

responsables de sección

Vida de la Sociedad

Mariano Gasca
Universidad de Zaragoza
gasca@posta.unizar.es
fax: (976) 76 11 25

Congresos y seminarios

Juan Luis Vázquez
Universidad Autónoma de Madrid
jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es
fax: (91) 397 48 89

Novedades bibliográficas

Eduardo Casas
Universidad de Cantabria
sema@masun1.unican.es
fax: (942) 20 17 03

Actividad académica

Tomás Chacón
Universidad de Sevilla
chacon@cica.es
fax: (95) 455 28 98

Relaciones con la industria

Juan Manuel Viano
Universidad de Santiago de Compostela
viano@zmat.usc.es
fax: (981) 59 70 54

corresponsales

Almería: Ramón Carreño : ramon@filabres.uam.es Barcelona: Gerard Gómez : gomez@cerber.mat.ub.es Bilbao: Eduardo Sáinz de la Maza : eduardo@picasso.lc.ehu.es Córdoba: Mercedes Marín Beltrán : malmabem@lucano.uco.es Coruña: José Manuel Rodríguez Seijo : mmrseijo@udc.es Extremadura: Mariano Rodríguez-Arias : arias@ba.unex.es Granada: José Miguel Alonso Alonso : jalonso@goliath.ugr.es Huelva: Manuel Merino Morlesín : morlesin@uhu.es Islas Baleares: Vicent Casselles : dmivca0@PS.uib.es Jaén: Javier Muñoz : fax: 953-212400, telef. 953-212409 Madrid (Autónoma): Juan Luis Vázquez : jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es Madrid (Complutense y Politécnica): Francisco Padial : sema@aq.upm.es Málaga: Antonio Valle : valle@anamat.cie.uma.es Oviedo: Javier Valdés García : valdes@pinon.ciencias.uniovi.es Santander: Luis Alberto Fernández Fernández : lafernandez@besaya.unican.es Santiago de Compostela: Peregrina Quintela : pere@zmat.usc.es Sevilla: Tomás Chacón : chacon@cica.es Valencia: José M. Mazón : mazon@mac.uv.es Valladolid: Begoña Cano : becano@mac.cie.uva.es Vigo: José Durany : durany@dma.uvigo.es Zaragoza: Francisco Javier Sayas : jsayas@posta.unizar.es

responsables de sección

Vida de la Sociedad

Mariano Gasca
Universidad de Zaragoza
gasca@posta.unizar.es
fax: (976) 76 11 25

Congresos y seminarios

Juan Luis Vázquez
Universidad Autónoma de Madrid
jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es
fax: (91) 397 48 89

Novedades bibliográficas

Eduardo Casas
Universidad de Cantabria
sema@masun1.unican.es
fax: (942) 20 17 03

Actividad académica

Tomás Chacón
Universidad de Sevilla
chacon@cica.es
fax: (95) 455 28 98

Relaciones con la industria

Juan Manuel Viano
Universidad de Santiago de Compostela
viano@zmat.usc.es
fax: (981) 59 70 54

corresponsales

Almería: Ramón Carreño : ramon@filabres.uam.es Barcelona: Gerard Gómez : gomez@cerber.mat.ub.es Bilbao: Eduardo Sáinz de la Maza : eduardo@picasso.lc.ehu.es Córdoba: Mercedes Marín Beltrán : malmabem@lucano.uco.es Coruña: José Manuel Rodríguez Seijo : mmrseijo@udc.es Extremadura: Mariano Rodríguez-Arias : arias@ba.unex.es Granada: José Miguel Alonso Alonso : jalonso@goliath.ugr.es Huelva: Manuel Merino Morlesín : morlesin@uhu.es Islas Baleares: Vicent Casselles : dmivca0@PS.uib.es Jaén: Javier Muñoz : fax: 953-212400, telef. 953-212409 Madrid (Autónoma): Juan Luis Vázquez : jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es Madrid (Complutense y Politécnica): Francisco Padial : sema@aq.upm.es Málaga: Antonio Valle : valle@anamat.cie.uma.es Oviedo: Javier Valdés García : valdes@pinon.ciencias.uniovi.es Santander: Luis Alberto Fernández Fernández : lafernandez@besaya.unican.es Santiago de Compostela: Peregrina Quintela : pere@zmat.usc.es Sevilla: Tomás Chacón : chacon@cica.es Valencia: José M. Mazón : mazon@mac.uv.es Valladolid: Begoña Cano : becano@mac.cie.uva.es Vigo: José Durany : durany@dma.uvigo.es Zaragoza: Francisco Javier Sayas : jsayas@posta.unizar.es

APPLIED MATHEMATICS AT SINTEF

MICHAEL S. FLOATER
SINTEF, P.O. BOX 124 BLINDERN
0314 OSLO, NORWAY

e-mail: Michael.Floater@si.sintef.no

Since September 1995 I have been on leave from the Norwegian research institute SINTEF in order to collaborate with the Applied Mathematics Department of Zaragoza University in a European Union project concerning data fitting and smoothing.

SINTEF is the largest independent research institute in Scandinavia, covering many areas of science and technology. It has in total approximately 2200 employees of whom 1800 are located in Trondheim and 400 in Oslo. SINTEF has undergone considerable restructuring recently. At present it consists of nine smaller institutes, one of which is Applied Mathematics. The Applied Mathematics Institute covers both mathematics and computer science and has grown mainly from the Applied Mathematics Department of the former SI (Centre for Industrial Research), founded in 1950, which was based in Oslo. I would like to give a brief outline of the history behind the Applied Mathematics Institute and some of the mathematical projects it is involved with.

The history of the mathematics group at SI goes back to the sixties when the first CAD/CAM (Computer-Aided Design / Computer-Aided Manufacturing) systems were developed. At that time SI was engaged in developing CAD software especially for the ship building industry. In the seventies and eighties the group continued its work in CAD and central to this was the development of a library of software tools for creating, interrogating, and manipulating spline curves and surfaces. Since the 1990's the group has diversified into several other areas of mathematics which are important for science and technology. Among these are differential equations, scattered data approximation, scientific visualization, and image analysis.

The main areas of current project work involving mathematical research can be conveniently classified according to the principal software modules which have been developed. These are as follows.

SISL The SI Spline Library is a module for construction, manipulation and representation of complex geometry based on the B-spline representation of curves and surfaces. This module has been continuously developed since 1978 and today is used by many customers both nationally and internationally.

SISCAT is a software module of numerical methods used for constructing surfaces from scattered data. It can be used in a variety of applications, particularly where automatic measuring equipment is used to collect the data, for example in reverse engineering. It has been used by several Norwegian oil companies for modelling oil reservoirs.

DIFFPACK is a tool for simulating both natural and man-made processes. The mathematical basis for DIFFPACK is the numerical solution of partial differential equations. Since DIFFPACK can be integrated with SISL, it can treat processes defined over complicated geometries.

SIV is an advanced tool for the visualization of geometric objects and mathematical quantities defined over geometric objects. SIV is a central tool for visualizing the mathematical output generated by the other modules.

SICOMP is a module for compression, analysis, and representation of data. SICOMP supports the other modules with effective storage and representation of data. It has several independent applications, notably the compression of image data.

During the 1990's Applied Mathematics has grown in size and flourished. It is at present a stimulating environment to work in. It lies at the crossroads between research and industry, and between mathematics, computer science, and engineering. I think there are two important factors which have led to its success.

One is the long and close collaboration with the Computer Science Department at the University of Oslo which has a long tradition of mathematical research in splines, approximation theory and computer-aided geometric design.

This cooperation was manifested recently in a jointly organized international conference on curves and surfaces [1].

The second is the active involvement in joint projects with other research institutes, universities, and companies. In the eighties, SI was a member of several industrial consortiums working together in EU Information Technology (ESPRIT) projects. For example, the project CADEX was fundamental in the development of IGES, an industrial standard for exchange of CAD data. More recently, in 1994, funds were obtained from the EU for two post-doctoral researchers to visit SINTEF in a project aimed at scattered data fitting.

In the last few years, Applied Mathematics at SINTEF has gained an international reputation for its long-term success in simultaneously applying and developing mathematics for use in industry.

- [1] *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, M. Dæhlen, T. Lyche & L. L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville (1995).



MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS PARA FLUJOS DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES¹

TOMÁS CHACÓN REBOLLO

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

C/ TARFIA, S/N. 41080 SEVILLA

e-mail: chacon@numer.us.es

1 Introducción

En este trabajo abordaremos ciertos aspectos del desarrollo de técnicas eficientes de simulación numérica de flujos de fluidos incompresibles mediante el Método de los Elementos Finitos. También nos ocuparemos del análisis numérico de las mismas.

El estudio teórico de las ecuaciones relevantes que gobiernan los flujos de fluidos incompresibles, esencialmente las de Stokes y Navier-Stokes, fue realizado y completado en los años 60 y primeros 70. Como es bien conocido, se han demostrado resultados de existencia para las Ecuaciones de Navier-Stokes en dos y tres dimensiones de espacio. Sin embargo, únicamente se conocen resultados de unicidad en dos dimensiones, debido a la falta de regularidad de la solución en el caso tridimensional. Sirvan como referencia los trabajos, hoy clásicos, de Lions (1969) y Temam (1977).

La resolución numérica de flujos de fluidos incompresibles presenta dos restricciones de estabilidad de relevancia, bien conocidas por la comunidad de investigadores y usuarios en Mecánica de Fluidos computacional. Por una parte, la condición de incompresibilidad impone condiciones de compatibilidad bastante estrictas entre los espacios de discretización de velocidad y presión empleados.

¹Investigación financiada parcialmente por los proyectos HCM ERBCHB ICT 94.1823 de la Unión Europea, y PB93-1196 de la DGICYT

Por otra, el carácter fuertemente convectivo de la mayoría de los flujos de interés práctico produce la aparición de fenómenos de capa límite, zonas cerca de las paredes sólidas en que la velocidad presenta muy fuertes gradientes. La simulación de tales flujos mediante el uso directo del método de discretización Galerkin - Elementos Finitos produce en general soluciones numéricas presentando fuertes oscilaciones en las zonas de capa límite. Tales oscilaciones desaparecen únicamente si la talla de la malla es suficientemente pequeña. Ello origina discretizaciones con gran número de grados de libertad, resultando inabordable con los medios actuales en muchos casos de interés. Y ello, incluso si los espacios de discretización de velocidad y presión son compatibles.

La primera técnica general para el tratamiento numérico de la condición de incompresibilidad fue introducida en Babuška (1973) y Brezzi (1974), para resolver la ecuación de Stokes. Se trata de introducir espacios de discretización diferentes para velocidad y presión, de forma que satisfagan una condición de compatibilidad específica, conocida como de Brezzi-Babuška. Posteriormente, hubo ciertos esfuerzos tendentes a la utilización de bases del espacio de velocidades con divergencia nula, con objeto de eliminar la presión (Cf. Griffiths (1979), Hecht (1981)). Sin embargo, la construcción de tales bases resulta una tarea ardua, y los sistemas lineales resultantes están relativamente mal condicionados. Por ello, esta técnica es poco utilizada.

Algo más recientemente, se introdujo en Brooks y Hughes (1982) el método SUPG (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin). Se trata de una modificación del método estándar de Galerkin, en que las funciones test se añaden términos constantes por elemento, consiguiendo estabilizar no sólo la discretización de la presión, sino también el operador de convección "corriente arriba". Este método puede también ser visto como una técnica de Lagrangiano aumentado, consistente en "aumentar" la formulación Galerkin estándar con un término que trata de minimizar una norma del residuo. Adaptaciones de tal formulación fueron utilizada en Hughes et al. (1986), Douglas y Wang (1989), Franca y Frey (1992) y otros para construir técnicas estables, utilizando virtualmente cualquier par de espacios de Elementos Finitos para velocidad y presión. Al mismo tiempo, cuando se aplican a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, estas técnicas incorporan la difusión corriente arriba del método SUPG, con lo que consiguen estabilizar también el cálculo de flujos con convección dominante. Curiosamente, algunos estudios recientes muestran que existe una relación muy estrecha entre los métodos de estabilización y algunos de los métodos clásicos arriba mencionados -hasta el punto de ser equivalentes en ciertos casos.

En este trabajo nos ocuparemos de la descripción y el análisis numérico de los métodos de estabilización más utilizados. También de la relación entre éstos y la utilización de pares de espacios que satisfagan la condición de Brezzi-Babuška. En la Sección 2 repasaremos la teoría clásica sobre aproximación de las ecuaciones de Stokes mediante el M.E.F.. La Sección 3 estará dedicada al análisis de algunos métodos de estabilización, aplicados a las ecuaciones de Stokes. En la Sección 4 estudiaremos la equivalencia entre el método SUPG y un método clásico usando funciones "burbuja". Por último, en la Sección 5 veremos cómo esta formulación puede ser utilizada para realizar el análisis numérico del método SUPG en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Como referencias generales sobre métodos clásicos, citemos los libros de Temam (1977), Girault - Raviart (1986) y Brezzi y Fortin (1991). Existen pocas referencias generales sobre métodos de estabilización. Citemos, por ejemplo, el artículo de Franca, Hughes y Stenberg (1993), en que puede encontrarse un enfoque bastante general y abundantes referencias.

2 Teoría clásica de aproximación de las ecuaciones de Stokes por el M. E. F.

En esta Sección haremos un breve repaso sobre la teoría referente a existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Stokes, así como sobre su aproximación mediante el M.E.F. En particular, recordaremos el papel de la condición inf - sup discreta en la convergencia de estas aproximaciones.

Consideremos un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ o 3), con frontera Γ . Nos damos un campo de velocidades "vector" $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, que supondremos con divergencia nula. Nuestro propósito es resolver numéricamente el siguiente problema de contorno para las ecuaciones de Stokes estacionarias, incluyendo un término convectivo :

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Obtener } \mathbf{y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, & p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \text{tales que} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{f}, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{en } \Omega, \\ & \mathbf{y} = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{array} \right\} \quad (1)$$

Aquí, $\nu > 0$ es el coeficiente de viscosidad cinemática, y $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^d$ es un término fuente dado. Consideraremos el problema estacionario con condiciones de Dirichlet homogéneas, con objeto de no introducir dificultades no esenciales en nuestro desarrollo.

Estas ecuaciones constituyen una linealización de las ecuaciones de Navier-

Stokes, que gobiernan a los flujos de fluidos incompresibles en general :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Obtener } \mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^d, \quad p : \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{tales que} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2)$$

Analizaremos la aproximación de estas ecuaciones en la Sección 5.

Definamos la forma bilineal sobre $[H_0^1(\Omega)]^d \times [H_0^1(\Omega)]^d$,

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^d, \quad (3)$$

donde denotamos por $(\cdot, \cdot)$ el producto escalar L^2 , para funciones sea escalares, vectoriales o tensoriales. Supondremos que $\mathbf{u} \in [L^p(\Omega)]^d$ con $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Entonces $a(\cdot, \cdot)$ está bien definida, es continua y $[H_0^1(\Omega)]^d$ -coercitiva; o sea, verifica

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq C |\mathbf{v}|_1 |\mathbf{w}|_1, \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \nu |\mathbf{v}|_1^2 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^d \quad (4)$$

Aquí, C es una constante positiva, y $|\cdot|_1$ denota la seminorma sobre $[H^1(\Omega)]^d$,

$$|\mathbf{v}|_1 = \left[\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Podemos dar al problema (1) una formulación variacional mixta (esto es, incluyendo la presión además de la velocidad), como sigue :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Obtener } (\mathbf{y}, p) \in Y \times M \text{ tal que} \\ B(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in Y \times M; \end{array} \right\} \quad (6)$$

donde

$$Y = [H_0^1(\Omega)]^d, \quad M = L^2(\Omega),$$

y B es la forma bilineal sobre el espacio producto $(Y \times M) \times (Y \times M)$ definida por

$$B(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) = a(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b(\mathbf{u}, q). \quad (7)$$

A su vez, $b(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal sobre $Y \times M$ dada por $b(\mathbf{v}, q) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)$. Por último, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa la dualidad $Y' - Y$.

La existencia y unicidad de soluciones del problema es consecuencia del siguiente resultado general, que enunciamos con evidente abuso de notación: Consideremos dos espacios de Hilbert Y y M . Sea $b(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal continua sobre $Y \times M$, y definamos los operadores $R : Y \rightarrow M'$, y su adjunto $R^* : M \rightarrow Y'$ por

$$\langle R\mathbf{v}, q \rangle = \langle R^*q, \mathbf{v} \rangle = b(\mathbf{v}, q), \quad \forall \mathbf{v} \in Y, \forall q \in M. \quad (8)$$

Sea además $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal continua sobre $Y \times Y$, que supondremos coercitiva. Se tiene entonces

Teorema 2.1 *Si $Im R$ es cerrado, entonces el problema (6) posee una solución. Además, esta solución es única sobre $Y \times \tilde{M}$, donde $\tilde{M}$ es el espacio cociente $M/Ker R^*$.*

La prueba de este teorema está basada esencialmente en el Teorema del Rango Cerrado de Banach (Ver Girault - Raviart (1986)). Notemos que en el caso de las ecuaciones de Stokes generalizadas (1), $Ker R^*$ está formado por las funciones constantes, de modo que

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \int_{\Omega} q \, dx = 0\}.$$

A su vez, $Im R$ es cerrado, como consecuencia del resultado que enunciamos a continuación :

Teorema 2.2 *Las siguientes proposiciones son equivalentes :*

- i) $Im R$ es cerrado en M' .
- ii) El par de espacios (Y, M) satisface la condición inf - sup continua : Existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{q \in \tilde{M}} \sup_{v \in Y} \frac{b(v, q)}{\|v\|_Y \|q\|_M} \geq \beta. \quad (9)$$

- iii) La forma bilineal B definida por (7) sobre $Y \times M$ satisface la siguiente condición inf - sup : Existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$\inf_{(u, r) \in Y \times \tilde{M}} \sup_{(v, q) \in Y \times \tilde{M}} \frac{B(u, r; v, q)}{\|(u, r)\|_{Y \times M} \|(v, q)\|_{Y \times M}} > \gamma. \quad (10)$$

La condición inf-sup (9) es satisfecha por el par de espacios $([H_0^1(\Omega)]^d, L^2(\Omega))$, como es bien conocido (Ver Girault y Raviart (1986)). Por otra parte, la condición (10) asegura la coercitividad de la forma B sobre el espacio producto $Y \times \tilde{M}$. Esta forma B esta ligada a la formulación como punto de silla del problema de Stokes: Si la forma a es simétrica, la solución (u, p) es también la solución del problema de optimización

$$\inf_{v \in V} \sup_{q \in M} \{J(v, q)\}, \quad J(v, q) = a(v, v) + b(v, q) - \langle f, v \rangle \quad (11)$$

Las ecuaciones (6) son justamente las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a este problema de punto silla.

