Committees*, de proxima aparición en Journal of Economic Theory.

[9] S. Barberà, F. Gul y E. Stacchetti, *Generalized Median Voter Schemes and Committees*, Journal of Economic Theory **61**, 262-289, (1993).

[10] S. Barberà, J. Massó y A. Neme, *Voting under Constraints*, mimeo, Universitat Autonoma de Barcelona, (1995).

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 42-51

El INTA. PASADO Y PRESENTE DE UN OPI

PROF. DR. J. M. G. CONCA
JEFE DE CÁLCULO Y DISEÑO CIENTÍFICO-TÉCNICO
INSTITUTO NACIONAL DE TÉCNICA AEROESPACIAL

1 Introducción

El objeto de este artículo es el INTA. El objetivo es informar a los lectores SEMA, personalizadamente. El origen de este trabajo fue una invitación, al Autor, del Presidente de la última Asamblea SEMA (Vic, 21 Septiembre 95). El procedimiento elegido ha sido resumir concisamente los Hechos y Datos más relevantes a los efectos presentes, remitiendo a las Referencias para mayor detalle. (Todas ellas editadas por el INTA o con su colaboración y conteniendo Matemática Aplicada o Historia Aeroespacial). Este relato simplificado no pretende ser la Historia del INTA, inédita, sino una síntesis objetiva dirigida a los lectores SEMA y/o Universidad. Importa anticipar que el contexto es el de los OPIs: la Tabla 1 subraya esta perspectiva. (Ver Siglas al final del artículo).

TABLA 1: Principales OPIs España 1990s

SIGLAS	ACTIVIDAD	MINISTERIO
CIEMAT	Sectorial Energética	Industria y Energía
CSIC	General Científica	Educación y Ciencia
INIA	Sectorial Agraria	Agricultura y Pesca
INTA	Sectorial Aeroespacial	Defensa

Las actividades aquí y ahora relatadas, por tanto, son las más afines a estos lectores. Conviene advertir que se habla más del Espacio (Satélites) que de la Aviación (Aviones) y de Otros (Automóviles) por lo antedicho; pero que tanto la Transferencia de Tecnología (Aeronaútica, Espacial y Otros) como la Homologación de Productos (Varios) de este Laboratorio Oficial serían temas adicionales obligados para los lectores de la Empresa. En fin, se hará una especie de Memoria de cada uno de los tres Periodos citados después, en unas pocas páginas en ASCII, lo que obliga a sintetizar mucho e impide incluir gráficos. En la primera se hablará sobre todo de la Aviación, en la segunda sobre todo del Espacio y en la tercera sobre todo de ambas, tratando en todas de subrayar sobre todo las actividades más próximas a la Universidad en general y a la Matemática Aplicada en particular, como conviene reiterar para evitar malentendidos; pero, por restrictiva que parezca esta limitada selección personal, es de esperar que de una adecuada perspectiva institucional. Y para terminar esta introducción parece oportuno hacer un par de observaciones previas:

a) La Técnica Aeroespacial y la Matemática Aplicada tienen una cosa en común: ser Ciencias Aplicadas, aunque ambas son mucho más que eso; su combinación fue decisiva para el inicio de la Era Espacial: el primer Satélite Artificial fue posible, entre otras cosas, gracias a las Computadoras Digitales, los Programas Computacionales y los Algoritmos Numéricos, base de la Computación moderna, que incluye la Verificación de Soluciones, por plausibilidad.

b) Los Satélites actuales siguen proyectándose con la ayuda de las Computadoras; pero aquí y ahora hay otros Vehículos y otras Ayudas: la última palabra en I + D la tiene la Experimentación moderna que incluye la Validación de Modelos por necesidad, y cuya combinación con la Computación moderna es decisiva para acortar y abaratar los Proyectos modernos Verificados y Validados, por añadidura.

2 Discusión

El INTA, como se precisará después, tiene ya más de medio siglo de existencia y numerosas y diversas actividades, lo que dificulta extraordinariamente su selección en el tiempo y en el espacio de las fases. El resumen personalizado aquí y ahora realizado, por una parte, contempla tres grandes periodos (orden cronológico):

2.1. Pasado Aeronáutico (1940s - 1960s)
2.2. Pasado Espacial (1960s - 1980s)
2.3. Presente Aeroespacial (1990s)

los dos últimos vividos personalmente por el Autor, y, por otra parte, describe tres grandes aspectos (orden lógico):

Formación Técnica
Investigación Científica
Tecnología Aeroespacial

los tres experimentados activamente por el Autor en las últimas tres decadas, simultáneamente, en este OPI y la Universidad (1965 - 1995).

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 42-51

2.1 Pasado Aeronáutico

El hoy Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial se creó en 1942 con la denominación de Aeronaútica. Sus orígenes van ligados a la Aviación Militar y Experimental por razones históricas; sin embargo, ya en sus comienzos se evidencia cierta actividad en Formación Matemática, plasmada en la cantidad y calidad de Personalidades que colaboran con el INTA: entre ellas destaca T. von Karman, formador del Grupo de Combustión del INTA, dirigido inicialmente por G. Millán, que después pasaría a la Empresa, y posteriormente por C. Sánchez Tarifa, que después pasaría a la Universidad con casi todos sus colaboradores (A. Liñán, etc.). En este aspecto dos Textos servirán como muestra. El primero, la Traducción de Métodos Matemáticos en Ingeniería del propio T. von Karman y M. A. Biot (1939), realizada por A. Pérez-Marín, prologada por el propio E. Terradas y editada por el INTA (1945, Referencia [1]); el segundo, el Curso Los Problemas Lineales de la Física de J. Rey Pastor (1951) recopilado en un libro posterior editado por el INTA (1955, Referencia [2]). En la primera mitad de los 1960s y desde su fundación en la ETSIAeronáuticos, el citado Traductor, que después sería Director del INTA, fue Profesor de Matemáticas del Autor y sus coetáneos, lo que indica la estrecha relación entonces entre ambas instituciones. Asimismo, hay que destacar la contribución del INTA al desarrollo de CASA/Proyectos aportando Medios (Tunel Aerodinámico, etc.) y Personal (Ingenieros Aeronáuticos, etc.) en importantes Proyectos (Aviones, etc.) que sería prolijo detallar (C-101, C-212 y CN - 235). En esta etapa fundacional el INTA respondió básicamente a la necesidad de tener en España un Instituto Nacional (no meramente militar) dedicado a la Técnica Aeronaútica (no solamente experimental) requerida desde el inicio de la Aviación (1903), a semejanza de otros (NACA (USA), etc.). El INTAeronaútica se constituyó como un Organismo Autónomo del Ministerio del Aire, con actividades específicas de I + D (no simplemente teóricas) sobre:

a) Aeronaves (Aerodinámica, Estructura, etc.)
b) Motores (Mecánica, Termodinámica, etc.)
c) Materiales (Metálicos, No Metálicos, etc.)

incluidos Combustibles, Lubricantes, Pinturas, etc.; el Primer Presidente fue E. Terradas y el Primer Director fue F. Lafita (Referencia [4]), los primeros Presupuestos de unos 35 Mpta. y los primeros Titulados unas decenas.

2.2 Pasado Espacial

El INTAeroespacial se redenominó así en 1963, como sus homólogos (NASA, etc.). El motivo fue la Carrera del Espacio iniciada a finales de la decada anterior (1957); pero, de hecho, el INTA ya estuvo presente en el primer esfuerzo espacial europeo conjunto mediante primero un Contrato con la COPERS (1960) y después otros con la ESRO (1964) (Contract Reports nos 25, 38, 65, 211, etc.); además, ya a principios de la década (1960) el INTA y otros organizaron el Primer Curso en España de Ciencia y Tecnología del Espacio que fue recopilado y editado posteriormente por el INTA (1961, Referencia [3]). En esta nueva etapa el INTA ejerció su nueva actividad como Organismo Tecnológico de la Comisión Nacional de Investigación del Espacio (CONIE) que organizó el Primer Curso de Información Espacial (inédito) dirigido a la Universidad, con la intervención del INTA, lo que decidió la creación posterior de los Grupos Científicos de la CONIE, por una parte y del Grupo de Dinámica Espacial del INTA, por otra parte (T. Elices (Referencia [7]). Además, el INTA ya no es el único Ente que se ocupa del Espacio; el Grupo del Espacio del INTA fue dirigido inicialmente por L. Pueyo. En este orden de ideas habría que añadir que la Matemática es una actividad milenaria, incluso si se define según Euclides y sus Aplicaciones son mucho más antiguas; pero la Matemática Aplicada no aparece como tal en la Universidad (Goetingen) hasta principios de este Siglo (Runge). La Astrodinámica, según Newton, tiene ya unos siglos; sus Métodos Numéricos preferidos han sido del tipo Predictor-Corrector (Adams-Bashforth y Moulton) hasta mediados de este Siglo (Cowell o Encke, es decir, Milne-Simpson), antes de la Era Espacial. La Matemática Aplicada ha experimentado un gran auge en este Siglo y en su segunda mitad los Métodos Numéricos se han consagrado como los Algoritmos Universales. La Astronaútica moderna, sin embargo, tiene como asignatura pendiente la sustitución de sus Algoritmos Clásicos, lentos pero seguros, por Algoritmos Modernos, rápidos y verificados (Bulirsch - Stoer), en la Era Espacial del Siglo XXI. En esta segunda actividad cabría destacar el Primer Satélite INTASAT (1974) que respondió a la necesidad de tener un Proyecto Español, calculado y diseñado, experimentado y construido, principalmente por el INTA. El último Presidente fue el General de Andrés y el último Director el Coronel de la Malla; en los ultimos años de esta etapa su Presupuesto era de unos 3500 Mpta. y sus Titulados (Superiores y Medios) eran unos 300, sin contar los destinados al servicio de las Estaciones NASA (Robledo) y ESA (Villafranca) de cuya operación y mantenimiento es responsable el INTA.