La aproximación clásica del problema (6) por el método de Galerkin se realiza como sigue : Sean Y_h , M_h dos subespacios de dimensión finita de Y y M , respectivamente. Estaremos interesados en los casos en que ambos son espacios de Elementos Finitos. El parámetro h representará el mayor diámetro de los elementos de la malla. Buscamos un par $(y_h, p_h) \in Y_h \times M_h$ tal que

$$\left. \begin{aligned} &\text{Obtener } (y_h, p_h) \in Y_h \times M_h \text{ tal que} \\ &B(y_h, p_h; v_h, q_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall (v_h, q_h) \in Y_h \times M_h; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Sea R_h el operador de Y_h a valores sobre M_h definido por (8). R_h es un operador de rango cerrado, al ser lineal entre espacios de dimensión finita. Según el Teorema 2.2, este problema tiene solución única sobre el espacio cociente $\tilde{M}_h = M_h / \text{Ker } R_h^*$. Sin embargo, de (12) se deduce fácilmente que debe tenerse $y_h \in \text{Ker } R_h$. Esta condición puede ser excesivamente restrictiva si el espacio Y_h no es suficientemente "rico" en grados de libertad respecto al espacio M_h . En Pironneau (1991) se muestran varios ejemplos en que $\text{Ker } R_h$ se reduce al cero. Es claro, pues, que los espacios Y_h y M_h deben ser compatibles de alguna forma para poder garantizar la convergencia de la discretización. Una condición suficiente para ello es la llamada "inf - sup" discreta, o de Brezzi - Babuška :

Lema 2.1 *Supongamos que las constantes $\beta_h > 0$ definidas por*

$$\beta_h = \inf_{q_h \in \tilde{M}_h} \sup_{v_h \in Y_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_Y \|q_h\|_M} \quad (13)$$

están acotadas inferiormente por una constante β' independiente de h . Entonces, existe una constante $C > 0$ dependiendo de β' , $\|a\|_Y \|b\|_M$ tal que

$$\|y - y_h\|_Y + \|p - p_h\|_{\tilde{M}_h} \leq C \left\{ \inf_{v_h \in Y_h} \|y - v_h\| + \inf_{q_h \in \tilde{M}_h} \|p - q_h\|_M \right\}; \quad (14)$$

donde $\|q_h\|_{\tilde{M}_h} = \inf_{r_h \in \text{Ker } R_h^*} \|q_h + r_h\|_M$.

De este modo, el error en la aproximación considerada vendrá dado por el error de interpolación sobre los espacios Y_h y M_h .

La condición inf - sup (13) puede interpretarse en el sentido de que el operador R_h admite una prolongación a todo Y , uniformemente continua en h . Para significar su importancia, escribiremos el problema (6) en forma matricial. Sean N_v y N_p las dimensiones de Y_h y $\tilde{M}_h$, respectivamente (Observemos que en el caso de las ecuaciones de Stokes, $\tilde{M}_h = M_h \cap L_0^2(\Omega)$). Denotemos por $\{\phi_i | i = 1, \dots, N_v\}$ y $\{\psi_j | j = 1, \dots, N_p\}$ una base de Y_h y otra de M_h , resp.

Definamos las matrices A y R de dimensiones $N_v \times N_v$ y $N_p \times N_v$, resp., y el vector columna $\vec{f}$ de dimensión N_v , por

$$A_{il} = a(\phi_l, \phi_i), \quad R_{ij} = b(\phi_i, \psi_j), \quad \vec{f}_i = \langle \vec{f}, \phi_i \rangle. \quad (15)$$

Supongamos que buscamos y_h y p_h en la forma $y_h = \sum_{i=1}^{N_v} y_i \phi_i$, $p_h = \sum_{j=1}^{N_p} p_j \psi_j$.

Entonces, el problema (6) equivale al sistema lineal

$$A\vec{y} + R^t\vec{p} = \vec{f}, \quad R\vec{y} = 0; \quad (16)$$

donde $\vec{y}$ y $\vec{p}$ son los vectores de componentes y_i y p_j .

Puesto que la forma a es coercitiva, la matriz A es definida positiva. Por ello, la primera ecuación en (16) puede ser resuelta en $\vec{y}$, de modo que (12) equivale al sistema lineal $RA^{-1}R^t\vec{p} = A^{-1}\vec{f}$. El número de condición de la matriz que aparece en este problema resulta ser

$$\text{Cond}(RA^{-1}R^t) = \frac{\|b\|}{\beta_h}.$$

De este modo, la condición inf - sup discreta garantiza no solamente que este problema admite una única solución sobre $\tilde{M}_h$, sino que además el número de condición de la matriz está uniformemente acotado en h .

La obtención de pares de espacios que satisfagan la condición inf - sup discreta ha sido objeto de estudio de bastantes investigadores desde 1975. Esta labor ha permitido descubrir una amplia gama de pares satisfaciendo esta condición. En el caso de presiones continuas, el elemento más "económico" (en el sentido de que el espacio de velocidades resulta de añadir un mínimo de grados de libertad al espacio de presiones) es el P_1 -Burbuja - P_1 , también llamado mini-elemento. Con objeto de recordar la definición de este elemento, denotemos por $\mathcal{T}_h$ a una triangulación de Ω . Suponemos que $\mathcal{T}_h$ está formado por triángulos si $d = 2$ y por tetraedros si $d = 3$. Denotemos por $\lambda_1^{(K)}, \dots, \lambda_{d+1}^{(K)}$ las coordenadas baricéntricas de un elemento $K \in \mathcal{T}_h$. Denotemos por $\hat{b}_K$ el polinomio de grado $d + 1$ dado por $\hat{b}_K = \lambda_1^{(K)} \cdot \lambda_2^{(K)} \cdot \dots \cdot \lambda_{d+1}^{(K)}$. Notemos que $\hat{b}_K \in [H_0^1(K)]^d$. Suponemos $\hat{b}_K$ extendido por cero fuera de K . Consideraremos el siguiente espacio de elementos finitos "burbuja" sobre $\mathcal{T}_h$:

$$B_h(\Omega) = \left\{ \hat{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \hat{v}|_K \in \text{Span}\{\hat{b}_K\}, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Definamos por otra parte

$$\left. \begin{aligned} V_h(m) &= \{r \in L^2(\bar{\Omega}) \text{ tal que } r|_K \in P_m, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ Y_h(m) &= [V_h(m)]^d \cap [H_0^1(\Omega)]^d, \quad M_h(m) = V_h(m). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Aquí, P_m denota el espacio de polinomios sobre R^d de grado menor o igual que m . Entonces, el Mini-elemento es $(Y_h(1) \oplus [B_h(\Omega)]^d, M_h(1))$.

Si se pretende trabajar con presiones discontinuas, el espacio de velocidad debe ser más rico en grados de libertad. En este caso, el par de espacios más económico conocido que satisface la condición inf-sup es $(Y_h(d), M_h(0) \cap C^0(\bar{\Omega}))$.

3 Métodos de Estabilización

Según lo dicho en la Sección anterior, la clave para conseguir estabilizar Elementos Finitos "incompresibles" es debilitar la condición de divergencia nula. Ello es realizado en los métodos clásicos enriqueciendo el espacio de velocidades en grados de libertad frente al espacio de presiones. Otra forma de lograrlo es relajar explícitamente la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, cambiándola en $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = g_h$, siendo g_h una función "pequeña" conveniente. Un método de este tipo fue introducido en Brezzi y Pitkäranta (1984), donde se considera la condición relajada $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = \alpha h^2 \Delta p_h$. Con ello se consigue cierto control sobre el gradiente de presión (y no sólo sobre la presión), impidiéndose la aparición de modos de presión espúreos. Como contrapartida, al tratarse de un método de penalización, un error de consistencia (de orden h para la norma L^2 de la presión) es inevitable. Esta dificultad es salvada por los métodos de estabilización, basados esencialmente en formulaciones de tipo Lagrangiano aumentado. Cuando la forma $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, toda solución del problema de punto silla (11) lo es también de

$$\inf_{\mathbf{v} \in V} \sup_{q \in M} \{J(\mathbf{v}, q) - \alpha \|\mathcal{A}\mathbf{v} + \nabla q - \mathbf{f}\|_{-1}\}, \quad (18)$$

donde $\mathcal{A}\mathbf{v} = -\nu \Delta \mathbf{v}$ y α es un coeficiente a determinar. En Hughes, Franca y Balestra (1986) se propone discretizar este último problema reemplazando la norma H^{-1} del operador por una aproximación:

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in Y_h} \sup_{q_h \in M_h} \left\{ J(\mathbf{v}_h, q_h) - \alpha \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\mathcal{A}\mathbf{v}_h + \nabla q_h - \mathbf{f}\|_{0,K}^2 \right\}. \quad (19)$$

Se trata del conocido método "Galerkin - Least Squares". El coeficiente h_K^2 actúa como un factor de escala que relaciona la norma L^2 con la norma H^{-1} , elemento a elemento. Las ecuaciones de Euler - Lagrange asociadas a (19) son

$$\left. \begin{aligned} &\text{Obtener } (\mathbf{y}_h, p_h) \in Y_h \times M_h \text{ tal que} \\ &B_{GLS}(\mathbf{y}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = F_{GLS}(\mathbf{v}_h, q_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in Y_h \times M_h; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

siendo

$$B_{GLS}(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) = B(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) - \alpha \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathcal{A}\mathbf{y} + \nabla p, \mathcal{A}^*\mathbf{v} + \nabla q)_K;$$

$$F_{GLS}(\mathbf{v}, q) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \alpha \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{f}, \mathcal{A}^*\mathbf{v} + \nabla q)_K.$$

Aquí, $\mathcal{A}^*$ es el operador adjunto de $\mathcal{A}$. Cuando el operador no es simétrico (caso $\mathbf{u} \neq 0$), el método GLS es también (20), con $\mathcal{A}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v}$, (y $\mathcal{A}^*\mathbf{v} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v}$). Sin embargo, ahora la solución $(\mathbf{u}, p)$ no es punto de silla de ningún funcional.

En el caso de elementos finitos afines a trozos, el método GLS se conoce como "Streamline - Upwind / Petrov - Galerkin" o, abreviadamente, SUPG. De hecho, este método fue desarrollado en primer lugar en Brooks y Hughes (1982), y dio lugar posteriormente a los métodos GLS. Observemos que en el método SUPG se tiene $\Delta \mathbf{v}_h = 0$ sobre cada elemento K , con la consiguiente simplificación de la estructura de B_{GLS} y F_{GLS} .

Una interesante propiedad del método GLS es que es consistente, en el sentido de que la solución exacta verifica el problema discreto (20), al igual que el método de Galerkin. Sin embargo, es estable únicamente para valores del parámetro α pequeños, por debajo de un valor crítico específico para cada Elemento Finito concreto, y que resulta difícil de calcular.

Desde el punto de vista computacional, el método GLS presenta la ventaja de proporcionar un sistema lineal con matriz simétrica si el operador $\mathcal{A}$ lo es. En efecto, supongamos $\mathbf{u} = 0$. Definamos las matrices $\tilde{A}$, $\tilde{R}$, $\tilde{C}$ de dimensiones $N_v \times N_v$, $N_p \times N_v$ y $N_p \times N_p$, respectivamente, así como los vectores columna $\tilde{\mathbf{f}}_1$ y $\tilde{\mathbf{f}}_2$, de dimensiones N_v y N_p , respectivamente, por

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{il} &= \nu (\nabla \phi_l, \nabla \phi_i) + \alpha \nu^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\Delta \phi_l, \Delta \phi_i)_K, \\ \tilde{R}_{ij} &= -(\nabla \cdot \phi_i, \psi_j) - \alpha \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla \psi_j, \Delta \phi_i)_K, \\ \tilde{C}_{kj} &= -\alpha \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla \psi_j, \nabla \psi_k)_K, \\ \tilde{\mathbf{f}}_{1i} &= \langle \mathbf{f}, \phi_i \rangle - \alpha \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{f}, \Delta \phi_i)_K, \quad \tilde{\mathbf{f}}_{2k} = -\alpha \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{f}, \nabla \psi_k)_K. \end{aligned}$$

Entonces, el problema (20) es equivalente al sistema lineal

$$\tilde{A} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{R} \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{f}}_1, \quad \tilde{R}^t \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{C} \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{f}}_2. \quad (21)$$

Se trata de un sistema que puede ser entendido como una perturbación "estabilizante" del sistema (15). De hecho, la matriz $\tilde{C}$ es definida negativa, lo que permite obtener $\tilde{\mathbf{p}}$ en términos de $\tilde{\mathbf{y}}$:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{C}^{-1}(\tilde{\mathbf{f}}_2 - \tilde{R}\tilde{\mathbf{y}}), \quad (\tilde{A} - \tilde{R}\tilde{C}^{-1}\tilde{R}^t)\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{f}}_1 - \tilde{R}\tilde{C}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}_2.$$

La matriz $\tilde{A}$ es definida positiva si el parámetro α es positivo y suficientemente pequeño, como consecuencia de la estabilidad del método GLS. Entonces, $\tilde{\mathbf{y}}$ resulta ser solución de un sistema lineal con matriz simétrica definida positiva. En la práctica, no se puede obtener $\tilde{\mathbf{p}}$ de forma explícita en términos de $\tilde{\mathbf{y}}$, de modo que es necesario resolver directamente el sistema (21) por algún método iterativo apropiado.

Es interesante observar que la segunda ecuación en (21) puede ser reinterpretada como la discretización de una ecuación elíptica para p . En particular, supongamos que los elementos de M_h son funciones continuas a las que no se impone ninguna condición esencial sobre $\partial\Omega$. Supongamos también que la malla es regular, de modo que $h_K = h$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$. Entonces, tal ecuación es

$$\begin{aligned} -\alpha h^2 \Delta p &= -\nabla \cdot \mathbf{y} + \alpha h^2 \nabla \cdot (\nu \Delta \mathbf{y} - \mathbf{f}) \text{ en } \Omega; \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= (\mathbf{f} - \nu \Delta \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De este modo, estamos estabilizando efectivamente el cálculo de la presión, a cambio de incluir una condición de contorno artificial sobre la misma.

La restricción de estabilidad que presenta el método GLS fue salvada en Douglas y Wang (1989). Aquí se propone un método proveniente de (20) con una diferente estructura de la función test:

$$\begin{aligned} B_{DW}(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) &= B(\mathbf{y}, p; \mathbf{v}, q) - \\ &\quad - \alpha \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla p, -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla q)_K; \\ F_{DW}(\mathbf{v}, q) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \alpha \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{f}, -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{y} + \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla q)_K. \end{aligned}$$

Observemos que si usamos elementos finitos afines a trozos, el método Douglas - Wang coincide con el SUPG. Este método es estable para cualquier valor de α , para Elementos Finitos muy generales. Como contrapartida, la matriz del sistema lineal asociado no es simétrica, incluso si el operador lo es. Esto no supone un gran problema, ya que en los casos de interés, $\mathbf{u} \neq 0$, de forma que el operador $\mathcal{A}$ no es simétrico.

Las propiedades de estabilidad mencionadas, junto con las estimaciones de error, se formalizan como sigue. Consideraremos Elementos Finitos triangulares, por brevedad :

Teorema 3.1 Sean $Y_h = Y_h(m)$, con $m \geq 1$, definido según (17). Supongamos además que, o bien $M_h = M_h(l)$ y $m \geq d$ (caso de presiones discontinuas), o bien $M_h = M_h(l) \cap C^0(\bar{\Omega})$, con $l \geq 1$. Entonces el método GLS para $0 < \alpha < \alpha_0$ y el método de Douglas - Wang para todo $\alpha > 0$ verifican :

i) Son estables, en el sentido de que existe una constante $\gamma^* > 0$ tal que

$$\inf_{(\mathbf{y}_h, r_h) \in Y_h \times \tilde{M}_h} \sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in Y \times \tilde{M}_h} \frac{B^*(\mathbf{y}_h, r_h; \mathbf{v}_h, q_h)}{\|(\mathbf{y}_h, r_h)\|_{Y \times M} \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|_{Y \times M}} > \gamma^*, \quad (22)$$

donde B^* denota, bien B_{GLS} , bien B_{DW} .

ii) Si $\mathbf{y} \in [H^{m+1}(\Omega)]^d$ y $p \in H^{l+1}(\Omega)$, se satisfacen las siguientes estimaciones de error :

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C (h^k |\mathbf{y}|_{m+1} + h^{l+1} |p|_{l+1}), \quad (23)$$

donde C es una constante positiva.

Observemos que las anteriores estimaciones de error son optimales para los espacios de Elementos Finitos considerados. Desde el punto de vista técnico, éstas se obtienen con facilidad como consecuencia de la estabilidad (22) y la consistencia antes mencionada (y, lógicamente, las estimaciones de error de interpolación sobre los espacios Y_h y M_h).

4 Relación con métodos clásicos

Bajo ciertas condiciones, los métodos de estabilización descritos en la Sección anterior son equivalentes a determinados métodos clásicos. En concreto, a métodos que enriquecen el espacio de velocidades mediante funciones burbuja. Describiremos en esta Sección cómo el método SUPG es equivalente a la formulación clásica con el Mini-Elemento.