2.3 Presente Aeroespacial

El INTA se reorganizó recientemente (1989) como el Organismo Publico de Investigación (OPI) Aeroespacial del Ministerio de Defensa (MD), cuyo Presidente es el Secretario de Estado para la Defensa. El motivo fue la denominada Ley de la Ciencia, es decir, el Fomento y la Coordinación de la I + D en la España actual; su Presupuesto creció hasta más de 14000 Mpta (más del cuádruple) pero sus Titulados sólo hasta 500 (menos del doble).

En la actualidad sus funciones principales son:

Realización del I + D tecnológico aeroespacial (Programa Nacional y otros)

Apoyo y asistencia científico-técnica aeroespacial (Ministerio Defensa y otros)

Desarrollo, mantenimiento y explotación de instalaciones avanzadas aeroespaciales (Túneles y otros)

Homologación y Certificación de productos aeronáuticos (no aeroespaciales) (Aviones y otros)

para lo que cuenta hoy, entre otras, con una Subdirección Técnica, organizada en Divisiones y Centros, entre otros, como: Divisiones

Aerodinámica: Computacional (CFD) y Experimental (Túneles)

Estructuras: Computacional (FEA) y Experimental (Bancos)

Motopropulsión: Computacional (FDM) y Experimental (Banco)

con sus correspondientes Instalaciones concentradas en Torrejón (Madrid) en un Pinar de unas 1200 Ha al Este de la Carretera de Ajalvir (s/n). Centros

Aeronaves: Experimentación (Vuelos)

Satélites: Experimentación (Orbitas)

Cohetes: Experimentación (Lanzamientos)

con sus correspondientes Pistas, Estaciones y Campos diseminados en toda España (Torrejón, Cebreros, Huelva, etc.) y un Centro de Documentación en su sede de Madrid (P Pintor Rosales, 34). La Tabla 2 enumera algunas otras Subdirecciones para dar una visión de conjunto del INTA: en el BOE num. 176 del Martes 25 Julio 1986 se tiene toda la información al respecto (pags. 23577 a 23581).

TABLA 2: Principales Subdirecciones INTA 1990s

DENOMINACION	FUNCION
Aeronáutica	Gestión Proyectos
Espacial	Gestión Proyectos
Técnica	I + D Aeroespacial

Entre los Proyectos Espaciales más recientes, a los efectos presentes, cabe destacar dos (en desarrollo):

MINISAT:Diseño, desarrollo, ensayo y fabricación I+D de una pequeña plataforma multiuso española subvencionada parcialmente por el Programa Nacional del Espacio y subcontratada en parte a las Principales Empresas del Sector (CASA/Espacio, etc.).

CAPRICORNIO: Diseño, desarrollo, ensayo y fabricación I+D de un Lanzador de Microsatélites a órbitas bajas , financiado y realizado totalmente por el INTA.

Y, para terminar esta discusión, es conveniente continuar con las observaciones previas de la introducción más relacionadas con la Matemática Aplicada:

a) El INTA dispone actualmente de las Computadoras más modernas de España en sus Divisiones (100 Estaciones de Trabajo), en su Centro de Calculo (1 Supercomputadora Vectorial Biprocesador CRAY Y-MP EL) y en el Centro de Cálculo del Ministerio de Defensa (Ordenador Vectorial Multiprocesador CRAY Y-MP 2E), así como de los Programas más potentes del Mundo en Aerodinámica (PHOENICS, etc.), Estructuras (MSC/NASTRAN, etc.), Motores (KIVA3, etc.) etc. y de los Expertos correspondientes en Computación (Cálculo y Diseño & Verificación) (Referencia [5]).

b) Los Proyectos I+D desarrollados actualmente en el INTA se inician en la Subdirección correspondiente y se estudian en las Divisiones pertinentes para dictaminar primero su viabilidad; posteriormente, bien se desarrollan hasta el final o bien se subcontratan en parte a las Empresas del Sector sin perder el control del Proyecto (Ensayos & Validación) para garantizar su adecuación a sus Misiones y, al tiempo, preparar a la Industria del Sector para su participación en Programas futuros de la ESA de la que forma parte el INTA (sin ser el equivalente español de la Administración del Espacio ni de Europa (ESA) ni de Norteamérica (NASA)). En las otras Referencias podrán encontrarse más detalles (Referencias [6] y [8]). La Tabla 3 resume las principales Conferencias, Congresos y Cursos de esta etapa que pudieran interesar a estos lectores, para completar esta visión de conjunto de nuestras actividades actuales . El actual Presidente es J. R. García Secades y el Director, en toda esta etapa, E. Trillas (1989-1995) en el momento de redactar este artículo (Septiembre-Octubre).

3 Conclusión

3.1. El INTA surgió de las necesidades de nuestra Aviación en los primeros 1940s, se amplió por la Carrera Espacial exterior en los medios 1960s y se reorganizó por la Ley de la Ciencia en los últimos 1980s para cumplir sus funciones antes resumidas como el OPI Aeroespacial del Ministerio de Defensa que es ahora.

3.2. La mayor parte de sus actividades actuales tienen poco que ver con la Matemática Aplicada, tal como se considera esta en las Universidades españolas hoy y mucho que ver con la Ingeniería Aeronaútica y otras de nuestras Empresas Sectoriales; no obstante, ha habido y sigue habiendo mucha actividad análoga en la Computación de apoyo a sus Proyectos I+D típicos de Cálculo y Diseño antes indicados del Sector Aeroespacial que aquí son Verificados y Validados, además.

3.3. En la actualidad reparte sus escasos Recursos Humanos (500 Titulados) entre la Aeronaútica, el Espacio y Otros, tanto en Formación como en Investigación y en Tecnología lo que no deja mucho remanente para Publicaciones como se ha ilustrado ahora.

3.4. En suma, el INTA, en el Tercer Plan I+D (1996 - 1999) tiene actividades Teóricas, Computacionales y Experimentales que interesan sobre todo a la Empresa en general, pero también a la Universidad en particular y por tanto a la SEMA en especial lo que conviene sea mejor conocido en el futuro como se ha intentado, al menos en primera instancia, aquí. (El Autor y/o el INTA facilitarán más información, si fuese requerida, directamente y/o a través de la SEMA: Informes particulares, Memorias oficiales, etc.). Y, para terminar esta conclusión, es innecesario resaltar que se ha intentado:

a) Decir lo que es el INTA, aunque sea limitándose a hablar de las actividades más afines a la SEMA, lo que espero comprendan todos los lectores, especialmente los del INTA dedicados a otras actividades.

b) Subrayar que el INTA no es la Administración del Espacio de España aunque sea, entre otras cosas, su Apoyo Técnico, lo que espero comprendan todos los lectores, especialmente los de la SEMA dedicados a estas actividades. En último lugar, pero el más importante en el fondo, el Autor agradece a la Asamblea SEMA haber propiciado, en su día, la idea de este artículo de divulgación y a sus Colegas INTA, haber mejorado, ahora, su realización, aunque la responsabilidad de esta redacción le corresponde solamente, como único Miembro SEMA-INTA existente en la actualidad y uno de los pocos que han potenciado la Computación, en OPIs y Universidades desde hace ya muchos años.

TABLA 3: Principales Conferencias, Congresos y Cursos INTA 1990s

CONGRESOS AÑO 91

I Congreso INTA, 21 y 22 de febrero.

I Congreso Nacional de Microgravedad, del 16 al 18 de diciembre.

CONFERENCIAS Y CONGRESOS DEL 92

16-01-92 Principios del Derecho Internacional del Espacio. Evolución actual de sus normas relevantes. D. Raimundo González Aninat

29-10-92 Mesa redonda sobre La Historia del INTA en sus protagonistas. D. Manuel Bautista Aranda, D. Carlos Sánchez Tarifa, D. Jose Warleta Carrillo, D. Jose M Pintado Fe, D. Angel Barcala Herreros.

II Congreso INTA, del 26 al 28 de Octubre.

CONFERENCIAS AÑO 93

03-11-93 Capricornio. D. Julián Simón Calero.

10-05-93 Minisatelites. D. Miguel A. García Primo.

29-06-93 SIVA. D. Manuel Mulero Valenzuela.

03-12-93 Experiencias Aerodinámicas. S. Sor Mendi, B. A. Delicado, A. Carpenyo, A. Belinchon, A. Conesa, R. Bardera, J. J. Navarro.