Recordemos que en el caso del Mini-Elemento, $Y_h = Y_h(1) \oplus [B_h(\Omega)]^d$, $M_h = M_h(1)$. Descompongamos -de forma única- una función $\tilde{\mathbf{v}}_h \in Y_h$ como $\tilde{\mathbf{v}}_h = \mathbf{v}_h + \hat{\mathbf{v}}_h$, con $\mathbf{v}_h \in Y_h(1)$, $\hat{\mathbf{v}}_h \in [B_h(\Omega)]^d$. Observemos que $\hat{\mathbf{v}}_h = \sum_{K \in \mathcal{T}} \hat{\mathbf{v}}_{h,K}$, con $\hat{\mathbf{v}}_{h,K} \in [B_h(K)]^d$ (prolongada por cero a $\bar{\Omega} - K$). De (12) tenemos $\forall \hat{\mathbf{v}}_h \in [B_h(\Omega)]^d$, $\forall q_h \in M_h$,

$$a(\mathbf{y}_h + \hat{\mathbf{y}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) + b(\hat{\mathbf{v}}_h, p_h) + b(\tilde{\mathbf{y}}_h, q_h) = \langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}}_h \rangle. \quad (24)$$

De aquí, tomando $q_h = 0$,

$$\begin{aligned} a(\hat{y}_h, \hat{v}_h) &= -a(y_h, \hat{v}_h) - b(\hat{v}_h, p_h) + \langle f, \hat{v}_h \rangle = \\ &= \langle f - \mathcal{A}y_h - \nabla p_h, \hat{v}_h \rangle. \end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{R}_h$ al operador "de Riesz discreto" definido sobre $[H^{-1}(\Omega)]^d$ con valores en $[B_h(\Omega)]^d$ dado por

$$a(\mathcal{R}_h \phi, \hat{v}_h) = \langle \phi, \hat{v}_h \rangle, \quad \forall \hat{v}_h \in [B_h(\Omega)]^d, \quad \forall \phi \in [H^{-1}(\Omega)]^d. \quad (25)$$

Entonces, $\hat{y}_h = \mathcal{R}_h(f - \mathcal{A}y_h - \nabla p_h)$. Por otra parte, de (12) tenemos igualmente $\forall v_h \in Y_h(1), \forall q_h \in M_h$,

$$a(y_h, v_h) + b(v_h, p_h) + b(y_h, q_h) = \langle f, v_h \rangle - a(\hat{y}_h, v_h) - b(\hat{y}_h, q_h),$$

Observemos ahora que

$$a(\hat{y}_h, v_h) + b(\hat{y}_h, q_h) = \langle \mathcal{A}^* v_h + \nabla q_h, \hat{y}_h \rangle.$$

De estas dos últimas identidades deducimos que y_h satisface el problema

$$B'_{GLS}(y_h, p_h; v_h, q_h) = F'_{GLS}(f; v_h, q_h), \quad \forall (v_h, q_h) \in Y_h(1) \times M_h, \quad (26)$$

siendo

$$\begin{aligned} B'_{GLS}(y, p; v, q) &= B(y, p; v, q) - \\ &\quad - a(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}^* v + \nabla q), \mathcal{R}_h(\mathcal{A}y + \nabla p)); \\ F'_{GLS}(v, q) &= \langle f, v \rangle - a(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}^* v + \nabla q), \mathcal{R}_h(f)). \end{aligned}$$

El problema (25) satisfecho por $\mathcal{R}_h \phi$ puede ser reducido a la resolución de un problema semejante sobre cada elemento K . En efecto, $\mathcal{R}_h \phi$ se puede descomponer como

$$\mathcal{R}_h \phi = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{R}_{h,K} \phi, \quad \text{con } \mathcal{R}_{h,K} \phi \in [B_h(K)]^d,$$

siendo $\mathcal{R}_{h,K} \phi$ solución del problema elemental

$$a(\mathcal{R}_{h,K} \phi, \hat{v}_{h,K}) = \langle \phi, \hat{v}_{h,K} \rangle, \quad \forall \hat{v}_{h,K} \in [B_h(K)]^d.$$

Conocida una base α -ortonormal de $[B_h(K)]^d$ (espacio de dimensión d), se puede obtener $\mathcal{R}_{h,K} \phi$ a mano. Este cálculo es la llamada "condensación estática de la burbuja" en la literatura referente a métodos de estabilización. Resulta notablemente simplificado en el caso de elementos finitos triangulares afines, si la

forma $a(\cdot, \cdot)$ es reemplazada en (25) por ciertas formas $a_h(\cdot, \cdot)$ simétricas. En concreto, ello ocurre para formas con la estructura

$$a_h(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{v}}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C_{K,h} (\nabla \hat{\mathbf{w}}, \nabla \hat{\mathbf{v}}); \quad (27)$$

donde los $C_{K,h}$ son coeficientes uniformemente acotados (en K y h) superior e inferiormente por constantes positivas (Cf. Chacón (1996)). Esto permite explicitar los términos estabilizadores en (26), como sigue,

$$\begin{aligned} a_h(\mathcal{R}_h(\mathcal{A}^* \mathbf{v}_h + \nabla q_h), \mathcal{R}_h(\mathcal{A} \mathbf{y}_h + \nabla p_h - \mathbf{f})) = \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_{h,K} (\mathcal{A}^* \mathbf{v}_h + \nabla q_h, \mathcal{A} \mathbf{y}_h + \nabla p_h - \mathbf{f})_K; \end{aligned}$$

con

$$\tau_{h,K} = \frac{c_d^2}{C_{h,K}} \frac{|K|}{|\hat{b}_K|_1^2}, \quad \text{donde} \quad c_d = \frac{1}{|K|} \int_K \hat{b}_K dx = \begin{cases} 1/60 & \text{si } d=2, \\ 1/1680 & \text{si } d=3. \end{cases}$$

Mediante argumentos de cambio de escala se demuestra que el coeficiente $\tau_{h,K}$ es de orden h_K^2 . Sin embargo, se puede recuperar exactamente $\tau_{h,K} = h_K^2$ (método (20)) si los coeficientes $C_{K,h}$ se eligen convenientemente. Observemos que, una vez calculados los coeficientes $\tau_{h,K}$ (que únicamente dependen de la triangulación y de los $C_{h,K}$), la parte "burbuja" de la formulación (12) ha desaparecido en la formulación (26).

De este modo, el espacio de burbujas $[B_h(\Omega)]^d$ juega el papel de un espacio test en que la norma H^{-1} del residuo $\mathcal{A} \mathbf{y}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}$ es minimizada. Ello permite estabilizar tanto el operador de convección como el gradiente de presión.

La estabilidad del método SUPG, ahora formulado por (26), está basada sobre el hecho de que el mini-elemento verifica la condición inf-sup discreta. En efecto, supongamos que $\mathbf{u} = 0$, por abreviar sin eliminar dificultades esenciales.

Definamos $\mathbf{c}_h = \mathcal{R}_h(\mathcal{A} \mathbf{y}_h + \nabla p_h) = \mathcal{R}_h(-\nu \Delta \mathbf{y}_h + \nabla p_h)$. Observemos la propiedad de ortogonalidad

$$(\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \hat{\mathbf{v}}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in Y_h(1), \hat{\mathbf{v}}_h \in [B_h(\Omega)]^d. \quad (28)$$

De aquí, $\mathcal{R}_h(-\nu \Delta \mathbf{y}_h) = 0$, y $\mathbf{c}_h = \mathcal{R}_h(\nabla p_h)$.

Tomando $\mathbf{v}_h = \mathbf{y}_h$, $q_h = -p_h$ en (26), se tiene de inmediato

$$a(\mathbf{y}_h, \mathbf{y}_h) + a_h(\mathbf{c}_h, \mathbf{c}_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{y}_h \rangle.$$

Por tanto,

$$|\mathbf{y}_h|_1 \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{-1}}{\nu}, \quad |\mathbf{c}_h|_1 \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{-1}}{\nu}. \quad (29)$$

Tomemos ahora $q_h = 0$ en (26). Entonces,

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, p_h) = a(\mathbf{y}_h, \mathbf{v}_h) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \leq 2 \|\mathbf{f}\|_{-1} |\mathbf{v}_h|_1, \quad \forall \mathbf{v}_h \in Y_h(1). \quad (30)$$

Por otra parte, de la definición de $\mathbf{c}_h$, se tiene

$$(\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}_h, p_h) = \langle \nabla p_h, \hat{\mathbf{v}}_h \rangle = -a_h(\mathbf{c}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{-1} |\hat{\mathbf{v}}_h|_1, \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in [B_h(\Omega)]^d; \quad (31)$$

para cierta constante C_1 positiva. Combinando estas dos últimas desigualdades,

$$(\nabla \cdot (\mathbf{v}_h + \hat{\mathbf{v}}_h), p_h) \leq 2 C_2 \|\mathbf{f}\|_{-1} (|\mathbf{v}_h|_1 + |\hat{\mathbf{v}}_h|_1) \leq 2\sqrt{2} C_2 \|\mathbf{f}\|_{-1} (|\mathbf{v}_h + \hat{\mathbf{v}}_h|_1).$$

Esta última desigualdad se debe a la propiedad de ortogonalidad (28). Usando ahora el que el mini-elemento satisface la propiedad inf-sup (Ver Lema 2.1), se deduce

$$\|p_h\|_0 \leq C_3 \|\mathbf{f}\|_{-1}. \quad (32)$$

Las estimaciones (29) y (32) formalizan la estabilidad del método. Afinando un poco el análisis anterior, se demuestra que existe una constante $\bar{\gamma} > 0$ tal que $\forall (\mathbf{z}_h, r_h) \in Y_h(1) \times \tilde{M}_h$ se verifica

$$\sup_{(\mathbf{v}, q) \in Y_h(1) \times \tilde{M}_h} \frac{B'_{SUPG}(\mathbf{z}_h, r_h; \mathbf{v}, q)}{\|(\mathbf{v}, q)\|_{Y \times M}} \geq \bar{\gamma} \left[\|(\mathbf{z}_h, r_h)\|_{Y \times M} + \frac{|\mathcal{R}_h(\mathcal{A}\mathbf{z}_h + \nabla r_h)|_1}{\|(\mathbf{z}_h, r_h)\|_{Y \times M}} \right].$$

Esta estimación implica, en particular, la estimación general de estabilidad (22). De aquí se siguen las estimaciones de error (23) con $k = 1$ y $l = 0$.

5 Ecuaciones de Navier-Stokes

La formulación (26) del método GLS resulta más coherente con la regularidad H^{-1} del operador $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{y}_h - \nu \Delta \mathbf{y}_h + \nabla p_h$ que la formulación habitual (19). En efecto, (19) requiere regularidad –al menos local– L^∞ para $\mathbf{u}$ y L^2 para $\mathbf{f}$. Sin embargo, (26) se puede extender sin dificultad al caso general $\mathbf{u} \in [L^p(\Omega)]^d$ ($p > d$), $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^d$. Ello permite extender de forma natural el método GLS a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes (2).

Consideramos la siguiente formulación variacional de las ecuaciones (2):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Obtener } (\mathbf{u}, p) \in Y \times M \text{ tal que} \\ T_{NS}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in Y \times M; \end{array} \right\} \quad (33)$$

donde

$$T_{NS}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q).$$

Aquí, $c(\cdot; \cdot, \cdot)$ es una forma trilineal sobre $Y \times Y \times Y$, definida por

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in Y. \quad (34)$$

La forma c es continua sobre Y y satisface $c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in Y$.

Según Girault y Raviart (1988), el problema (33) tiene al menos una solución. Además, esta solución es única si $\|\mathbf{f}\|_{-1}/\nu^2 < \eta$, donde $\eta > 0$ es una constante dependiente de la forma c .

Nuestra discretización de la formulación (33) es

$$\left. \begin{aligned} &\text{Obtener } (\mathbf{u}_h, p_h) \in Y_h(1) \times M_h \text{ tal que } \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in Y_h(1) \times M_h, \\ &T_{SUPG}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = \Phi_{SUPG}(\mathbf{f}; \mathbf{v}_h, q_h); \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

donde

$$\begin{aligned} T_{SUPG}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) - \\ &\quad - a_h (\mathcal{R}_h(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p), \mathcal{R}_h(-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla q)); \\ \Phi_{SUPG}(\mathbf{f}; \mathbf{v}, q) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - a_h (\mathcal{R}_h(\mathbf{f}), \mathcal{R}_h(-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla q)). \end{aligned}$$

Mediante el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, se puede garantizar que el problema (35) posee al menos una solución que verifica, para cierta constante $C > 0$,

$$\|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0 + \|c_h\|_1 \leq C \|\mathbf{f}\|_{-1}; \quad (36)$$

siendo ahora $c_h = \mathcal{R}_h(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p)$. Esta estimación permite obtener el siguiente resultado :

Teorema 5.1 *La solución $(\mathbf{u}_h, p_h)$ de (35) que verifica (36) contiene alguna subsucesión que converge débilmente en $[H_0^1(\Omega)]^d \times L^2(\Omega)$ hacia una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (33). Además, si esta solución es única, es la sucesión completa la que converge.*

La demostración hace uso como elemento innovador de una interesante propiedad de las sucesiones de funciones burbuja : Si una sucesión $\{\hat{\mathbf{v}}_h\}_{h>0}$ tal que $\hat{\mathbf{v}}_h \in [B_h(\Omega)]^d$ está acotada en $[H_0^1(\Omega)]^d$, entonces converge débilmente a cero en $[H_0^1(\Omega)]^d$. Ello, junto argumentos habituales de compacidad, permite probar que los términos estabilizadores en (35) se anulan en el límite $h \rightarrow 0$.

Por último, la formulación (35) permite obtener de forma natural estimaciones optimales de error si se dan las condiciones suficientes de unicidad de solución :

Teorema 5.2 *Supongamos que $\|f\|_{-1}/\nu < \eta$. Supongamos que $u \in [H^2(\Omega)]^d$, $p \in [H^1(\Omega)]$. Entonces existe una constante dependiente de u y p y un $h_0 > 0$ tales que si $0 < h < h_0$, entonces*

$$\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq Ch.$$

Este teorema utiliza de forma esencial dos elementos : la regularidad de u y p , y ciertas estimaciones de normas L^q , $2 \leq q \leq 6$, de funciones burbuja :

$$\|\hat{v}_h\|_{0,p} \leq Ch^\alpha |\hat{v}_h|_1, \forall \hat{v}_h \in [B_h(\Omega)]^d,$$

donde α verifica $\alpha/2 + (1 - \alpha)/6 = 1/q$.

Queda aún la labor de determinar los coeficientes de estabilización. Se trata de un problema mayor en el desarrollo de estas técnicas, que aún está por resolver plenamente. La calidad de una solución numérica concreta asociada a una malla depende fuertemente de los parámetros de estabilización que hayan sido usados. En la práctica, se definen los $\tau_{h,K}$ de modo que se tenga en cuenta la talla relativa local de los términos de convección y de difusión. $\tau_{h,K}$ es una función del número de Peclet local ,

$$Pe_K = \frac{U_K h_K}{\nu} \quad \text{con} \quad U_K = \|u\|_{0,p;K}.$$

Habitualmente, $\tau_{h,K}$ es de la forma

$$\tau_{h,K}(Pe_K) = A \frac{h_K}{U_K} \min(Pe_K, P) = \begin{cases} A \frac{h_K^2}{\nu} & \text{si } Pe_K \leq P, \\ A P \frac{h_K}{U_K} & \text{si } Pe_K > P; \end{cases} \quad (37)$$

donde A es una constante, y P es un "escalón" predeterminado para el número de Pécelet. Esto permite por una parte introducir una estabilización conveniente en zonas de grandes gradientes de velocidad debidos a convección dominante (grandes Pe_K). Por otra parte, se introducen niveles bajos de difusión numérica (de orden h_K^2) en regiones donde la difusión es dominante (bajos Pe_K).

Observemos que en la discretización (37) los coeficientes $\tau_{h,K}$ son funciones no lineales de la solución u_h . Si embargo, el análisis anterior se puede extender a este caso, y los Teoremas 5.1 y 5.2 siguen siendo válidos.

Digamos, por último, que el análisis anterior puede extenderse a elementos finitos de órdenes superiores de interpolación, o bien a métodos de tipo Douglas - Wang y otros, con ciertas adaptaciones técnicas.

En definitiva, la formulación (26) de los métodos de estabilización en términos de operadores "de condensación estática" tiene en cuenta de forma natural la regularidad H^{-1} del operador a estabilizar. Esta formulación proporciona un marco matemático para el análisis numérico de estos métodos —entendiendo como tal el análisis de estabilidad, convergencia y estimaciones de error—, completamente análogo al que se tiene en el caso de los métodos clásicos. Ello permite incluso realizar tal análisis numérico en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, mejorando el análisis realizado hasta ahora con las formulaciones habituales.

Referencias

- [1] I. BABUŠKA (1973), *The Finite Element Method with Lagrange multipliers*. Numer. Math. 20, pp. 179-192.
- [2] F. BREZZI (1974), *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange Multipliers*. R.A.I.R.O. Anal. Numer., R2, pp. 129-151.
- [3] F. BREZZI, M. FORTIN (1991), *Mixed and Hybrid Finite Elements*. Springer-Verlag.
- [4] F. BREZZI, J. PITKÄRANTA (1984), *On the stabilization of Finite Elements approximations of the Stokes problem*, Springer-Verlag, Berlín. In Efficient Solutions of Elliptic Systems, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 10 (W. Hackbush eds.), pp. 11-19.
- [5] A. N. BROOKS, T. J. R. HUGHES (1982), *Streamline/Upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows, with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 32, pp. 199-259.
- [6] T. CHACÓN REBOLLO (1996), *A term by term stabilization algorithm for Finite Element solution of incompressible flow problems*. Propuesto para publicación en Numer. Math.
- [7] J. DOUGLAS, J. WANG (1989), *An absolutely stabilized Finite Element method for the Stokes problem*, Math. Comp. 52, pp. 459-508.
- [8] L.P. FRANCA, S. L. FREY (1992), *Stabilized Finite Elements : II. The incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 99, pp. 209-233.

- [9] L.P. FRANCA, T. J. R. HUGHES, R. STENBERG (1993), *Stabilized Finite Element Methods*. In "Incompressible Computational Fluid Dynamics" (M. D. Gunzburger and R. A. Nicolaides Eds.), Cambridge Univ. Press.
- [10] V. GIRAULT, P. A. RAVIART (1986), *Finite Element Methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag.
- [11] D. GRIFFITS (1979), *The construction of approximately divergence-free finite elements*. In "Mathematics of Finite Elements and Applications" (R. Whiteman, ed.) Academic Press.
- [12] F. HECHT (1981), *Construction d'une base de fonctions $P1$ non-conformes á divergence nulle dans R^3* . R.A.I.R.O. Anal. Numer. 15, pp. 119-150.
- [13] T. J. R. HUGHES, L.P. FRANCA, M. BALESTRA (1986), *A new Finite Element formulation for CFD : V. Circumventing the Brezzi-Babuška condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations*. Comput. Methods Appl Mech. Engrg. 59, pp. 85-99.
- [14] T. J. R. HUGHES, L.P. FRANCA, G. M. HUBERT (1989), *A new Finite Element formulation for CFD : VIII. The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations*. Comput. Methods Appl Mech. Engrg. 73, pp. 173-189.
- [15] J. L. LIONS (1969), *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Gauthier-Villars, París.
- [16] PIRONNEAU, O. (1991), *Finite Element Methods for Fluids* Wiley - Masson.
- [17] R. TEMAM (1977), *Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes Equations*. North-Holland, Amsterdam.

THE CHANGING FACE OF MATHEMATICS-IN-INDUSTRY¹

J. R. OCKENDON

OXFORD CENTRE FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS
MATHEMATICAL INSTITUTE, UNIVERSITY OF OXFORD
24-29 ST. GILES, OXFORD, OX1 3LB, UK.

1 Introduction

My objective in writing this survey is to explain my beliefs that

- the demand for the application of mathematical ideas to industrial problems is greater than ever and
- if mathematicians do not respond to this demand, the resulting secession of quantitative modelling and analysis to computational and physical scientists will only result in the marginalisation of mathematics as a whole.

Many articles are available that describe the successes of mathematics-in-industry, especially where the interaction has led to interesting new mathematics² [1],[2]. Perhaps the most spectacular successes occur when the construction of mathematical models reveals such close analogies between two seemingly unrelated industrial or scientific applications that opportunities are revealed for immediate technology transfer. A trivial example concerns to the solidification of metal ingots, say, in the steel industry and the manufacture of *popsicles* (*polos*) in the food industry. The relevant parameter regimes for both these processes lead to precisely the same *Stefan model* for the heat transfer that accompanies the phase change [3]. A more surprising analogue is that between vortex dynamics in an inviscid fluid and in a Type II superconductor as may be used, say, in a high-quality microwave resonators. In the fluid, the vortex velocity has an asymptotic expansion

$$\underbrace{\text{curvature} \times \mathbf{b} \times (\log \delta + \mathcal{O}(1))}_{\text{self-induced}} + \underbrace{(u + o(1))}_{\text{external}} \quad (1)$$

¹Resumen de la conferencia inaugural del Seminario del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid

²Work that has lead to increased quality, productivity or profits is less well documented but it undoubtedly exists!

while in the superconductor it is

$$\underbrace{\text{curvature} \times \mathbf{n} \times (\log \delta + \mathcal{O}(1))}_{\text{self-induced}} + \underbrace{(\text{Curl} \mathbf{H} \wedge \mathbf{t} + o(1))}_{\text{external}} \quad (2)$$

here $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$ and $\mathbf{n}$ are the tangent, binormal and principal normal to the vortex respectively, $\mathbf{u}$ and $\mathbf{H}$ are the ambient fluid velocity and magnetic field respectively and the small parameter δ measures the width of the vortex core. As shown in [4], both these results can be used as the basis for so-called *mean-field* models when many vortices are present; the fact that this procedure leads to the Euler equation of inviscid flow when applied to (1) gives confidence that the model resulting from (2) is correct.

There are not many accounts of failures of mathematics-in-industry but two out of many possible examples are

1.1 Capacitor manufacture

Many electronic devices incorporate small capacitors, a few milimeters in size, that have to be partially dipped into solder bath in order that they can be electronically incorporated into a circuit. The capillarity rise of the solder up the sides of the capacitor needs to be controlled carefully. As described in [5], the solution of the so called Laplace-Young equation that describes the meniscus is moderately well understood for rise up a corner of angle 2α (for a cuboid capacitor $\alpha = 3\pi/4$) as long as the contact angle γ is such that $\alpha < \pi/2 + \gamma$. In fact, if $\alpha < \pi/2 - \gamma$, there is a very large capillary rise in the vicinity of the corner, while for $\pi/2 - \gamma < \alpha < \pi/2 + \gamma$, the solder surface near the corner is approximately planar (as can be seen from experimenting with pieces of cardboard). However it seems that the behaviour in the possibly important regime $\pi/2 + \gamma < \alpha$ currently defies quantitative description, although the rise is known to be bounded and very likely to be determined by global conditions away from the corner.

1.2 Pattern selection in dendrite growth

Returning to the *popsicle* problem mentioned above, a further mathematical analogy can be drawn with the classical model for the free boundaries in a Hele-Shaw cell [6]. In fact, this fluid mechanical simulation of the dendritic growth is easier theoretically than the original Stefan problem, but it still presents formidable challenges. As shown in [7], the model for a travelling-wave *Saffman-Taylor finger* can be reduced to the following integro-differential equation for

the fluid speed on the dendrite, say, q , and the dendrite slope θ

$$\begin{aligned} \log q(s) &= -\frac{s}{\pi} \int_0^1 \frac{\theta(s') ds'}{s'(s' - s)}, \\ \varepsilon q s \frac{d}{ds} \left(q s \frac{d\theta}{ds} \right) - q &= -\cos \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

with

$$0 < s < 1, \quad q(0) = 1, \quad q(1) = 0, \quad \theta(0) = 0.$$

Here s parametrises the free boundary of the dendrite and ε is a parameter proportional to the surface tension that is usually quite small in experiments. The interesting result is that even though, when $\varepsilon = 0$, there is a one-dimensional family of solutions of (3) (as found in [6]), subtle asymptotic argument suggests that when $\varepsilon > 0$, only a discrete selection of this family of patterns survives. Also, it has been conjectured that just one of these patterns is stable. This state of affairs is somewhat reminiscent of the *geometric model* [8]

$$\varepsilon \frac{d^3 \theta}{ds^3} + \frac{d\theta}{ds} = \cos \theta, \quad -\infty < s < \infty, \quad \theta(\pm\infty) = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

where it can be proved rigorously that the *pattern*

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + 2 \tan^{-1} e^s \quad (5)$$

that exists when $\varepsilon = 0$ is destroyed as soon as ε takes a small positive value³. Incidentally, the burgeoning area of *exponential asymptotics* [9], of which the analyses of (3) and (4) are examples, is likely to become increasingly important in mathematics-in-industry in future years. There are more and more situations in fluids mechanics and wave propagation where exponentially small terms are being found to play a decisive role; examples are wave fields on the dark side of a caustic or certain kinds of shadow boundaries [10].

The above examples are really intended as background material to illustrate some of the ways in which mathematical and industrial research can interact intellectually. However, the crucial practical dimension of this interaction in

³For those whishing to cut their teeth on the arguments needed to show this, a related linear problem is

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{ds^2} + 2 \left(s \frac{du}{ds} - \frac{dv}{ds} \right) = 0, \quad \varepsilon \frac{d^2 v}{ds^2} + 2 \left(\frac{du}{ds} + s \frac{dv}{ds} \right) = 0,$$

where

$$-\infty < s < \infty, \quad u(0) = v(0) = \frac{du}{ds}(0) - 1 = \frac{dv}{ds}(0) = u(\infty) - u(-\infty) = 0;$$

there is no solution when $\varepsilon > 0$ unless we are allowed to make an error of $\mathcal{O}(e^{-1/\varepsilon})$

1995 is the massive increase in the number of industries that are demanding quantitative analyses of their methods and processes. We will say more about the reasons for this and cite examples in the conclusion but first we give a very brief overview of some particular problems associated with one, not particularly high-tech, industry.

2 Mathematical problems in glass industry

The manufacture and treatment of glass is a specialised area of mechanics and heat transfer in which a basically Newtonian fluid is required to adopt a variety of configurations, many of which are *thin*, with one dimension being much less than the others. The situation is analogous to that of the solid mechanics of rods, plates and shells.

In many glass manufacturing processes, typical length scales are $(10^{-1}, 10)$ m, thickness $(10^{-3}, 10^{-1})$ m, velocities 10^{-3} m/s, surface tension 10^{-1} Nm $^{-1}$, imposed pressure differences 10^3 Pa, but Reynolds numbers can vary from 10^{-10} to $\mathcal{O}(1)$. Thus it is reasonable to neglect gravity, surface tension, and, in many cases, inertia. Thus a basic problem is to solve linear, elliptic Stokes equation for slow viscous flow in a thin domain, together with boundary conditions that model the externally applied forces while, crucially, large components of the unknown boundary of the glass are stress-free. Two typical situations are

2.1 Manufacture of glass fibres and bottles

In these cases, a specimen of length L is stretched, say, at a speed U and the most widely studied time scale is L/U . Now, letting x be a coordinate in the flow direction, we could study the drawing of a fibre of cross-sectional areas $h(x, t)$ (or the blowing of an axisymmetric bottle of thickness $h(x, t)$) and write conservation of mass as

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0, \quad (6)$$

where u is the glass velocity in the x direction, which dominates over the transverse components. Moreover, conservation of momentum in this flow direction give the so-called *Trouton* model

$$\frac{\partial}{\partial x}(N\mu h \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad (7)$$

where μ is the viscosity (assumed constant) and N is strangely either 3 or 4 depending on whether we are considering a fibre or a bottle respectively.

Finally, a transverse momentum balance shows that on this time scale L/U , the displacement of the centre line of the fibre or bottle from straight satisfies

$$N\mu h\kappa \frac{\partial u}{\partial x} + P = 0 \quad (8)$$

where κ is the curvature of the centre line and P the differential pressure between the inside of the bottle; for a fibre $P = 0$ and the centre line is always straight, but for a bottle the curvature decays in time until, for example, the bottle reaches the wall of a mould.

Thus, on the time scale L/U , the elliptic Stokes equation can be approximated by the hyperbolic system (6,7) and the flow is reversible in the sense that an extension can be negated by applying a compression. This palpable untruth can be resolved by considering short time scales of $\mathcal{O}(\varepsilon^2 L/U)$ where ε is an aspect of ratio (h/L for the bottle, $h^{1/2}/L$ for the fibre); then, as shown in [11], the slope of the centre line, say $\alpha(x, t)$, satisfies the *evolutionary elastica* equation

$$\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^2 \partial t} = A(t) \cos \alpha + B(t) \sin \alpha, \quad (9)$$

where the coefficients A, B are determined by the boundary conditions at the ends of the fibre. The solution of (9) can be shown to match that of (6 - 8) when time is suitably rescaled, and moreover, numerical integration of (9) shows that an initially bent fibre will quickly straighten isometrically under an applied tension before it can undergo a slow extension. Similarly a bottle will quickly undergo an isometric deformation towards a minimal surface before it can stretch. Since an initially straight fibre will buckle under compression into an elastica, the processes of compression and extension as modelled by (9) do not commute.

2.2 Glass sheet manufacture

Typical glass sheets are made by, say, the float glass process [12] and they may then be deformed by pressing or by gravity flow in order to achieve desired curvatures. However, the simplest flow of a sheet that is stress-free on both its surfaces is modelled by the two-dimensional version of (6,7), viz

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2h \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (12)$$

where the velocity is now (u, v) .

This itself has not received as much mathematical attention as it deserves, but even less is known about the following equation for the centre surface $z = H(x, y, t)$ of a nearly flat sheet

$$\left(2\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0; \quad (13)$$

this is two dimensional generalisation of the linearisation of (8) with $P = 0$. It is easy to see that (13) changes type depending whether the normal stresses on any element of the sheet are everywhere compressive (or in tension) or whether they can change sign depending on the orientation of the element. Thus it is not necessary to go to transonic gasdynamics to see sonic lines – indeed, other examples of change of type can be found when inertial effects are introduced into the one-dimensional fibre stretching model (6,7) [13].

3 Remarks and conclusions

Although some of the examples above have been introduced as possible areas of research for theoreticians, it is even more important to realise that they are only the *tips of the iceberg* concerning mathematical problems in industry. The reason that there is so much business for mathematicians is the prevalence of computer-aided studies in industrial research and development combined with demand for ever tighter control processes and products. This is especially noticeable in low-tech industries where precision had not been necessary before the computer revolution.

Thus, to put matters in perspective, we conclude by listing six other industries that can provide examples just as mathematically challenging as the handful of problems cited in the previous section: after each heading, three or four specific problems are listed of which the author has personal experience. This list is by no means exhaustive and should itself be read alongside the demands of more traditionally mathematical high-tech industries such as oil, aerospace and telecommunications.

1. Finance (or more generally: Risk)

- Derivatives (e.g. options)
- Currency modelling
- Mortgage modelling

2. Clothing

- Man-made fibres
- Mechanics of protective clothing
- Dyeing
- Processing natural fibres (e.g. cotton, silk)

3. Food

- Cooking and freezing (e.g. chickenburgers)
- Processing and handling
- Quality control, contamination
- Percolation (e.g. coffee)

4. Cosmetics

- Foam modelling
- Percolation in skin
- Colour modelling

5. Mining

- Rock blasting
- Tunnel safety
- Slurry transport (e.g. coal)

6. Agriculture

- Silo mechanics
- Fluidised bed drying
- Natural convection (e.g. wine)
- Pollution and groundwater flow (e.g. radioactivity)

It is clear that high-quality quantitative assessment is necessary in an increasing number of areas of modern technology and that mathematical modelling and analysis has a golden opportunity to realise its potential; if mathematicians do not rise to this challenge other scientists will have to carry out the necessary quantitative studies by themselves, with consequent wasteful duplication and dilution of the importance of mathematics in the general context of research.

References

- [1] ICIAM Proceedings, Hamburg 1995.
- [2] IMA Volumes, *Mathematics in Industrial Problems* Vol 1-7, 1991-1995.
- [3] Crank, J., *Free boundary value problems*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 1984.
- [4] Chapman, S.J., Hunton, B.J., Ockendon, J.R., *Vortices and boundaries*, Preprint 1995.
- [5] Finn, R., *Equilibrium capillary surfaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 284, Springer Verlag, New York, 1986.
- [6] Saffman, P.G., Taylor, G.I. *The penetration of a fluid into a porous medium or a Hele Shaw cell containing a more viscous fluid*, Proceedings of the Royal Society of London, A **245**, 312-329, 1958.
- [7] Vanden Broek, J.M. *Fingers in a Hele Shaw cell with surface tension*, The Physics of fluids **26** (8), 2033-2034, 1983.
- [8] Kruskal, M.D., Segur, H., *Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth*, Studies in Applied Mathematics **85** (2), 129-181, 1991.
- [9] Segur, H., Tanveer, S., Levine, H., *Asymptotics beyond all orders*, Plenum 1991.
- [10] Keller, J.B., Karal, F.C., *Surface wave excitation and propagation*, Journal of Applied Physics **31**, 1039-1046, 1960.
- [11] Buckmaster, J.D., Nachman, A., *The buckling and stretching of a viscida. II Effects of surface tension*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **31**, 157-168, 1978.
- [12] Narayanaswamy, O.S., *A one-dimensional model of stretching float glass*, Journal of the American Ceramic Society **60**, 1-5, 1977.
- [13] Howell, P.D., *Models for thin viscous sheets*, European Journal of Applied Mathematics, 1995 (to appear).

SCATTERED DATA INTERPOLATION AND CONVEXITY

MICHAEL S. FLOATER
SINTEF, P.O. BOX 124 BLINDERN
0314 OSLO, NORWAY

e-mail: Michael.Floater@si.sintef.no

Abstract: This paper gives a brief introduction to some of the theory and application of scattered data interpolation. The example problem of convexity-preserving scattered data interpolation is considered in more detail.

1 Scattered data interpolation

Suppose we are given a sequence $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n)$ of distinct points in a given domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ and associated scalar values $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. The goal is to construct a function $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, usually at least continuous, satisfying the interpolation conditions

$$s(\mathbf{x}^i) = f_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

In this context, the points $\mathbf{x}^i$ are usually called *scattered data points* and $(\mathbf{X}, \mathbf{f})$ the *scattered data set*. A comprehensive survey of scattered data methods is provided in [4] though there have been advances since its publication.

There are numerous uses of scattered data interpolation, especially in the case $d = 2$. For example in geology, the f_i could represent depths, measured seismically, of the sea floor at sites $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^2$. In this case an interpolant s will provide a model of the surface of the sea floor. Such models are useful for detecting fault lines, that is discontinuities in geological layers caused by severe movements of the earth's crust. Their localization is of vital importance to geologists since they provide information about the occurrence of oil reservoirs and their volume.

Other examples come from *reverse engineering*, the process of generating a mathematical surface model from a physical model from large sets of measured data. The physical model could be a car part, a plastic moulding, a turbine blade, etc. Car designers typically create an actual-size sculptured model of a new car from clay. Thousands of points on the surface of the model are

then measured by highly accurate scanning devices. In reverse engineering it is usually very important that s is smooth, that is $s \in C^k$ for some $k \geq 2$ say.

We note that both in geology and reverse engineering the data is often subject to noise. If there is large noise it is necessary to find a smooth *approximant* rather than an interpolant. However we restrict our attention here purely to interpolation.

Interpolating scattered data is a surprisingly difficult task especially if a smooth interpolant is required. Among the earlier methods were Shepard's method and Sibson's interpolant though these are rarely used nowadays. In applications one normally makes a choice of either piecewise polynomials over triangulations or radial basis functions.

The radial basis function method basically consists of finding values $c_1, \dots, c_n$ such that

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\|) \quad (2)$$

satisfies (1). Thus s is a linear combination of translates of the radial function $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|)$. Sometimes additional polynomial terms are added to the sum. Classical examples of ϕ are Duchon's thin plate spline $\phi(r) = r^2 \log(r)$, Hardy's multiquadrics $\phi(r) = (c^2 + r^2)^{1/2}$ and inverse multiquadrics $\phi(r) = (c^2 + r^2)^{-1/2}$, and the Gaussians $\phi(r) = e^{-cr^2}$.

The theory of radial basis functions has seen large advances in the last decade and they tend to yield smooth interpolants. However since Φ has global support, they require the inversion of a full matrix and so a disadvantage is the large amount of computing time necessary when n is large. Very recently radial functions with compact support have been added to the list of radial functions for which (2) can be solved, for example $\phi(r) = ((1-r)_+)^4(4r+1)$ in the case $d=2$. The matrix is then sparse and the hope is that by scaling the supports one can both reduce computing time and still obtain well-behaved interpolants. In fact it seems that multistep methods may be necessary in order to achieve this (see [3] and references therein).

Piecewise polynomials over triangulations of the points $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$ provide a popular alternative method with $\Omega = [\mathbf{X}]$, the convex hull of $\mathbf{X}$. For example when $d=2$, in order to construct a piecewise polynomial interpolant $s \in C^1(\Omega)$, there are three common choices. The Argyris interpolant is quintic over each triangle. The Clough-Tocher interpolant is cubic over each of three subtriangles of each triangle. The Powell-Sabin interpolant is quadratic over each of six subtriangles of each triangle. Using higher degrees or more subtriangles, it is

possible, though by no means easy, to construct piecewise polynomials with higher orders of smoothness.

As the above examples suggest, a disadvantage of piecewise polynomial methods is the somewhat *ad hoc* nature of the constructions and the difficulty of ensuring smoothness. However they have the advantage over radial basis functions of being local and therefore faster to compute. They are also more appropriate for *constrained* interpolation which is the subject of the next section.

2 Convex scattered data interpolation

In constrained scattered data interpolation one searches for a function s satisfying (1) which in addition satisfies some constraints. As an example it might be known that the data values $f_1, \dots, f_n$ are sampled from a function which is bounded below and above by respectively a and b say. Then, since $a \leq f_i \leq b$ for all i , it is natural to demand that the interpolant s should satisfy $a \leq s(\mathbf{x}) \leq b$ for all $\mathbf{x} \in \Omega$. This is known as *range-restricted* interpolation.

Another constrained problem is *convex* interpolation. The data set $(\mathbf{X}, \mathbf{f})$ is called *convex* if there exists a convex function $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfying

$$F(\mathbf{x}^i) = f_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

(i.e. the data are sampled from an unknown convex function F). Given convex data $(\mathbf{X}, \mathbf{f})$ we wish to find a convex function $s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfying (1).

Let us discuss this problem in some detail since it illustrates the importance of triangulations in scattered data interpolation. It is also a particularly interesting problem since there is currently no satisfactory solution. In fact as far as I am aware there is in general no known constructive procedure for generating even a C^1 piecewise polynomial convex interpolant in the case $d = 2$. However as we will see there is an elegant solution if we only require a continuous piecewise linear interpolant. The reader is referred to [1] for more details of the following discussion.

From now on we set $d = 2$. First of all the definition of convex data is not very useful. Let $\mathcal{I}$ denote the set of all triples of integers in $\{1, \dots, n\}$. In [2] it was shown that $(\mathbf{X}, \mathbf{f})$ are convex data if and only if

$$f_j \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$$

for any $I \in \mathcal{I}$ and any $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$ such that

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = 1, \quad \text{and} \quad \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{x}^i = \mathbf{x}^j.$$

This is a better characterization of convex data since it makes no assumption about the existence of F in (3).