24-02-94 Verificación Computacional de Soluciones Numéricas. Prof. Dr. José Manuel García Conca

29-04-94 Dinámica de Fluidos Computacional sobre Ordenadores Cray. Mr. R. E. Vermeland.

CONFERENCIAS AÑO 94

13-10-94 Estudio Aerodinámico de un Tren de Alta Velocidad. D. N. Caballero, D. J. M. Olalla, D. A. Munyoz

20-10-94 INTA-300: Tecnología y Ciencia. D. Carlos Egea, D. J.J. Moreno

17-11-94 Mecanismos de Apuntamiento de Uso Espacial. D. Javier Serrano.

CONFERENCIAS Y CURSOS AÑO 95

30-03-95 Programa Español de Minisatelites (MINISAT): Un reto para el futuro. D. Miguel Angel García Primo.

11-05-95 A bordo del Minisat (I): LEGRI, su Ciencia y su Tecnología. Prof. Victor Reglero

Curso Práctico sobre Dinámica de Satélites. T. Elices y J. M. G. Conca.16-05-95 a 15-06-95

25-05-95 La Agencia Espacial Europea: Actividades y Perspectivas. D. Vicente Gómez

01-06-95 Ciencia, Tecnología y Aeronáutica: En torno a la H del INTA Prof. Jose M. Sánchez Ron.

28-09-95 A bordo del Minisat (II): EURD, su Ciencia y su Tecnología. Dra. Carmen Morales Duran.

14-12-95 La Misión Integral de la ESA. Dr. A. Gimenez

4 Referencias

[1] KARMAN, von T. y, BIOT, M.A. Métodos Matemáticos en Ingeniería INTA (1945 y 1960)

[2] REY PASTOR, J. Los Problemas Lineales de la Física INTA (1955)

[3] Anónimo (Ed.)/I Curso Técnica Aeroespacial Ciencia y Tecnología del Espacio INTA (1961)

[4] LAFITA, F. y MATA, H. Vibraciones Mecánicas en Ingeniería INTA (1964)

[5] GARCIA CONCA, J.M. Métodos Numéricos en Ingeniería INTA (1989 y 1995)

[6] ROCA ROSELL, S. y SANCHEZ RON, J.M. Esteban Terradas Ciencia y Técnica en la España Contemporánea INTA/SERBAL (1990)

[7] ELICES, T. Dinámica Espacial INTA (1991)

[8] Anónimo (Ed.)/II Congreso Ingeniería Aeronáutica La Aviación y el Espacio Hechos y Datos AyCOIAE/INTA (1993)

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 42-51

5 Siglas

AyCOIAE: Asociación y Colegio Oficial Ingenieros Aeronáuticos España

CASA: Construcciones Aeronáuticas Sociedad Anónima

CFD: Computational Fluid Dynamics

CIEMAT: Centro Investigaciones Energéticas Medio Ambientales y Tecnológicas

CONIE: Comisión Nacional Investigación Espacio

COPERS: European Preparatory Commision for Space Research

CSIC:Centro Superior Investigaciones Científicas

ESA: European Space Administration (UE)

ESRO:European Space Research Organization

FDM: Finite Diference Methods

FEA: Finite Element Analysis

INIA:Instituto Nacional Investigaciones Agrarias

INTA:Instituto Nacional Técnica Aeroespacial

NASA:National Aeronautics & Space Administration (USA)

OPI: Organismo Público Investigación

SEMA: Sociedad Española Matemática Aplicada

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 52-53

El día 20 del pasado mes de enero, y cuando se desplazaba en su coche desde Santander a Santiago de Compostela, para impartir un curso de Tercer ciclo en esta última Universidad, sufrió un terrible accidente en la provincia de Lugo nuestro compañero Eduardo Casas Rentería, en el que falleció su esposa Mercedes, que le acompañaba. Aunque muchos de nosotros ya le hemos expresado a Eduardo nuestra consternación y nuestro aliento para hacer frente a la situación, mientras se ha ido reponiendo de las heridas sufridas, queremos hacerlo de nuevo con todo cariño desde las páginas del Boletín de esta Sociedad a cuya creación tanto ha contribudo él.

Por otra parte, cabe mencionar que a lo largo del año pasado llegaron algunas noticias alarmantes para nuestros colegas de Polonia, en el sentido de que el Instituto Banach de aquella nación pasaba por dificultades que podían llevarlo a la desaparición. Juan Luis Vázquez tuvo la iniciativa de escribir a varios organismos polacos expresando su preocupación y la de muchos matemáticos españoles, y a lo largo de los últimos meses ha ido recibiendo respuestas bastante tranquilizadoras al respecto.