Now we approach the problem of constructing a convex interpolant. First we need to define triangulations and swapping procedures.

Definition. A triangulation $\mathcal{T}$ with set of vertices $\mathbf{X}$ is a set of triangles $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$ such that

- (1) $|T_i \cap \mathbf{X}| = 3$ and $T_i = [T_i \cap \mathbf{X}]$ for all $i \in \{1, \dots, N\}$,
- (2) $\cup_{i=1}^N T_i = [\mathbf{X}]$,
- (3) $\text{Int } T_i \cap \text{Int } T_j = \emptyset$, for any $i \neq j$.

Given any data $(\mathbf{X}, f)$ (not necessarily convex) each triangulation $\mathcal{T}$ defines a unique continuous piecewise linear interpolant $F_{\mathcal{T}} : [\mathbf{X}] \rightarrow \mathbb{R}$ whose restriction to each triangle $T_i \in \mathcal{T}$ is the linear interpolant to the data at the vertices of T_i .

Let $\mathcal{T}$ be any triangulation of $\mathbf{X}$. A *quadrilateral* of $\mathcal{T}$ is the union of any two adjacent triangles, that is $T \cup S$, where $T, S \in \mathcal{T}$, $|T \cap S \cap \mathbf{X}| = 2$. The vertices of the quadrilateral are the four elements in $(T \cup S) \cap \mathbf{X}$. The quadrilaterals of the triangulation can be classified into three types: a quadrilateral is *degenerate* if it contains any three collinear vertices; *convex* if it is nondegenerate and all interior angles are less than π ; and *concave* if it is nondegenerate and contains an interior angle greater than π .

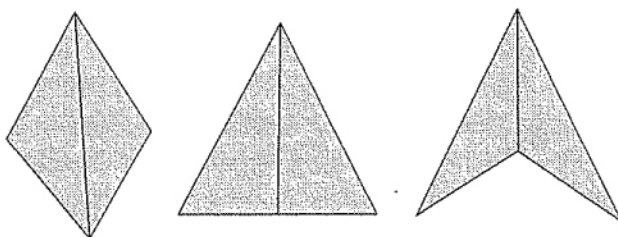


Figure 1: Convex, degenerate and concave quadrilaterals.

Now we consider the notion of swapping an edge in a given triangulation to create a new one. Let $Q = T \cup S$ be any convex quadrilateral in $\mathcal{T}$. The two vertices in $T \cap S$ together with either of the remaining two vertices of Q form precisely two other triangles T', S' such that $T \cup S = T' \cup S'$. A *swap* is the operation performed on the triangulation $\mathcal{T}$ which produces the new triangulation $\mathcal{T}' = (\mathcal{T} \setminus \{T, S\}) \cup \{T', S'\}$. A swap cannot be applied to degenerate or concave quadrilaterals because, in these cases, the new set of

triangles will not be a valid triangulation.

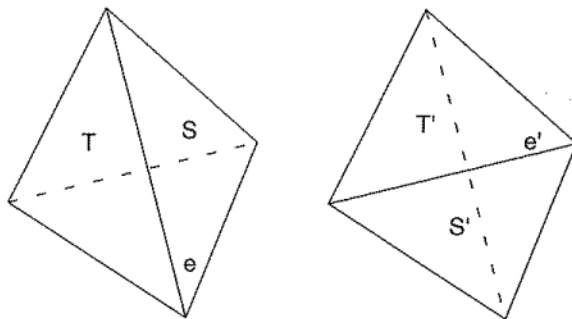


Figure 2: A swap replaces T, S by T', S' . The edge e is replaced by e' .

What effect does a swap have on the piecewise linear interpolant? Well clearly the change is local, indeed $F_{T'}(\mathbf{x}) = F_T(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in [X] \setminus Q$. On the other hand the restriction $F_T|_Q$ of F_T to the quadrilateral Q is continuous and consists of two linear pieces. It is therefore either a concave or convex function. From geometrical considerations one deduces that if $F_T|_Q$ is concave then $F_{T'}|_Q$ is convex and similarly if $F_T|_Q$ is convex then $F_{T'}|_Q$ is concave. If $F_T|_Q$ is linear then so is $F_{T'}|_Q$.

These observations lead to an algorithm for computing a triangulation T^* , for convex data (X, f) , such that F_{T^*} is convex. This algorithm was first proposed by Scott (see [1]).

Swapping Algorithm.

1. Construct a starting triangulation T_0 and let $i := 0$.
2. Search for a convex quadrilateral Q of T_i such that $F_{T_i}|_Q$ is concave and nonlinear.
3. If such a quadrilateral Q exists then define T_{i+1} from T_i by swapping the diagonal edges of Q , let $i := i + 1$ and go to Step 2.
4. Else define $T^* := T_i$ and output T^* .
end.

It is not immediately clear that this algorithm must stop after a finite number of iterations. In fact, the sequence of functions obtained is decreasing, that is for all $\mathbf{x} \in [X]$ one can show that

$$F_{T_0}(\mathbf{x}) \geq \dots \geq F_{T_{i-1}}(\mathbf{x}) \geq F_{T_i}(\mathbf{x}) \geq \dots$$

and since $F_{T_{i-1}}$ and F_{T_i} differ in at least one point, all the F_{T_i} are distinct. Therefore all the T_i are distinct. Since there exist only a finite number of triangulations of $\mathbf{X}$, we conclude that the algorithm terminates.

Now let

$$s(\mathbf{x}) = F_{T^*}(\mathbf{x}).$$

It was shown in [1] that (i) s is unique, (ii) s is a convex interpolant to the data $(\mathbf{X}, \mathbf{f})$, (iii) if F is any convex interpolant to $(\mathbf{X}, \mathbf{f})$ then

$$F(\mathbf{x}) \leq s(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in [\mathbf{X}],$$

and (iv)

$$s(\mathbf{x}) = \min \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i f_i \mid I \in \mathcal{I}, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \forall i \in I, \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{x}^i = \mathbf{x} \right\}.$$

Property (i) is interesting because the output T^* of the swapping algorithm is not necessarily unique. Properties (ii) and (iii) imply that s is the (pointwise) least upper bound of all convex interpolants. Thus s also provides a useful constraint when attempting to construct smoother interpolants.

Figures 3 and 4 show shaded images, the second with contour lines, of s where $\mathbf{X}$ contains 50 randomly chosen points in the unit disc and the values in $\mathbf{f}$ are sampled from the function $f(x, y) = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, a lower hemisphere.

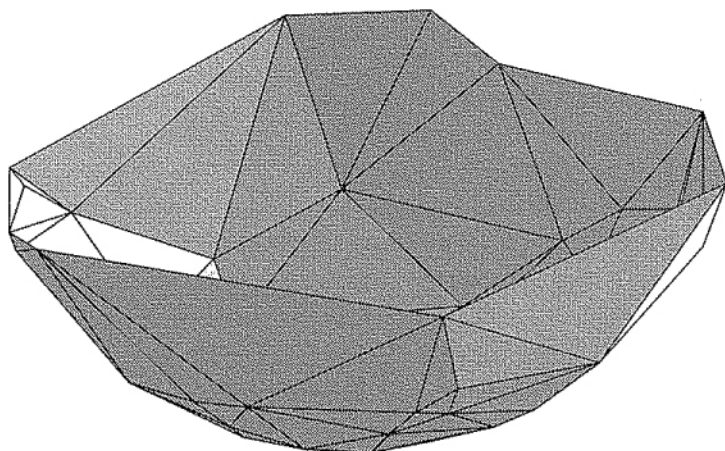


Figure 3: The convex interpolant s

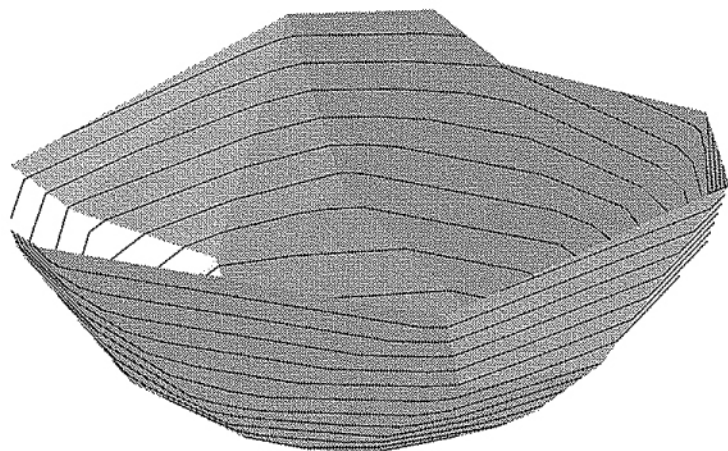


Figure 4: Contour lines of s

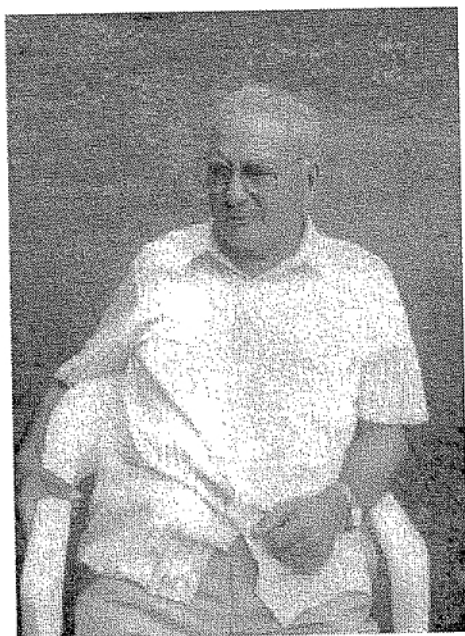
References

- [1] J. M. Carnicer and M. Floater, Piecewise linear interpolants to Lagrange and Hermite convex scattered data, to appear in *Numerical Algorithms* (1997).
- [2] W. Dahmen and C. A. Micchelli, Convexity of multivariate Bernstein polynomials and box spline surfaces, *Studia Scientiarum Mathematicorum Hungaricae*, **23** (1988), 265-287.
- [3] M. Floater and A. Iske, Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions, to appear in *J. Comp. Appl. Math.* (1996).
- [4] R. Franke and L. L. Schumaker, A bibliography of multivariate approximation, in: C. Chui, L. Schumaker, F. Uteras, eds. *Topics in Multivariate Approximation*, Academic Press, New York, 275-335.

ALBERTO DOU, UN MAESTRO A SUS OCHENTA

Parece que fue ayer cuando el 17 de Junio de 1988 el Padre Dou, el Académico y Profesor Alberto Dou MasdeXexás, era objeto de un cálido y multitudinario homenaje celebrado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid con motivo de su jubilación y su adscripción, como Profesor Emérito, en la Universidad Autónoma de Barcelona. La componente científica del homenaje consistió, en aquella ocasión, en una densa reunión científica en la que hubo 34 comunicaciones llevadas a cabo por especialistas de diversas universidades españolas y también de algunas universidades de más allá de nuestras fronteras. Las exposiciones atendieron a dos de las grandes facetas cultivadas por A. Dou: 1. Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico y Aplicaciones y 2. Aspectos Humanísticos y Filosóficos de la Ciencia. La obra de Dou fue glosada por Miguel de Guzmán, en sus aspectos humanísticos, Emilio de la Rosa, en su faceta de Ingeniero de Caminos y por mí mismo en lo referente a Matemática Aplicada. El libro que recogió lo allí acontecido fue publicado por la Universidad Complutense sobrepasando las 370 páginas (Actas de la Reunión Matemática en honor de A. Dou. Editado por J.I. Díaz y J.M. Vegas, Univ. Complutense de Madrid, 1989).

Aprovechando dos visitas a Barcelona, en el pasado mes de mayo, tuve el privilegio de mantener unas plácidas y enriquecedoras sobremesas con él (al olor de unos habanos) en las que sus testimonios fueron,



una vez más, declaraciones de un gran valor científico, histórico y humano. Guiado por la firme convicción de que lo que yo estaba escuchando era de interés para muchas otras personas, al final de la segunda velada le propuse la idea de plasmar lo tratado en nuestras charlas en forma de entrevista a lo que accedió generosamente tras mi insistencia. Una semana más tarde le envié un cuestionario que me devolvió contestado en menos de una semana aprovechando un viaje suyo a Madrid. El resultado de esto lo constituyen las líneas que siguen a continuación.

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ: *Tus ochenta años, tu experiencia científica, apasionada como dice Miguel de Guzmán, hacen de ti un testigo privilegiado de la evolución de la Matemática Aplicada española de nuestro siglo. Utilicemos el transcurrir del tiempo como senda de un pequeño paseo a tu lado, en compañía de los lectores del Boletín de SEMA. Al andar tendremos necesariamente que dejar tantos caminos de otras parcelas que una persona tan interdisciplinar como tú ha transitado y transita con tanta maestría. ¡Que difícil es tratar de linealizar el tiempo pasado!. En fin, vamos allá. Permíteme que comience indagando sobre tus primeros pasos científicos. Dejaste tu querida Cataluña natal para realizar estudios en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid. Los acabas en 1943 y a tus veintiocho años, lejos de lanzarte al ejercicio de tu brillante carrera, un flamante ingeniero como tú se embarca en dos nuevas licenciaturas, la de Filosofía y sobre todo la de Matemáticas, que llevarías a buen puerto en 1949 y 1950, esta vez en Barcelona. El final de ese episodio tan trágico de la vida española estaba reciente. Pero, ¿qué huella hay en ti de otras generaciones científicas anteriores?, ¿qué influencia pudieron dejar en ti matemáticos sobresalientes de la época como Julio Rey Pastor, Esteban Terradas y otros?, ¿quiénes fueron realmente tus maestros en esa primera etapa de tu formación?*

ALBERTO DOU: La vida la vivimos mirando substancialmente hacia adelante, pero se entiende mucho mejor cuando, pasados unos decenios se la contempla hacia atrás. Entonces se comprenden mejor las crisis, los aciertos y los pasos en falso.

Que yo recuerde, mis primeros estudios de Matemáticas los hice estando en la Academia Misol en la que preparaba mi ingreso en la Escuela de Ingenieros de Caminos que entonces dependía del Ministerio de Obras Públicas. El director de la Academia, Félix Alonso Misol, era un gran profesor de matemáticas. Aprendí pocas matemáticas porque los programas de ingreso estaban anticuados, pero las aprendí bien. Ingresar en la Escuela de Caminos era entonces bastante parecido

a ganar una oposición. De hecho suponía ingresar en un importante Cuerpo de funcionarios. El examen de ingreso se convocaba una vez anualmente en junio. Constaba de dos grupos: uno que resultaba difícil, pues se presentaban cerca de mil candidatos para un total de unas veinte plazas, y era de asignaturas matemáticas (aritmética incluida la comercial, álgebra, funciones, geometrías métrica, analítica y algo de proyectiva y descriptiva). No se proponían preguntas teóricas, sino que a lo largo de tres eliminatorias, una por semana, se proponían problemas; para resolverlos el candidato tenía que dominar ciertas técnicas y a veces dar con la idea feliz que latía oculta en el enunciado. Cada ejercicio de cada candidato era calificado separadamente por dos miembros de los siete del tribunal, y si las notas de ambos no coincidían, debían ponerse de acuerdo. Las materias del otro grupo eran dibujo, idiomas y cultura general, y era bastante más fácil de aprobar, aunque lo suspendí repetidamente, más que el primero. Simultáneamente estudié el Análisis Algebraico de Rey Pastor, que me impactó. Nunca oí una clase de Rey Pastor y a Terrades nunca le conocí personalmente. En cuanto a estudiar una carrera universitaria al mismo tiempo que la de ingeniero no era algo excepcional. Entonces se solía estudiar físicas o matemáticas; también derecho, especialmente más tarde; y actualmente lo más frecuente es probablemente economía o hacer uno o dos cursos de Master en empresariales. Con los conocimientos que tenía aprobé (1939) por libre tres asignaturas de las catorce de que constaba la licenciatura en matemáticas que duraba cuatro años. No había marías. En los exámenes de septiembre de 1949 y febrero de 1950 liquidé otras cinco asignaturas y durante el curso 1949-50 asistí regularmente a clase de las cuatro restantes: Análisis 3º (Ecs Diferenciales) con Augé, Análisis 4º con Orts, Geometría con Torroja y Astronomía con Febrer; en los exámenes de junio de 1950 me dieron cuatro matrículas. Participé en los exámenes para premio extraordinario y me lo adjudicaron. Creo que aprendí mucho. Con todo, conviene tener presente, por ejemplo, que durante la licenciatura nunca oí hablar de Topología, como de una nueva disciplina, y sólo accidentalmente oí de Augé la definición de grupo.

J.I.D. *Tus primeros pasos en investigación los diste en Geometría Diferencial de la mano de una figura también polifacética como el austriaco, afincado en Alemania, W. Blaschke. Tu interés por los Cuatritejidos Planos acapará casi toda la década de los cincuenta en los que tu Tesis doctoral, tus largas estancias en la Alemania de la posguerra, la asistencia a tus primeros congresos internacionales debieron ser experiencias imborrables para ti. ¿Cuáles fueron tus motivaciones en esa época tan fructífera para ti en la que incluso conseguirías*

a ganar una oposición. De hecho suponía ingresar en un importante Cuerpo de funcionarios. El examen de ingreso se convocaba una vez anualmente en junio. Constaba de dos grupos: uno que resultaba difícil, pues se presentaban cerca de mil candidatos para un total de unas veinte plazas, y era de asignaturas matemáticas (aritmética incluida la comercial, álgebra, funciones, geometrías métrica, analítica y algo de proyectiva y descriptiva). No se proponían preguntas teóricas, sino que a lo largo de tres eliminatorias, una por semana, se proponían problemas; para resolverlos el candidato tenía que dominar ciertas técnicas y a veces dar con la idea feliz que latía oculta en el enunciado. Cada ejercicio de cada candidato era calificado separadamente por dos miembros de los siete del tribunal, y si las notas de ambos no coincidían, debían ponerse de acuerdo. Las materias del otro grupo eran dibujo, idiomas y cultura general, y era bastante más fácil de aprobar, aunque lo suspendí repetidamente, más que el primero. Simultáneamente estudié el Análisis Algebraico de Rey Pastor, que me impactó. Nunca oí una clase de Rey Pastor y a Terrades nunca le conocí personalmente. En cuanto a estudiar una carrera universitaria al mismo tiempo que la de ingeniero no era algo excepcional. Entonces se solía estudiar físicas o matemáticas; también derecho, especialmente más tarde; y actualmente lo más frecuente es probablemente economía o hacer uno o dos cursos de Master en empresariales. Con los conocimientos que tenía aprobé (1939) por libre tres asignaturas de las catorce de que constaba la licenciatura en matemáticas que duraba cuatro años. No había marías. En los exámenes de septiembre de 1949 y febrero de 1950 liquidé otras cinco asignaturas y durante el curso 1949-50 asistí regularmente a clase de las cuatro restantes: Análisis 3º (Ecs Diferenciales) con Augé, Análisis 4º con Orts, Geometría con Torroja y Astronomía con Febrer; en los exámenes de junio de 1950 me dieron cuatro matrículas. Participé en los exámenes para premio extraordinario y me lo adjudicaron. Creo que aprendí mucho. Con todo, conviene tener presente, por ejemplo, que durante la licenciatura nunca oí hablar de Topología, como de una nueva disciplina, y sólo accidentalmente oí de Augé la definición de grupo.

J.I.D. *Tus primeros pasos en investigación los diste en Geometría Diferencial de la mano de una figura también polifacética como el austriaco, afincado en Alemania, W. Blaschke. Tu interés por los Cuatritejidos Planos acapará casi toda la década de los cincuenta en los que tu Tesis doctoral, tus largas estancias en la Alemania de la posguerra, la asistencia a tus primeros congresos internacionales debieron ser experiencias imborrables para ti. ¿Cuáles fueron tus motivaciones en esa época tan fructífera para ti en la que incluso conseguirías*

a ganar una oposición. De hecho suponía ingresar en un importante Cuerpo de funcionarios. El examen de ingreso se convocaba una vez anualmente en junio. Constaba de dos grupos: uno que resultaba difícil, pues se presentaban cerca de mil candidatos para un total de unas veinte plazas, y era de asignaturas matemáticas (aritmética incluida la comercial, álgebra, funciones, geometrías métrica, analítica y algo de proyectiva y descriptiva). No se proponían preguntas teóricas, sino que a lo largo de tres eliminatorias, una por semana, se proponían problemas; para resolverlos el candidato tenía que dominar ciertas técnicas y a veces dar con la idea feliz que latía oculta en el enunciado. Cada ejercicio de cada candidato era calificado separadamente por dos miembros de los siete del tribunal, y si las notas de ambos no coincidían, debían ponerse de acuerdo. Las materias del otro grupo eran dibujo, idiomas y cultura general, y era bastante más fácil de aprobar, aunque lo suspendí repetidamente, más que el primero. Simultáneamente estudié el Análisis Algebraico de Rey Pastor, que me impactó. Nunca oí una clase de Rey Pastor y a Terrades nunca le conocí personalmente. En cuanto a estudiar una carrera universitaria al mismo tiempo que la de ingeniero no era algo excepcional. Entonces se solía estudiar físicas o matemáticas; también derecho, especialmente más tarde; y actualmente lo más frecuente es probablemente economía o hacer uno o dos cursos de Master en empresariales. Con los conocimientos que tenía aprobé (1939) por libre tres asignaturas de las catorce de que constaba la licenciatura en matemáticas que duraba cuatro años. No había marías. En los exámenes de septiembre de 1949 y febrero de 1950 liquidé otras cinco asignaturas y durante el curso 1949-50 asistí regularmente a clase de las cuatro restantes: Análisis 3º (Ecs Diferenciales) con Augé, Análisis 4º con Orts, Geometría con Torroja y Astronomía con Febrer; en los exámenes de junio de 1950 me dieron cuatro matrículas. Participé en los exámenes para premio extraordinario y me lo adjudicaron. Creo que aprendí mucho. Con todo, conviene tener presente, por ejemplo, que durante la licenciatura nunca oí hablar de Topología, como de una nueva disciplina, y sólo accidentalmente oí de Augé la definición de grupo.

J.I.D. *Tus primeros pasos en investigación los diste en Geometría Diferencial de la mano de una figura también polifacética como el austriaco, afincado en Alemania, W. Blaschke. Tu interés por los Cuatritejidos Planos acapará casi toda la década de los cincuenta en los que tu Tesis doctoral, tus largas estancias en la Alemania de la posguerra, la asistencia a tus primeros congresos internacionales debieron ser experiencias imborrables para ti. ¿Cuáles fueron tus motivaciones en esa época tan fructífera para ti en la que incluso conseguirías*

las cátedras en la Escuela de Caminos (1955) y en la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense (1957)? ¿Cómo fue la interacción, en tu caso, entre la investigación y el acceso a una posición permanente?

A.D. Todavía en 1950, Blaschke vino a dar un cursillo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Barcelona sobre geometría de los tejidos (Geometrie der Gewebe), al que asistí con mucho interés. Por iniciativa del Dr. Orts y gracias a su gestión, el profesor Blaschke me señaló el estudio de los cuatritejidos planos como tema para mi tesis doctoral en Matemáticas. Fue sin duda, un paso extraordinariamente importante para mi futura vida académica. Tuve además la suerte de que podía hablar fluidamente el alemán y así el segundo semestre del curso 1950-51 lo pasé asistiendo a un curso de Blaschke en el Mathematisches Seminar de la Universidad de Hamburgo, en el que di tres lecciones dando a conocer los resultados que había obtenido y que más tarde en 1955 publiqué en los Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. Defendí la tesis doctoral en Madrid (1952), única Universidad que entonces podía conceder el grado de Doctor, y me adjudicaron el Premio extraordinario. En 1954 asistí por primera vez a un Congreso Internacional de Matemáticas, el de Amsterdam, en el que presenté una comunicación en francés y conocí a Rey Pastor. En 1955 me adjudicaron, previo concurso de méritos, la segunda de las dos cátedras (la primera la obtuvo Tomás Rodríguez Bachiller) que habían quedado vacantes en la Escuela de Caminos; empecé las clases en Octubre de 1955. Previa consulta con Bachiller, adopté como libro de texto uno de F.B. Hildebrand, que se adaptaba bastante bien al programa del curso. Pasé dos años exclusivamente dedicado al estudio de ecuaciones diferenciales y en junio de 1957 me adjudicaron por oposición la cátedra de Análisis Matemático 3º (Ecuaciones Diferenciales) de la Universidad de Madrid, la única que había entonces en Madrid, o sea la actual Complutense. Empecé las clases en octubre de 1957.

J.I.D. *Parece que no era habitual en aquella época que un flamante catedrático se aventurara a una experiencia americana, ya innecesaria para la carrera funcional, como tú lo hiciste en el curso 59/60 en el Courant Institute. ¿Qué te movió a no acomodarte en tus cátedras?, ¿qué contrastes apercibes ahora entre tus investigaciones en cuatritejidos y las que iniciaste en el Courant sobre Elasticidad?, ¿qué diferencias notables observaste entre la matemática americana y la alemana?*

A.D. Efectivamente creo que entonces no era habitual el desplazamiento de profesores universitarios a otros países por razones de estudio o trabajo

académico. En primer lugar ni remotamente había en España las facilidades ni la tasa de movilidad que hay ahora; sin duda tales desplazamientos suponían cargas económicas y entonces probablemente también cargas familiares por lo menos bastante más que ahora. Es fácil comprender que, siendo religioso dedicado al estudio y enseñanza, muchas de estas dificultades no existieron para mí, o fueron mucho menores.

Por otra parte la preparación de las clases, la atención a los alumnos, las tareas administrativas, la publicación de algunos textos para uso de los alumnos, reuniones, conferencias... absorbían tanto tiempo que prácticamente resultaba imposible dedicarse a la investigación. Me pareció que la solución para lograr tiempo tranquilo y largo para el estudio era solicitar periódicamente cada cuatro o cinco años, un año de excedencia activa, y pasarlos en centros universitarios extranjeros eligiéndolos bien entre los varios a los que se podía intentar ir con buenas expectativas de éxito. Fueron como años sabáticos, en una época en la que en España no existían.

Así pasé el curso entero de agosto de 1959 a septiembre de 1960 en Estados Unidos pensionado por una beca March y en situación de excedencia activa. Trabajé como Temporary Member en el Institute of Mathematical Sciences de la New York University (septiembre-mayo); el mismo Institute que al trasladarse a Washington Square se llamó Courant Institute of Math. Scs. de la NYU; y participé también en el Seminario Matemático de la Universidad de Chicago (junio-agosto). El curso 1963-64, en situación de excedencia activa lo pasé con gran rendimiento en el Mathematics Research Center de la Universidad de Wisconsin, en Madison, invitado por su director R.E. Langer, como Visiting Professor. De enero de 1969 a enero de 1970 y en situación de permiso, invitado por la University of Notre Dame, Indiana, ocupé un puesto de Visiting Professor en el Mathematics Department y di un curso de Elasticidad no lineal, otro de Teoría de la medida para graduados y la University Press me publicó *Partial Differential Equations of First Order*. Por último, el semestre Enero-Agosto de 1974 lo pasé en el Courant Institute, con permiso de estudios, invitado por el mismo Institute y subvencionado por una beca Fullbright-Hays. Todo ello fue posible gracias a los excelentes Profesores Adjuntos de Cátedra, A. Valle, F. del Castillo, A. Casal, en la Facultad, y S. del Olmo, A. Mendizábal, E. de la Rosa, J.M. San Miguel y probablemente algunos otros, cuyos nombres no me vienen ahora a la memoria. Mi agradecimiento a todos ellos. También los veranos ofrecían buenas posibilidades de disponer de tiempo tranquilo para el estudio. En efecto, creo que en la mayoría de los veranos pasé unas seis u ocho semanas en

a ganar una oposición. De hecho suponía ingresar en un importante Cuerpo de funcionarios. El examen de ingreso se convocaba una vez anualmente en junio. Constaba de dos grupos: uno que resultaba difícil, pues se presentaban cerca de mil candidatos para un total de unas veinte plazas, y era de asignaturas matemáticas (aritmética incluida la comercial, álgebra, funciones, geometrías métrica, analítica y algo de proyectiva y descriptiva). No se proponían preguntas teóricas, sino que a lo largo de tres eliminatorias, una por semana, se proponían problemas; para resolverlos el candidato tenía que dominar ciertas técnicas y a veces dar con la idea feliz que latía oculta en el enunciado. Cada ejercicio de cada candidato era calificado separadamente por dos miembros de los siete del tribunal, y si las notas de ambos no coincidían, debían ponerse de acuerdo. Las materias del otro grupo eran dibujo, idiomas y cultura general, y era bastante más fácil de aprobar, aunque lo suspendí repetidamente, más que el primero. Simultáneamente estudié el Análisis Algebraico de Rey Pastor, que me impactó. Nunca oí una clase de Rey Pastor y a Terrades nunca le conocí personalmente. En cuanto a estudiar una carrera universitaria al mismo tiempo que la de ingeniero no era algo excepcional. Entonces se solía estudiar físicas o matemáticas; también derecho, especialmente más tarde; y actualmente lo más frecuente es probablemente economía o hacer uno o dos cursos de Master en empresariales. Con los conocimientos que tenía aprobé (1939) por libre tres asignaturas de las catorce de que constaba la licenciatura en matemáticas que duraba cuatro años. No había marías. En los exámenes de septiembre de 1949 y febrero de 1950 liquidé otras cinco asignaturas y durante el curso 1949-50 asistí regularmente a clase de las cuatro restantes: Análisis 3º (Ecs Diferenciales) con Augé, Análisis 4º con Orts, Geometría con Torroja y Astronomía con Febrer; en los exámenes de junio de 1950 me dieron cuatro matrículas. Participé en los exámenes para premio extraordinario y me lo adjudicaron. Creo que aprendí mucho. Con todo, conviene tener presente, por ejemplo, que durante la licenciatura nunca oí hablar de Topología, como de una nueva disciplina, y sólo accidentalmente oí de Augé la definición de grupo.

J.I.D. *Tus primeros pasos en investigación los diste en Geometría Diferencial de la mano de una figura también polifacética como el austriaco, afincado en Alemania, W. Blaschke. Tu interés por los Cuatritejidos Planos acapará casi toda la década de los cincuenta en los que tu Tesis doctoral, tus largas estancias en la Alemania de la posguerra, la asistencia a tus primeros congresos internacionales debieron ser experiencias imborrables para ti. ¿Cuáles fueron tus motivaciones en esa época tan fructífera para ti en la que incluso conseguirías*

entre todos por su ayuda al Departamento el Profesor J.L. Lions, hasta tal punto que, siendo Decano, promoví que se le otorgara el doctorado honoris causa por la Complutense; tuve una gran satisfacción cuando actué como padrino de su investidura de doctor Honoris Causa por la Universidad Complutense (Fiesta de Santo Tomás, 1976; siendo yo Rector de Deusto).

La contribución francesa al desarrollo de las ecuaciones en derivadas parciales es enorme, y desde el punto de vista histórico de sus orígenes es en verdad excepcional. Baste citar D'Alembert, Laplace, Fourier y Cauchy. En el período que sigue a la segunda guerra mundial los franceses emulan dignamente a los rusos y norteamericanos. Hay dos conceptos, o teorías, de origen francés, que desde la primera vez que los estudié me parecieron de gran importancia, porque matematizaban dos conceptos físicos de largo alcance tanto teórico como sobre todo para la matemática aplicada. Me refiero al concepto de fisicalidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y especialmente de las en derivadas parciales, cuya existencia y unidad son establecidas por teoremas fundamentales; es obvio que estas soluciones tienen interés físico únicamente si, formulado todo en espacios topológicos adecuados, las soluciones dependen continuamente de los datos iniciales y de contorno. Este concepto fue introducido por J. Hadamard en 1917 y ha sido desarrollado por numerosos matemáticos, por ejemplo, que yo haya conocido, Sobolev y Fritz John; hago amplio uso de este concepto en mis textos. El otro concepto es el de distribución, forma matemática continua e indefinidamente diferenciable, creada en gran parte por L. Schwartz, quien además la sistematizó y la dio a conocer en *Théorie des distributions* (1950-51), y la aplicó en *Méthodes mathématiques de la physique* (1955). Desde mis primeros cursos de doctorado expliqué la teoría de distribuciones y fui probablemente su introductor en la universidad española. Por tanto, la valoración que me atribuyes en tu pregunta tiene por lo menos un buen fundamento, pues hubo además otros muchos profesores franceses que nos visitaron y otros muchos textos franceses que tuvieron enorme vigencia en el Departamento.

Por consiguiente, me inclino a creer que efectivamente existieron estos hilos de los que hablas en tus dos preguntas finales; que aunque entonces no los percibimos claramente, sí actuaron eficazmente. También diría que sí hubo azar, pero no un azar completo, un obrar ciego, pues recuerdo que a este tema le di entonces muchas vueltas; pues, con el tiempo las ideas "vegetan" y se hacen explícitas. No son ajenas a este contexto las varias participaciones que profesores del Departamento tuvieron en las Sesiones organizadas por el Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) en el Norte de Italia (Ispra, Stresa,

Bressanone), en los que la participación francesa era cualificada y numerosa, si no mayoritaria. Aparte de que parece también obvio, por razones de proximidad y dada la excelente calidad de la producción matemática francesa, que se produjera una densa presencia francesa en nuestro Departamento.

J.I.D. *Es difícil encontrar alguien que te haya tenido como profesor y que no hable de tu entusiasmo en cada una de tus clases. Tus libros resisten aun la lectura de nuestros estudiantes actuales pese a ir dirigidos a unas promociones enormemente en desventaja. Tu idea de presentar a la vez la teoría general de las ecuaciones diferenciales, sean ordinarias como en derivadas parciales, y su tratamiento numérico está hoy, a los treinta años de su publicación, ahora que nos invaden los ordenadores personales, a la última moda. ¿Quién hacía numérico antes en nuestro país?, ¿cómo se fueron introduciendo la Matemática Computacional y la Informática en nuestro país?*

A.D. Creo que siempre consideré como obligación sería preparar bien mis clases. Incluso las del curso de doctorado, que di en todos los cursos, aún a costa de pasarme con frecuencia, sobre todo desde finales de los sesenta, el domingo entero preparando la próxima lección.

En el curso 1959-60, que pasé en el Courant Institute, aprendí Fortran IV e incluso corrí algún programa que yo mismo había escrito. Era obvia la importancia que en un futuro muy próximo iba a tener el Cálculo Numérico en la resolución efectiva y práctica de Ecuaciones Diferenciales tanto ordinarias como en derivadas parciales. Fritz John, por ejemplo, había demostrado ya la convergencia de las soluciones de ciertas ecuaciones formadas sustituyendo las derivadas por los correspondientes esquemas en diferencias finitas (como lo había hecho ya Euler en su Cálculo de Variaciones de 1744) hacia las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Así pues, decidí incorporar un capítulo de Análisis Numérico al texto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; y unos años más tarde Mendizábal escribió tres capítulos de Resolución Numérica en el texto que escribimos conjuntamente de Ecuaciones en Derivadas Parciales (Madrid, Escuela de Caminos, 1973). Me interesé no sólo por el Análisis numérico, sino también por cuestiones filosóficas que planteaban y plantean los ordenadores. Escribí varios artículos y todavía ahora me acucia el interés o la curiosidad por estos temas. Todo ello me valió dar numerosas conferencias, ser nombrado miembro de varios comités, reuniones, ser invitado por la IBM a una Reunión de Profesores Universitarios en el IBM European Educational Center en Blaricum (Holanda) e incluso en el verano de 1968 formar parte de un grupo de doce profesores europeos invitados por la IBM para visitar en un viaje espléndido y muy

instructivo unos doce Centros e instalaciones de la misma empresa invitante en los Estados Unidos y Canadá. Creo que hasta hoy, treinta años más tarde, ha ido creciendo en mí la sensación de que más que responder a sorpresa o reto científicos, sucumbí a una contraproducente curiosidad, cuando dediqué tanto tiempo a cuestiones no matemáticas planteadas por las ciencias del computador.

J.I.D. Tu capacidad para simultanear la gestión científica con un papel activo en la investigación está más que demostrada tras tu paso por la dirección del Departamento de Ecuaciones Funcionales y el Decanato de la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid hasta llegar al cargo de Rector en la Universidad de Deusto y en el ICAI a mediados de los años setenta. Eran unos años de cambio en los que la universidad hervía. ¿Tuvo la universidad española más importancia de la que los cronistas ahora la atribuyen en la tan rememorada transición democrática?