En cuanto al seguimiento de acuerdos tomados en la reunión del Consejo del pasado 1 de diciembre, cabe decir lo siguiente:

• La Universidad de Vigo, y en su representación José Durany, ha comenzado las primeras tareas de organización del XV CEDYA-V Congreso de Matemática Aplicada.

• Se han nombrado corresponsales del Boletín en varias Universidades, como consta en otro lugar de este mismo número. Se admiten sugerencias para aquellos lugares en que todavía no lo hay. Desde aquíqueremos animar a todos ellos a realizar una buena labor de enlace.

• También en otro lugar de este Boletín se concreta la oferta del actual Vicepresidente Gerard Gómez para hacer funcionar un servicio de Noticias a través del correo electrónico. Dependerá de nuevo de todos que este servicio sea ágil y útil, sobre todo para cuestiones de carácter urgente.

• Está ya en estudio por el Consejo un proyecto concreto de reforma de los estatutos en lo que respecta a la duración del mandato de los futuros Presidentes extendiéndola a dos años. Requiere un mínimo de cambios pero debe

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 52-53

ser aprobada por una Asamblea Extraordinaria que podría realizarse inmediatamente antes de la Asamblea General de setiembre que refrenda al nuevo Presidente. Se os tendrá informados en nuevos Boletines y también cuando se convoquen las Asambleas, antes del verano.

A punto de cerrar la edición de este número nos llega la noticia de que el 29 de marzo le fue conferido a nuestro anterior presidente, Ildefonso Díaz, el Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Pau (Francia). Aunque en otro lugar se recoge la reseña del acto queremos felicitar aquí a Ildefonso y nos congratulamos de que distinguidos miembros de nuestra Sociedad continúen recibiendo honores nacionales e internacionales.

MARIANO GASCA
PRESIDENTE DE SEMA

NUEVOS SOCIOS

Socios ordinarios (personas físicas):

Blat Gimeno, Josep Angel
Dpto. de Matemàtiques i Informàtica
Univ. de les Illes Balears

Caselles Costa, Vicent
Dpto. Matemàtiques i Informàtica
Univ. de les Illes Balears

Fasano, Antonio
Dpto. di Matematica 'U.Dini'
SMFN
Univ. di Firenze (Italia)

Gallardo Molina, José María
Dpto. de Análisis Matemático
Fac. de Ciencias
Univ. de Málaga

Maestre Hachero, Manuel
Dpto. de Matemáticas
E.P.S. La Rábida
Univ. de Huelva

Martínez Fernández, José Javier
Dpto. de Matemática Aplicada

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 59-64

MÉTODOS SIMPLÉCTICOS DESARROLLABLES EN P-SERIES

Doctorando: Ander Murua Uria.
Director: Jesús Sanz Serna.
Defensa: 17 de Febrero de 1995, Universidad de Valladolid.
Calificación: Apto Cum Laude.

Resumen: En este trabajo dedicamos nuestra atención a la familia de los métodos de un paso desarrollables en P-series cuya aplicación a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias es simpléctica, desarrollando una teoría para métodos simplécticos análoga a la teoría de P-series para métodos en general no simplécticos. En dicha teoría juega un papel fundamental una clase especial de grafos orientados, que llamamos H-árboles, que es para metodos simplécticos el concepto análogo al de P-arbol para métodos particionados generales. El concepto paralelo al de P-serie es en cambio el de unas series formales de funciones escalares, con un término para cada H-árbol, que llamamos H-árboles. Dicha teoría nos permite, por un lado, hacer un análisis regresivo del error de metodos particionados simplécticos, y por otro obtener diversas caracterizaciones de las condiciones de orden independientes para métodos particionados simplécticos.

DISCRETIZACIONES EN TIEMPO DE PROBLEMAS PARABÓLICOS EN ESPACIOS DE BANACH

Doctorando: Cesáreo J. González Fernández.
Director: César Palencia de Lara.
Defensa: 14 de Junio de 1.995, Universidad de Valladolid.
Calificación: Apto Cum Laude.

Resumen: El objetivo de la memoria es el estudio de las discretizaciones en tiempo de problemas parabólicos en espacios de Banach. Por una parte, se estudian problemas lineales no autónomos y por otra problemas casilineales.

Para las discretizaciones en tiempo de proponen tanto métodos Runge-Kutta como métodos lineales multipaso.

En el primer y segundo capítulo se obtienen los teoremas de estabilidad para las discretizaciones de problemas lineales parabólicos no autónomos. Se estudian los casos de variación relativa tipo Lipschitz y tipo Hölder. En el capítulo tercero se obtiene un teorema de estabilidad para las discretizaciones en tiempo de problemas casilineales parabólicos. Por último, se dan diversas aplicaciones de los resultados obtenidos.