A.D. En efecto, en 1967 fui nombrado Director del recién creado Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid. Creo que lo fui sin interrupción hasta 1975, que fui nombrado Decano (el primero) de la primera Facultad de Matemáticas española, que surgía de la división de la Facultad de Ciencias en cinco Facultades, una por Sección. No llegué a cumplir un año de Decano, pues en Septiembre del mismo año de 1975 tomaba posesión como Rector de la Universidad de Deusto. A los dos meses moría Franco. Sólo fui Rector de Deusto durante dos cursos, 1975-1977, pues en septiembre de 1977 tomaba posesión como Rector del Instituto Católico de Artes e Industrias e Instituto Católico de Administración de Empresas (ICAI-ICADE) de Madrid. Me reincorporé al servicio activo como catedrático de Universidad con destino a la Cátedra de Análisis Matemático III de la Universidad Complutense de Madrid, de modo que recuperé la misma cátedra que había ocupado antes, aunque de momento de modo interino. Pasado el plazo para concurrir al concurso de traslado y siendo único concursante, el Ministerio de Educación y Ciencia me adjudicó la cátedra. En Septiembre de 1980 cesé como Rector de ICAI-ICADE y en septiembre de 1981 fui nuevamente nombrado Director del Departamento de Ecuaciones Funcionales, perteneciente ahora a la Facultad de Ciencias Matemáticas. Seguí de Director hasta el comienzo del curso 1983-84, en el que partí en Comisión de servicio por dos años para la Universidad Autónoma de Barcelona en Bellaterra. Mientras mi gestión académico-administrativa se limitó a la Dirección del Departamento, aunque su ejercicio ocupaba tiempo y causaba alguna que otra preocupación, lo desempeñé como servicio que valía la pena y al que era difícil

negarse. En Deusto di los dos años un curso de Lógica, que fue mi única actividad científica. La Universidad, en el País Vasco, efectivamente hervía. Había ya renunciado absolutamente a la cátedra de Caminos. En el ICAI-ICADE la tarea administrativa, y las clases en la Facultad no dejaban tiempo para más. Respondiendo a tu última pregunta sobre contribución de la Facultad de Ciencias y en particular de la Sección de Matemáticas y de nuestro Departamento al proceso de la transición democrática, me parece que puedo citar algunos hechos. Recuerdo que siendo Decano visité repetidas veces los estudiantes de la Facultad que estaban detenidos en el Ministerio de Gobernación de la Puerta del Sol. También, antes de que se publicaran los decretos de 18-7-72 para el próximo curso, escribí un artículo en el que se decía: "Si tal pretensión [de renunciar al empleo ordinario de la fuerza] llegara a manifestarse como imposible después que los estudiantes hubiesen sido sanamente politizados y aprendido a dialogar, preferiría cerrar la Universidad. Dado que existen elementos subversivos, parece imposible excluir absolutamente toda apelación a la fuerza pública, pero ésta debería intervenir sólo excepcionalmente y por iniciativa de las autoridades académicas universitarias." (Hechos y dichos, Zaragoza, Oct. 1972). El hecho más grave y significativo ocurrido en la Facultad de Ciencias fue el disparo a sangre fría de un Jefe de la Brigada Social contra el estudiante J. M. Mediavilla, que se encontraba frente la puerta principal de la Facultad y al que hirió gravemente (18-5-72). Yo no lo vi, pero sí lo vieron desde las ventanas de nuestro Departamento numerosos alumnos y profesores, varios de los cuales son ahora titulares, catedráticos e incluso académicos. Algunos de ellos firmaron un escrito denunciando el hecho, que me entregaron y cuyo texto leí en la Sesión de la Junta (23-5-72), convocada con ocasión de este disparo para escuchar el "Informe del Sr. Decano sobre los últimos acontecimientos..." Previamente, como Presidente, yo mismo había convocado para el lunes 22-5-72 una Reunión de la Sección de Matemáticas. Para mí el acto de mayor resonancia se produjo siendo Rector de la Universidad de Deusto y estando presidiendo el acto de apertura del curso 1976-77. Cuando el Secretario terminó de leer la Memoria del curso 1975-76, un grupo de estudiantes de Derecho subieron al estrado de la presidencia por propia iniciativa y pretendieron leer la contramemoria escrita que llevaban consigo. Inmediatamente se armó un escándalo. Me levanté, impuse silencio y les autoricé para que leyeran su contramemoria. Cuando terminó la lectura pareció que iban a marcharse, pero les indiqué la conveniencia de que se quedaran y escucharan como nosotros les habíamos escuchado; y se quedaron.

J.I.D. *Acercándonos al presente, permíteme que aborde tu más reciente etapa*

desde que regresaste a Cataluña en 1983. Tus energías ahora se encauzan hacia otras líneas, cultivadas siempre por ti, más cercanas al pensamiento humanista como historiador y filósofo de la ciencia. ¿En qué medida te está siendo útil tu experiencia como investigador en Matemática Aplicada ? Cuéntanos tus proyectos actuales.

A.D. El estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales da una visión muy amplia tanto de lo que son las matemáticas, como de sus aplicaciones. Naturalmente que esto me ha ayudado muchísimo en mi dedicación actual y exclusiva desde el curso 1983-84 al estudio de la Historia y Filosofía de las Matemáticas; y desde hace unos pocos años, también al estudio de las relaciones de las ciencias con la cultura y en particular con la teología. Sobre ello he publicado varios artículos, de los que menciono solamente los tres siguientes: Introducción, traducción y notas del *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* de Euler (1744); el cuaderno *Diálogo ciencia-fe*, en la colección Maragall, nº15; y *Newton-Clarke, Hanson y experiencia religiosa* pendiente de publicación por la Academia de Ciencias de Madrid.

J.I.D. *En lo que respecta a tu tiempo de ocio, sé que eres un experto en muchas otras cosas: aún me acuerdo de tu forma peculiar de jugar a tenis explotando tu experiencia de frontón. ¿Qué otras aficiones tienes?, ¿cómo han ido cambiando con los años?*

A.D. Desde mi juventud hasta que a los 28 años entré en la Compañía de Jesús (1943) practiqué mucho el deporte, especialmente el fútbol, el frontón a mano, el ping-pong y el excursionismo, y también algo el tenis. Pasé también muchísimas horas jugando al ajedrez y juegos de naipes. A este propósito he dicho alguna vez que, si todo el tiempo que he gastado jugando al ajedrez o a los naipes lo hubiera dedicado al estudio del chino, sin duda ahora lo hablaría perfectamente. Desde mi vuelta a Madrid (1955) hasta mi partida para Deusto (1975) recorrí todos los años el bellísimo Guadarrama, pinos y granito, desde la Maliciosa a la Mujer Muerta y también Gredos e incluso ya mayor subí al Calvitero, vértice de tres provincias (Ávila, Salamanca y Cáceres). También practiqué la natación en el pantano de San Juan y en el Mediterráneo. Actualmente practico la natación, también un poco el ajedrez y pequeñas excursiones por el Pirineo y la Cadena Prelitoral Catalana (Montseny, Sant Llorenç del Munt y Montserrat). Toda la vida he gozado jugando y aprecio extraordinariamente el valor lúdico y el aspecto lúdico de la vida. Por ejemplo, tener seriedad en la voluntad de ganar; saber perder; y lo más difícil: saber ganar no sólo durante el juego, sino sobre todo después del juego.

J.I.D. *Pasemos ahora al futuro. Hacerlo sin mencionar el final de siglo sería algo totalmente atípico. En nuestro paseo por tiempos pasados ya has aportado una visión retrospectiva muy valiosa, pero ¿qué imaginas del quehacer científico en el futuro?, ¿cómo influirá la gran accesibilidad de la información en la reflexión científica?*

A.D. Poco tengo que decir. Sólo enunciaré dos opiniones personales. Primera, me parece que el talante y el lenguaje auténticamente científicos, especialmente los matemáticos, irán en aumento durante el futuro próximo; contrariamente a lo que predijo en su tiempo nada menos que Diderot, principal autor de la Enciclopedia que constituye el máximo exponente de la Ilustración. Segunda, creo que el binomio I+D, o sea primero investigación, luego desarrollo, se irá invirtiendo apreciablemente en D+I, de modo que la consideración inicial determinante será el desarrollo; so pena de que las ciencias sean objeto de una creciente e insostenible valoración global negativa por parte de la sociedad. Si sucediera así, me parece que una consecuencia sería que dentro del ámbito de las matemáticas, la matemática aplicada saldría promocionada.

J.I.D. *He dejado deliberadamente para el final un tema que de haberlo suscitado antes hubiese inundado todo el resto de la entrevista. Tu persona y tu obra intelectual no pueden disociarse de tu vocación religiosa. No deja de llamar la atención que hoy que hace ya varios años que cayó el muro de Berlín, que la crisis de ideologías parece un hecho, no dejan de aparecer testimonios sobre la constante preocupación de los científicos por la religión: hace poco el físico teórico A. F. Rañada publicó Los científicos y Dios, libro atrayente plagado de testimonios concretos; el pasado 6 de Mayo El País dedicaba toda una página a la inminente publicación de los textos religiosos de Isaac Newton; y también, en el número de Abril de la revista News de la sociedad norteamericana homónima de SEMA, SIAM, aparecía un artículo sobre Stokes en el que se hacía amplia referencia a su profunda religiosidad. ¿Qué opinas de esta constante preocupación? ¿Cómo le has dado vida en tu caso?*

A.D. Ni los ilustrados y menos aún el positivista Comte y los neopositivistas tuvieron suficientemente en cuenta que la transcendencia, lo numinoso o lo místico, como diría Wittgenstein, cala en lo más hondo del espíritu de muchos hombres. Desde la antigüedad, son precisamente valores religiosos los que han dado origen y han conformado y desarrollado las grandes culturas. El valor religioso es imposible erradicarlo de una cultura. La Edad moderna, desde Galileo hasta los neopositivistas, incluyendo especialmente los ilustrados, han aportado a la cultura moderna numerosos auténticos valores. En esta aportación la cien-

cia ha desempeñado un importante papel. El valor religioso ha quedado muy erosionado, pero es el precio que el cristianismo en particular ha pagado por la purificación de sus muchos excesos doctrinales debido principalmente a no haber tenido suficientemente en cuenta la evolución de las culturas. El punto álgido de esta erosión y del ateísmo y agnosticismo religiosos en los científicos y técnicos hay que situarlo en el tercer cuarto del presente siglo. A partir de entonces surgen las primeras devaluaciones de la técnica y de la ciencia por parte de la sociedad. No sólo Einstein y Heisenberg y otros estudiosos de la Mecánica Cuántica fueron profundamente religiosos, sino que la primera guerra mundial acabó con el mesianismo técnico, y la bomba de Hiroshima está desalojando los científicos de su torre de marfil. No sólo el libro de Rañada que mencionas, sino otros como *Can Scientists Believe?* editado por el premio Nobel C. Mott o *Le savant et la foi* editado por Delumeau ofrecen testimonios profundamente religiosos de grandes científicos, que eran impensables en los años cincuenta. Esta evolución me perturbó más tarde, pero no me preocupó ni durante los años de la guerra civil que pasé en el frente ni durante los años siguientes en los que cursé la carrera de Caminos. Al acabarla (1943) por razones que entonces me parecieron absolutamente convincentes, solicité y fui admitido en la Compañía de Jesús. Mi dedicación a las matemáticas surgió lógicamente, después de un discernimiento con mis correligionarios jesuitas. No voy a proseguir, pero para terminar voy a exponer algo que he vivido intensamente a lo largo de los muchos años que he dedicado exclusivamente a la universidad. El profesor que da apasionadamente un curso universitario, quiéralo o no, sea consciente de ello o no, imparte también una visión del cosmos y de la vida, y los alumnos, quieránlo o no, sépanlo o no, quedan críticamente impactados por el curso sea hacia una aceptación o hacia un rechazo de valores o pseudovalores humanos, independientemente de los contenidos matemáticos o de los de la disciplina que se enseñe. Personalmente, para mí, después de vivir un tiempo en una especie de esquizofrenia entre los valores religiosos y los matemáticos, pronto llegué a la conclusión de que convergían en un único humanismo. A veces lo he resumido en una frase: Del púlpito a la tarima no hay solución de continuidad.

J.I.D. *Concluida esta entrevista no nos queda más que agradecerte por todas las clases de matemáticas y de vida que tantas personas hemos recibido de ti y desearte que sigas disfrutando durante muchos años esta paz y sosiego que se respiran en tu casa, en tu bello jardín, en Cerdenyola, junto a La Universidad y a tantos lugares queridos por ti.*

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ

ILDEFONSO DÍAZ, ACADÉMICO

A finales de mayo tuvo lugar en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales la elección de Académico Numerario para proveer la vacante de D. José M. Torroja, fallecido el pasado año. Nos cabe la satisfacción de anunciar que la elección recayó en nuestro compañero Ildefonso Díaz, hasta entonces Académico Correspondiente. Si en el número anterior de este Boletín reseñábamos su Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Pau, nos congratulamos de que una nueva distinción científica recaiga sobre un miembro de SEMA.

Felitaciones cordiales, pues, al amigo Ildefonso Díaz y también a la Sociedad, que tiene el honor de contar con tres miembros de ella entre los trece Académicos actuales de la Sección de Exactas: Alberto Dou, Amable Liñán y ahora Ildefonso.

MARIANO GASCA

INFORMACIÓN SOBRE LA NUEVA SERIE

“ESAIM PROCEEDINGS”

Hace algunos meses informé sobre las dos revistas electrónicas que la sociedad francesa SMAI ha lanzado, en el área del Control y de la Estadística y Probabilidad.

Más recientemente esta serie de publicaciones electrónicas se ha completado con una nueva iniciativa, ESAIM: Proceedings que, coordinada por Jean-Pierre Puel (Université de Versailles y Ecole Polytechnique de Paris) publica actas de congresos, workshops, escuelas de verano, etc. en las diversas áreas de la matemática aplicada e industrial.

El contenido científico de cada volumen será evaluado por el Comité Editorial que decidirá sobre su eventual publicación. Una vez que el volumen sea aceptado por el Comité Editorial, será publicado bajo el nombre y responsabilidad de los editores del volumen que serán nombrados por los organizadores del evento científico y la sociedad SMAI actuará como editorial.

El acceso electrónico a estas actas será totalmente gratuito. Los ficheros postscript y .dvi estarán a disposición del usuario pero no el fichero fuente. SMAI garantiza la accesibilidad y seguridad permanente de los ficheros.

Las instrucciones básicas para someter una volumen para su posible publicación son las siguientes:

1. Con el objeto de formalizar una propuesta hay que ponerse en contacto con la Secretaria Editorial en la siguiente dirección:

ESAIM: Proceedings
SMAI
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
FRANCIA
Fax : +33 1 44 07 03 64
e-mail : proc@esaim.emath.fr

y proporcionar las siguientes informaciones:

- Descripción del evento científico (congreso, workshop, escuela de verano,...)
- Fechas y localización del evento
- Organizador(es)
- Editores responsables de la publicación
- Comité científico
- Lista de conferenciantes
- Una estimación sobre el número de páginas del volumen

2. Decisión sobre la publicación. Cada propuesta es trasladará a uno de los miembros del Comité Editorial que realizará una recomendación al Comité Editorial sobre la posible publicación. Este Comité tomará una decisión definitiva. En caso de que la publicación sea aceptada, los editores habrán de proporcionar el contenido íntegro del volumen con un informe de un experto sobre cada una de las contribuciones contenidas en el volumen. El Comité Editorial se reserva el derecho de rechazar aquellos artículos que no reúnan los requisitos de la serie ESAIM.

3. Formato de los volúmenes. Cada volumen habrá de ser homogéneo y estar preparado utilizando el mismo formato TeX o LaTeX para cada artículo. El formato es dejado a la elección del editor del volumen, pero se recomienda usar el formato LaTeX2e disponible en el fichero `proc.sty`.

La paginación habrá de ser continua en cada volumen. La altura y anchura máximas de cada página será de 23.5 y 17 cms respectivamente.

4. Presentación de los artículos. Cada artículo deberá ir acompañado de un título que no habrá de contener símbolos matemáticos, ni símbolos griegos ni índices con el objeto de que pueda aparecer en HTML. Es conveniente que cada artículo contenga también un resumen en inglés y francés que habrá de respetar las mismas normas.

5. Disposiciones económicas. El acceso electrónico de los lectores será gratuito. SMAI requerirá una contribución financiera por cada volumen, que dependerá del número de páginas.

ENRIQUE ZUAZUA, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

AVISO IMPORTANTE

Durante este último trimestre del año 96 se va a elaborar el nuevo anuario de la sociedad (con validez para dos años). Para que éste sea lo más útil posible, conviene que los datos de todos los socios estén actualizados. Si algún socio ha cambiado de dirección, e-mail, teléfono, status profesional, etc desde la redacción del último anuario y todavía no lo ha comunicado, puede hacerlo a la sede social de SEMA:

Despacho 525
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense, 28040 Madrid
e-mail: sema@aq.upm.es

También queremos recordar que la sociedad se ahorra bastantes gastos bancarios si las cuotas están domiciliadas. Para ello, basta rellenar la parte de la ficha de inscripción destinada a tal efecto.

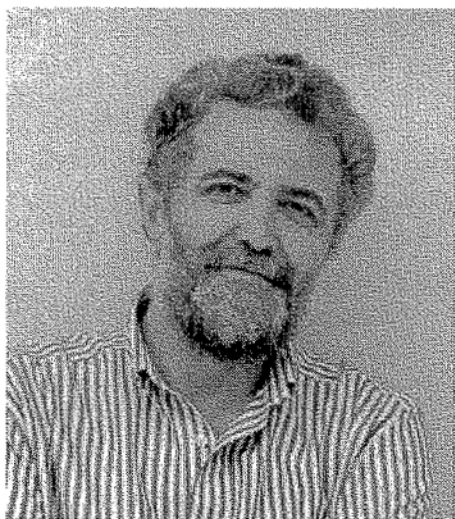
El pasado mes de mayo asistí en Reading, cerca de Londres, y como Presidente de SEMA, a la reunión del Comité CICIAM, que es el que tutela la organización de los Congresos ICIAM. La sucesión de estos Congresos Internacionales de Matemática Aplicada e Industrial comenzó en París en 1987, siguió en Washington en 1991 y el último de ellos, por ahora, se celebró en 1995 en Hamburgo. En la reunión se supervisaron las cuentas finales del Congreso de Hamburgo y se discutió largo y tendido el presupuesto presentado por los organizadores del ICIAM'99 que tendrá lugar en Edimburgo, con Julian Hunt como Chairman. Este Comité, del que forma parte SEMA, representada por su Presidente, decide la sede de futuros ICIAM. Se presentó la candidatura de Sidney para el ICIAM'2003, que fue aceptada provisionalmente, puesto que la aceptación definitiva se hace con seis años de avance y no siete.

También SEMA forma parte de ECCOMAS (European Community On Computational Methods for Applied Sciences) cuyo Congreso ECCOMAS 96 ha tenido lugar en París en setiembre. Aquí la organización es diferente: hay un Bureau formado por doce miembros del que forma parte Eugenio Oñate, Presidente de SEMNI y que se reúne dos o tres veces al año en diferentes ciudades. Las últimas anteriores al Congreso han sido en Roma y el pasado 8 de julio en París. En esta sesión de julio discutieron si ampliar el Bureau para dar cabida a más sociedades, como SEMA, y al final acordaron que aquél siga con los doce miembros actuales actuando como Comisión Permanente de un nuevo órgano que se llamará Asamblea General, en la que hay al menos un representante de cada sociedad miembro, con algunas de ellas con 2 ó 3, dependiendo del número de asociados. El Comité Ejecutivo de SEMA nombró a Alfredo Bermúdez de Castro como su representante. En la reunión de esa Asamblea que tuvo lugar en París durante el ECCOMAS 96 se eligieron cuatro personas (Wunderlich, Mang, Morgan y Owen) para reemplazar a los cuatro miembros del Bureau que cesan (Deville, Mang, Morgan, Periaux). Observad que dos han sido reelegidos y es que parece que hay un choque de influencias políticas dentro de ECCOMAS con la IACM (International Association of Computational Mechanics) que hace que ningún miembro del Bureau de ECCOMAS quiera dejar de serlo y que produce ciertas tensiones. Los miembros cesantes habían sido decididos por sorteo y podían ser reelegidos.