Contribuciones a la integración simpléctica de problemas hamiltonianos

Doctorando: Ana Portillo de la Fuente.
Director: Jesús Sanz Serna.
Defensa: 9 de Junio de 1.995, Universidad de Valladolid.
Calificación: Apto Cum Laude.

Resumen: El primer capítulo tiene como fin el desarrollo de métodos simplécticos explícitos Runge-Kutta-Nystrom de orden seis. Nuestro objetivo fue tratar de mejorar el método de orden cuatro que M.P. Calvo expuso en su tesis. Nuestros esfuerzos en este sentido no han tenido éxito.

La segunda contribución va dirigida a construir métodos explícitos Runge-Kutta-Nystrom no disipativos, es decir, que tengan factor de amplificación unidad cuando se aplican con paso suficientemente pequeño a osciladores lineales. Nuestra investigación pone de manifiesto que la condición de no disipatividad es demasiado débil a la hora de diseñar esquemas para problemas Hamiltonianos.

El capítulo tercero estudia un método para construir esquemas simplécticos explícitos para una clase de problemas Hamiltonianos no autónomos que aparecen en mecánica cuántica. Los esquemas que hemos desarrollado resultan mucho más eficientes que los hasta ahora publicados en la literatura quimicofísica.

Series de Fourier de funciones elípticas. Aplicación a la precesión terrestre

Doctorando: Miguel Vallejo Carrión.
Director: Antonio Elipe.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 59-64

Defensa: 16 de Julio de 1995, Universidad de Zaragoza.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Se propone un nuevo método de resolución de sistemas dinámicos perturbados, cuya parte no perturbada es resoluble mediante funciones elípticas. Utilizando las funciones elípticas de la parte no perturbada obtenemos de modo automático (haciendo uso de un manipulador algebraico) el desarrollo de la perturbación en series de Fourier rápidamente convergentes, cuyos coeficientes son potencias de la noma de Jacobi, calculándolos mediante la aplicación del teorema de los residuos de Cauchy. Una vez expresado de este modo el problema, podemos aplicar transformaciones de Lie que nos permiten una solución analítica hasta el orden requerido.

Se describe el método general de obtención de los desarrollos de Fourier de funciones que son producto de potencias de funciones elípticas. Se hace una aplicación al problema del oscilador de Duffing perturbado, estimando la aproximación obtenida al tomar distinto número de términos en los desarrollos.

En el segundo capítulo, se hace una recopilación de los conjuntos de variables más frecuentemente utilizados para el problema de la rotación libre de un sólido triaxial, dando las expresiones de las variables de Serret–Andoyer en funciones Theta de Jacobi.

Se aplica el método general al caso de la rotación de un sólido triaxial en un campo Newtoniano, expresándose el potencial en desarrollos de Fourier y se aplica a la actitud de un satélite artificial triaxial en órbita elíptica fija para varios conjuntos de condiciones iniciales.

Por último, abordamos el tema de la precesión Luni–Solar terrestre, considerando la Tierra como un sólido triaxial bajo la atracción de dos masas puntuales, el Sol y la Luna, cuyas órbitas se suponen funciones conocidas del tiempo. Con nuestro método calculamos los elementos de la precesión (ζ_A, θ_A, z_A) que, para un período de un siglo Juliano, no se diferencian en más de $4'$ con respecto a los valores adoptados por la IAU.

Eliminación de Neville y análisis de error

Doctorando: Pedro Alonso Velázquez.
Director: Mariano Gasca y Juan Manuel Peña.
Defensa: 23 de Noviembre de 1995, Universidad de Oviedo.
Calificación: Apto cum laude.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 59-64

Resumen: La eliminación de Neville es un procedimiento de eliminación matricial alternativo a la gaussiana que se ha mostrado en los últimos años especialmente idóneo cuando la matriz es totalmente positiva. Estas matrices son las que tienen todos sus menores no negativos y aparecen frecuentemente en algunos temas de teoría de aproximación y de diseño geométrico asistido por ordenador. Hasta ahora se tenía muy poca información respecto a la propagación de errores de la eliminación de Neville. El objetivo fundamental de esta memoria ha sido llevar a cabo un análisis de dicha propagación de errores, por medio de los dos enfoques clásicos de este tipo de estudios: el regresivo (*backward*) y el progresivo (*forward*).