En la reunión del 8 de julio el Bureau aceptó la propuesta de SEMNI para organizar el ECCOMAS 2000 en Barcelona.

Están ya en vigor acuerdos de reciprocidad con la SMAI de Francia y la SIMAI de Italia. Ambos consisten en una reducción del 20% de la cuota de dichas Sociedades al socio de SEMA. Se está hablando de hacer algo análogo con SEMNI y también está en trámite el acuerdo de reciprocidad con la American Mathematical Society, que supondría un importante ahorro en las cuotas de los miembros de SEMA que se hagan socios de esa sociedad.

Y finalmente, quiero comunicar que en la Asamblea General del 24 de setiembre, como estaba previsto, terminó el año para el que fui elegido Presidente de SEMA. En la misma Asamblea fue refrendado como nuevo Presidente Juan Luis Vázquez (foto), que lo será por dos años al haberse modificado los Estatutos en ese aspecto. A la vez que doy la bienvenida y mis mejores deseos a Juan Luis os agradezco a todos vuestra colaboración, en particular a los miembros del Comité



Ejecutivo de este año y muy especialmente a Gerard Gómez y Alfonso Casal, Vicepresidente y Secretario, respectivamente. En la misma Asamblea fueron elegidos miembros del Comité Ejecutivo Rafael Bru, Vicent Casselles y Santiago de Vicente, en sustitución de los miembros salientes Eduardo Casas, Rafael Ortega y yo mismo.

Os animo a todos a que incrementemos nuestros esfuerzos por la consolidación de la Sociedad, y por que el Boletín aumente su importancia como vínculo de unión y de comunicación. A este respecto quiero destacar y agradecer como se debe la meritoria labor que están haciendo Francisco Lisboa y su equipo.

La Sociedad ha tenido fuera de nuestras fronteras muy buena acogida, y lo único que se echa en falta es un mínimo de infraestructura administrativa estable. Para ello es indispensable aumentar considerablemente nuestro número de socios. Paradójicamente, nuestro número este año ha disminuido algo, pero ello ha sido debido a que se ha hecho un esfuerzo de actualización de datos y pago de cuotas y se ha mantenido como socios sólo a quienes realmente querían

Mathematical Modelling of Rods

Luis Trabucho y Juan M. Viaño

Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV, pages. 487-974

P.G. Ciarlet y J.L. Lions, Editores

North Holland Elsevier, Amsterdam, 1996

ISBN 0-444-817948

Esta colaboración constituye una presentación unificada y puesta al día de los trabajos de los autores y sus colaboradores en el campo de la modelización de vigas elásticas por métodos asintóticos. Es un compendio de los trabajos más importantes de los últimos doce años sobre la obtención y justificación matemática de modelos de comportamiento de estructuras elásticas tipo viga obtenidos por métodos asintóticos, en combinación con técnicas de análisis funcional y análisis numérico.

Tal como los autores escriben en el prólogo, "a pesar de la ya larga historia de las teorías de vigas elásticas (Bernoulli-Navier, Saint-Venant, Timoshenko, Vlassov,...) no se trata, en absoluto, de un tema poco actual o ya cerrado... En efecto, las necesidades tecnológicas actuales en el diseño de estructuras cada vez más ligeras, resistentes y flexibles (plataformas petrolíferas, estructuras espaciales, torres, puentes, antenas, etc.) obligan a buscar modelos cada vez más precisos para describir el equilibrio cuasi-estático o dinámico de estructuras tipo viga, tanto de sección llena como de pared fina.. El trabajo de L. Trabucho y J.M. Viaño constituye una contribución relevante en este campo de la matemática aplicada. En sus 487 páginas y 10 capítulos se abordan la obtención y justificación de modelos de flexión, de torsión, de Timoshenko, lineales y no lineales, con efectos termoelásticos, etc. en vigas isótropas y anisótropas, de sección constante y variable, de sección llena o de pared delgada, simplemente conexa o no. Se obtienen así generalizaciones de los modelos clásicos más conocidos que incluyen efectos hasta ahora no contemplados y se justifican, desde el punto de vista matemático, mostrando que se obtienen como límite del modelo tridimensional de elasticidad cuando el área de la sección transversal tiende a cero.

PEREGRINA QUINTELA

Numerical Hamiltonian Problems

J.M. Sanz Serna y M.P. Calvo

Editado por Chapman & Hall, 1994

207 páginas. ISBN 0-412-54290-0

En este libro se presenta una introducción a la teoría de integración simpléctica de problemas hamiltonianos. El libro consta de 14 capítulos, de los cuales los cinco primeros son de carácter introductorio: dos sobre el formalismo hamiltoniano y tres sobre métodos numéricos. El núcleo del libro lo constituyen los capítulos del 6 al 10. Los cuatro últimos capítulos contienen material más avanzado.

CONTENIDOS: 1 - Hamiltonian systems. 2 - Symplecticness. 3 - Numerical methods. 4 - Other conditions. 5 - Implementation. 6 - Symplectic integration. 7 - Symplectic order conditions. 8 - Available symplectic methods. 9 - Numerical experiments. 10 - Properties of symplectic integrators. 11 - Generating functions. 12 - Lie formalism. 13 - High-order methods. 14 - Extensions.

EDUARDO CASAS

En esta sección del boletín recogeremos los libros publicados en el campo de la Matemática Aplicada. Por lo tanto, si sois autores de algún libro, aquí podéis encontrar un lugar para darlo a conocer. También será bienvenida información sobre novedades bibliográficas correspondientes a otros autores y que consideréis de gran interés. Los datos sobre los libros para su inclusión en esta sección podéis enviarlos por correo electrónico a nuestra dirección:

sema@masun1.unican.es

RESÚMENES DE TESIS

ESTUDIO DE SOLUCIONES DÉBILES DEL SISTEMA DE VLASOV-POISSON-FOKKER-PLANCK

Doctorando: José Antonio Carrillo de la Plata.

Director: Juan Soler Vizcaíno.

Defensa: 31 de Mayo de 1996, Universidad de Granada.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Esta Tesis estudia el sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP) en teoría cinética de partículas. El sistema de VPFP describe la evolución de la distribución de partículas en el espacio de fases en el caso en que las partículas están sometidas al campo que crean ellas mismas debido a fuerzas de tipo electrostático o gravitatorio.

Los dos primeros capítulos obtienen resultados de existencia de soluciones débiles del sistema de VPFP con datos iniciales en espacios L^p y en espacios de medidas (espacios de Morrey). Posteriormente, se estudia el comportamiento asintótico del sistema en todo el espacio en el caso en que el parámetro de fricción entre partículas sea nulo. En este caso se demuestra que para determinadas soluciones débiles del sistema de VPFP (cuya existencia se asegura al menos para dato inicial pequeño) el comportamiento a largo plazo de la distribución de partículas se asemeja a la solución fundamental del correspondiente problema lineal, es decir, el efecto del potencial interno del sistema a largo plazo es despreciable. Por último se estudia el comportamiento asintótico en dominios acotados con condiciones de reflexión para la ecuación cinética y condiciones de tipo Dirichlet homogéneas para el potencial. En este caso se demuestra que la distribución de partículas tiende a ser una distribución Maxwelliana en velocidad que en espacio viene determinada por un potencial límite del sistema solución de una ecuación elíptica no local.

POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES: TEORÍA Y APLICACIONES

Doctorando: Defez Candel, Emilio.

Director: Jodar Sánchez, Lucas.

Defensa: Universidad Politécnica de Valencia, 4 de junio de 1996.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta memoria se introduce el concepto de ortogonalidad de una sucesión de polinomios matriciales respecto a funciones lineales, o bilineales conjugados matriciales. Dichos conceptos estructuran las familias de polinomios matriciales de Laguerre, Hermite y Gegenbauer, introducidas en los dos últimos años.

Propiedades importantes como la relación de tres términos, el teorema de Favard o la fórmula de Christoffel-Darboux se extienden para este concepto de ortogonalidad.

El concepto de funcional bilineal matricial definido positivo permite extender el concepto de ortogonalidad a espacios de funciones más generales, de un espacio de Banach, que en el caso escalar coincide con el espacio de Hilbert clásico de las funciones de cuadrado integrable respecto a una función peso.

El problema de la mejor aproximación matricial introduce de manera natural el concepto de serie de Fourier matricial respecto a una sucesión de polinomios ortogonales matriciales. Análogos matriciales de las desigualdades de Bessel-Parseval y del lema de Riemman-Lebesgue son demostrados, así como la totalidad de familias de polinomios matriciales.

Los resultados son aplicados a la obtención de fórmulas de cuadratura matricial con obtención de cotas de error, y a la obtención de teoremas de desarrollo en serie de polinomios de Hermite matriciales.

ALGUNOS PROBLEMAS EN ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES RELACIONADOS CON LA TEORÍA DE CONTROL

Doctorando: Angel Manuel Ramos del Olmo.

Director: Jesús Ildefonso Díaz Díaz.

Defensa: 3 de Julio de 1996, Universidad Complutense de Madrid.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta tesis se abordan varios problemas en ecuaciones en derivadas parciales relacionados con la teoría de Control.

En el Capítulo I estudiamos la *controlabilidad aproximada* de algunos problemas parabólicos semilineales de segundo orden. La mayoría de los resultados tratan sobre el control de problemas con *observación final*, i.e., se muestra que el conjunto $\{y(T, \cdot; v)\}$ generado por los valores de las soluciones en el tiempo T asociados a unos controles v es denso en $L^2(\Omega)$ cuando v recorre el conjunto de

controles admisibles. No obstante, también se considera un problema con *observación en la frontera*. Las dos primeras secciones de este capítulo muestran dos métodos distintos para demostrar la propiedad de controlabilidad aproximada. En la Sección 1 se ilustra el llamado *método de cancelación*, mientras que en la Sección 2 se utiliza el Teorema de Punto Fijo de Kakutani. En las Secciones 3 y 4 mostramos resultados positivos y negativos sobre la controlabilidad aproximada de ciertos problemas parabólicos de orden dos y de orden superior a dos según sea el carácter (sublineal o superlineal) de la no linealidad que interviene en el problema.

El segundo capítulo trata sobre la *factorización* de un problema elíptico de orden dos. Se trata de reducir dicho problema a un sistema de ecuaciones de primer orden desacopladas (en el sentido de que tales ecuaciones se pueden resolver iterativamente de una en una). Utilizamos la técnica de *inclusión invariante* introducida por R. Bellman. Dicha técnica ha sido muy usada para desacoplar los sistemas resultantes en problemas de Control Optimal asociados a ecuaciones de evolución. En esos casos, una de las ecuaciones del sistema desacoplado resultante es una ecuación de tipo Riccati. De hecho, en las ecuaciones desacopladas resultantes en nuestro problema elíptico también aparece una ecuación de tipo Riccati. En la Sección 4 mostraremos que este hecho no es casual, sino que se debe a la equivalencia entre nuestro problema y un problema de control optimal generado por una ecuación de evolución de tipo parabólico. En la Sección 5 se considera la discretización por diferencias finitas del problema elíptico y se muestra que la aplicación de la técnica de la inclusión invariante sobre el sistema lineal resultante conduce a la factorización LU por bloques de la matriz tridiagonal por bloques que representa al operador de Laplace sobre el rectángulo. Por último en las Secciones 6, 7 y 8 se generalizan los resultados de secciones anteriores al caso de distintos dominios bidimensionales más generales que el rectángulo.

TRATAMIENTO MATEMÁTICO
DE ALGUNOS MODELOS NO LINEALES EN CLIMATOLOGÍA

Doctorando: Lourdes Tello del Castillo.

Director: Jesús Ildefonso Díaz Díaz.

Defensa: 3 de Julio de 1996, Universidad Complutense de Madrid.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta memoria se abordan ciertos modelos en derivadas parciales no lineales llamados de Balance de Energía cuya incógnita es la tem-

peratura superficial de la Tierra. Por este motivo, el dominio espacial se supone dado por una variedad Riemanniana compacta sin borde. En primer lugar se estudia el modelo de evolución (una ecuación en derivadas parciales parabólica no lineal con un término fuente multívoco) y se da respuesta a las cuestiones de existencia y unicidad y no unicidad de soluciones. Asimismo se dan resultados sobre el comportamiento asintótico de las soluciones cuando la variable temporal tiende a infinito.

Los modelos estudiados son de especial relevancia por ser extraordinariamente sensibles a pequeñas variaciones de parámetros solares y terrestres que aparecen en su formulación. En la memoria se estudia la unicidad y multiplicidad de los estados de equilibrio en función del parámetro llamado constante solar y se describe la multiplicidad mediante un diagrama de bifurcación cuya rama principal tiene forma de "ese".

Finalmente se estudia la aproximación numérica para una versión unidimensional del modelo de evolución cuyo operador de difusión posee un peso degenerado, dando así rigor matemático a experiencias numéricas llevadas a cabo anteriormente por algunos climatólogos.

INICIALIZADORES PARA LAS ECUACIONES IMPLÍCITAS DE LOS MÉTODOS RK PARA SISTEMAS HAMILTONIANOS

Doctorando: María Pilar Laburta Santamaría.

Director: Manuel Calvo Pinilla y Juan Ignacio Montijano Torcal.

Defensa: 8 de Julio de 1996, Universidad de Zaragoza.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Un aspecto importante desde el punto de vista computacional para la resolución de los sistemas algebraicos correspondientes a las etapas de un método Runge-Kutta (RK) implícito, es la elección de los valores iniciales para el esquema iterativo que los resuelve. Si estos valores no son suficientemente exactos, la convergencia de dicho esquema puede fallar o hacer que el número de iteraciones requeridas en cada paso de la integración sea excesivamente alto.

En el primer capítulo se estudian algoritmos que proporcionan valores iniciales para métodos RK implícitos. Se proponen inicializadores que no requieren costo adicional y también otros que necesitan hacer una o dos evaluaciones adicionales de función derivada por paso. Para cada uno de estos algoritmos se obtienen las condiciones de orden y se estudia el orden máximo que alcanzan, dando un método para su construcción. Realizado el estudio teórico, se cons-

truyen algoritmos de distintos órdenes para las fórmulas de Gauss de dos, tres y cuatro etapas.

El capítulo segundo se dedica al estudio de inicializadores para métodos Runge-Kutta-Nyström (RKN) implícitos. Se consideran también tres tipos de algoritmos según su coste adicional, y tras obtener resultados teóricos sobre su existencia y orden, se construyen distintos algoritmos para los métodos RKN inducidos respectivamente por los métodos RK de Gauss de dos y tres etapas.

Finalmente, en el capítulo tercero se realizan experimentos numéricos con varios sistemas hamiltonianos, utilizando los algoritmos obtenidos en los capítulos precedentes para las fórmulas de Gauss. Con ellos se pone de manifiesto que la utilización de valores iniciales de mayor orden de aproximación conduce, en general, a un menor costo computacional final.

ALGUNOS TÓPICOS SOBRE SOLUCIONES DE VISCOSIDAD EN ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI

Doctorando: José María Rey Cabezas.

Director: Gregorio Díaz Díaz.

Defensa: 8 de Julio de 1996, Universidad Complutense de Madrid.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En este Trabajo se presentan algunas propiedades intrínsecas de las soluciones de ecuaciones de la forma $u_t - H(x, u, \nabla u) = 0$ en el marco de las *soluciones de viscosidad eventualmente discontinuas*. Comenzamos presentando algunos modelos que aparecen en las aplicaciones gobernados por ecuaciones de la forma anterior (*Optica Geométrica, frente de propagación de una llama, problemas de Control Optimo Determinista,...*). La Memoria, esencialmente, está estructurada en tres Partes:

Propiedades intrínsecas. El uso de las *soluciones de similaridad*, la *fórmula de representación de Lax-Oleinik*, argumentos de *convexidad* y el *Teorema de Verificación* nos permiten obtener propiedades interesantes como la clase de datos iniciales admisibles para el problema de Cauchy, la descripción del dato inicial, el *horizonte maximal* hasta donde están definidas las soluciones, el comportamiento asintótico espacial,... También presentamos resultados de *unicidad* y *regularidad* en los cuales van a jugar un papel fundamental la propiedad del *cono de dependencia* y las *estimaciones del gradiente*. Otra aportación interesante es el concepto de D^+ -solución con el cual damos sentido a cómo, mediante su *envuelta semicontinua superior*, una función *discontinua* puede ser la *única* solución de la ecuación.

Propiedad de extinción en tiempo finito. Hacemos un estudio de la ecuación anterior cuando el *hamiltoniano* $H(x, r, p) = \mathcal{H}(p) - \lambda\beta(r)$, siendo β una función localmente lipschitziana. Bajo la hipótesis de *absorción fuerte* obtenemos propiedades sobre la función *primer instante de extinción*, entre las que destacamos: existencia, regularidad, tasa de extinción y comportamiento asintótico.

Comportamiento asintótico temporal de las soluciones. Ahora hacemos la elección $\mathcal{H}(p) = R|p|^m$ y $\beta(r) = r^q$ donde $R > 0$, $\lambda \geq 0$ y $q \in \mathbb{R}$. A partir del *balance intrínseco* $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$, determinado por las diversas soluciones de similitud y los comportamientos del dato inicial $u_0(x) = A|x|^{1+\alpha}$, obtenemos varias regiones en el plano (α, q) en el que se dan los diversos comportamientos: extinción, decaimiento potencial, crecimiento potencial, explosión en tiempo finito, no existencia de solución,...

SOLUCIONES DÉBILES Y RENORMALIZADAS DE ALGUNAS E.D.P. NO LINEALES CON ORIGEN EN MECÁNICA DE FLUIDOS

Doctorando: Blanca Climent Ezquerro.

Director: Enrique Fernández Cara.

Defensa: 16 de septiembre de 1996, Universidad de Sevilla.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Se estudian ciertas variantes de las ecuaciones de Navier-Stokes. Concretamente, constan de una ecuación de movimiento N -dimensional, la condición de incompresibilidad y una ecuación escalar acoplada para una incógnita adicional $k = k(x)$ en el caso estacionario y $k = k(x, t)$ en el de evolución. Entre otras posibilidades, estos sistemas modelan el comportamiento de ciertos fluidos turbulentos.

Se hace un estudio teórico de existencia y unicidad de solución. Las dificultades principales las presenta la ecuación escalar. En particular, su segundo miembro está en L^1 y en el primero aparecen términos no lineales del tipo $\nabla \cdot (\mu(k)\nabla k)$ y $\nabla \cdot (B(k))$, donde μ y B sólo son funciones continuas (no se imponen condiciones de crecimiento). Esto hace que sea necesario considerar el concepto de solución débil-renormalizada. Obtenemos existencia para $N = 2$ ó 3 ($N = 2$ en el caso de evolución), así como unicidad de solución débil en el caso estacionario y de solución regular en evolución.