El capítulo primero es introductorio y en él se recogen conceptos y resultados básicos que se utilizarán en la menoria.Los capítulos segundo y tercero se dedican, respectivamete, a los mencionados análisis de error progresivo y regresivo de la eliminación de Neville. En ambos casos se comparan los resultados obtenidos con los de la eliminación gaussiana. En el caso de matrices totalmente positivas se observa que las cotas de error obtenidas con la eliminación de Neville son ligeramente mejores que las correspondientes a la eliminación gaussiana. El capítulo cuarto es una introducción a la eliminación de Neville en paralelo. Finalmente, dedicamos un apéndice a reunir los resultados de los experimentos numéricos que hemos realizado para comparar la eliminación gaussiana con la de Neville y para calcular las cotas de error obtenidas en los capítulos segundo y tercero.

Familias de órbitas periódicas en el satélite zonal

Doctorando: Martín Lara Coira.
Director: Antonio Elipe.
Defensa: 19 de diciembre de 1995, Universidad de Zaragoza.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: El tema principal de la tesis es la *continuación numérica de familias naturales de órbitas congeladas* en el problema zonal de la teoría del satélite artificial.

Se conocen como órbitas congeladas a aquellas órbitas en las que tanto la excentricidad como el argumento del perigeo permanecen aproximadamente estacionarios. En la tesis se buscan y encuentran este tipo de órbitas para el potencial terrestre, dando validez a resultados conseguidos por otros autores mediante teorías analíticas aproximadas.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 59-64

La forma de obtener las órbitas congeladas ha sido mediante el cálculo de las *familias naturales* de órbitas periódicas (en el meridiano de rotación del satélite) en el problema sin promediar. El parámetro empleado para generar las familias ha sido la componente polar del momento angular, la cual está directamente relacionada con la inclinación de la órbita. El procedimiento utilizado se basa en un algoritmo de predicción tangente, que en la tesis se establece para variaciones de cualquiera de los parámetros de un potencial multiparamétrico, seguido de un corrector isoenergético con el cual se mejora la predicción tangente.

El método desarrollado en la tesis se basa en la integración de las ecuaciones variacionales, motivo por el cual se efectúan las integraciones numéricas por el método de las series recurrentes de potencias, que presenta gran estabilidad en el cálculo de dichas ecuaciones. El principal inconveniente de este método es la falta de generalidad, puesto que necesita una manipulación previa de las ecuaciones a integrar, para poder aplicar el álgebra de series. Este inconveniente lo hemos solventado automatizando dicha manipulación mediante un paquete de software.

En la tesis también se estudia el potencial lunar, debido al reciente aumento del interés por este problema. En este caso, aplicando los métodos desarrollados en la tesis, también se encuentran familias de órbitas congeladas. Estos resultados se confirman con otro procedimiento, que combina técnicas analíticas con el coloreado de la función hamiltoniana.

Primeros resultados en el estudio de los espacios normados probabilísticos con nuevos conceptos de acotación y algunos nuevos resultados sobre espacios métricos probabilísticos

Doctorando: Bernardo Lafuerza Guillén.
Director: Carlo Sempi (Italia) y José A. Rodríguez Lallena.
Defensa: 31 de Enero de 1996, Universidad de Almeria.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Se establecen varios resultados sobre espacios métricos probabilísticos. Se dan los primeros ejemplos y el modo de dotar de estructura de espacio normado probabilístico (en adelante espacio-NP) a un espacio normado clásico, así como algunos ejemplos de espacios-NP especiales. Se construyen espacios-NP generados por transformaciones lineales. Se introducen nuevos conceptos de acotación. Se clasifican y definen los operadores lineales entre dos

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº8 (1996) 59-64

espacios-NP según los nuevos conceptos de acotación de conjuntos. Probamos la no implicación mutua entre los conceptos de continuidad y acotación. Demostramos que todo espacio-NP, bien sea de Serstnev, bien de Alsina, Schweizer y Sklar puede completarse. Se dan para espacios-NP resultados paralelos a los que Egbert y Alsina consiguieron para productos de espacios métricos probabilisticos. Demostramos que la norma de todo espacio L^p y la de todo espacio de Orlicz procede de una única norma probabilística. Se construyen normas probabilísticas sobre espacios de operadores lineales (o lineales, acotados en el sentido de esta tesis, y continuos) entre espacios-NP. Se caracteriza la equicontinuidad de una familia de operadores lineales. Se dan algunos resultados sobre la teoría del punto fijo. Finalmente, estudiamos el problema de la normabilidad de espacios-NP.

Todo aquél que haya realizado/dirigido recientemente tesis doctoral en algún tema de Matemática Aplicada, puede enviar los datos de la tesis y un resumen para su publicación en este boletín. Remitirlos a

`sema@posta.unizar.es`

o al corresponsal de SEMA correspondiente a su Universidad