

CORRESPONSALES

Almería. Ramón Carreño	ramon@ualm.es
Barcelona. Gerard Gómez	gomez@cerber.mat.ub.es
Bilbao. Eduardo Sáinz de la Maza	eduardo@picasso.lc.ehu.es
Córdoba. Mercedes Marín Beltrán	malmabem@lucano.uco.es
Coruña. José Manuel Rodríguez Seijo	mmrseijo@udc.es
Extremadura. Mariano Rodríguez-Arias	arias@ba.unex.es
Granada. José Miguel Alonso Alonso	jalonso@goliat.ugr.es
Huelva. Manuel Merino Morlesín	morlesin@uhu.es
Islas Baleares. Vicent Casselles	dmivca0@PS.uib.es
Jaén. Javier Muñoz	fax:953-212400, telef:953-212409
Madrid (Autónoma). Juan Luis Vázquez	jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es
Madrid (Complutense y Politécnica). Francisco Padiá	jfpadiá@sunma4.mat.ucm.es
Málaga. Francisco Palma Molina	palma@ccuma.uma.es
Oviedo. Javier Valdés García	valdes@pinon.ccu.uniovi.es
Santander. Luis Alberto Fernández Fernández	lafernandez@besaya.unican.es
Santiago de Compostela. Peregrina Quintela	pere@zmat.usc.es
Sevilla. Tomas Chacón	chacon@numer.us.es
Valencia. José M. Mazón	mazon@mac.uv.es
Valladolid. Begoña Cano	becano@mac.cie.uva.es
Vigo. José Durany	durany@dma.uvigo.es
Zaragoza. Francisco Javier Sayas	jsayas@posta.unizar.es



responsables de sección

Vida de la Sociedad

Juan Luis Vázquez
Universidad Autónoma de Madrid
jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es

Congresos y seminarios

Luis Abia
Universidad de Valladolid
abia@mac.cie.uva.es

Novedades bibliográficas

Eduardo Casas
Universidad de Cantabria
sema@macc.unican.es

Actividad académica

Vicent Caselles
Universidad de las Islas Baleares
dmivca0@PS.unib.es

Relaciones con la industria

Juan Manuel Viaño
Universidad de Santiago de Compostela
viano@zmat.usc.es

LA PORTADA

Superficie de Poincaré y red homoclínica de la trayectoria inestable.
Tomada del artículo de F. Borondo, R. Guantes y S. Miret-Artés que
aparece en este número

sumario

Editorial	2
Temas:	
<i>Controllability of incompressible fluids</i> , por Jean-Michel Coron	3
<i>Una introducción al análisis no estándar mediante técnicas algebraicas</i> , por Vieri Benci	17
<i>"Scattering" caótico y la estabilidad del sistema solar</i> , por F. Borondo, R. Guantes y S. Miret-Artés	27
<i>El mundo de la ciencia y las matemáticas del mundo</i> , por Jesús Ildefonso Díaz	36
La sociedad	57
Reseñas	65
Resúmenes de tesis	73

edición

Editor jefe

FRANCISCO LISBONA CORTÉS
Dp. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

Editores

ANTONIO ELIPE SÁNCHEZ
Grupo de Mecánica Espacial
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

FCO. JAVIER SAYAS GONZÁLEZ
Dp. Matemática Aplicada
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza

Colabora el Servicio de Publicaciones
de la Universidad de Zaragoza

Dirección editorial: Departamento de Matemática Aplicada, Edificio de Matemáticas, primera planta, Campus Universitario, 50009 Zaragoza.
e-mail: sema@posta.unizar.es Fax: 976 76 11 25

CONTROLLABILITY OF INCOMPRESSIBLE FLUIDS

JEAN-MICHEL CORON¹

ANALYSE NUMÉRIQUE ET EDP, BÂTIMENT 425
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD ET CNRS
91405 ORSAY CEDEX-FRANCE

e-mail: Jean-Michel.Coron@math.u-psud.fr

Abstract

We briefly survey some recent results on the controllability of the Euler and Navier-Stokes equations of incompressible fluids.

1 Introduction

Due to recent progress in advanced technologies in many fields of engineering sciences, applications of flow control are developing very quickly; see, for example, [31] as well as the proceedings of various conferences of the American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA Orlando 93, AIAA Reno 94, ...). In this paper we survey only a tiny and theoretical part of the recent results obtained in flow control, namely the results on a question raised by J.-L. Lions [29] [30] on the controllability of the equations of incompressible fluids. Roughly speaking J.-L. Lions's question is the following one: given two divergence free velocity vector fields on the domain occupied by the incompressible fluid, can one pass from the first velocity vector field to the second one by acting in a suitable way on the fluid on a given part of the domain or of the boundary of the domain? As we will see, the situation is now rather well understood for the case of perfect fluids, i.e. in the case of the Euler equations of incompressible perfect fluids. But we have only partial results in the case of viscous fluids, i.e. in the case of the Navier-Stokes equations of incompressible fluids.

Let us introduce some notations. We consider a bounded, nonempty, connected and open subset Ω of class C^∞ in the l dimensional space \mathbb{R}^l , $l = 2, 3$.

¹Resumen de la conferencia inaugural del Seminario del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid (curso 1997-98)

Let $\Gamma^\#$ be an open subset of $\Gamma := \partial\Omega$ and let $\Omega^\#$ be an open subset of Ω . We assume that

$$\Gamma^\# \cup \Omega^\# \neq \emptyset. \quad (1)$$

We denote by n the outward unit normal vector field on Γ . The set $\Gamma^\#$ is the part of the boundary and $\Omega^\#$ is the part of the domain Ω on which the control acts. The fluid that we consider is incompressible so that the velocity field y satisfies

$$\operatorname{div} y = 0.$$

On the part of the boundary $\Gamma \setminus \Gamma^\#$ where there is no control the fluid does not cross the boundary: it satisfies

$$y \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma^\#. \quad (2)$$

When the fluid is viscous it satisfies on $\Gamma \setminus \Gamma^\#$, besides (2), some extra conditions which will be specified later on. For the moment being, let us just call by **BC** all the boundary conditions (*including* (2)) satisfied by the fluid on $\Gamma \setminus \Gamma^\#$.

Let us introduce the following definition

Definition 1.1 *A trajectory of the Navier-Stokes or Euler control system on the interval of time $[0, T]$ is an application $y : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^l$ of class C^∞ such that, for some function $p : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ of class C^∞ ,*

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = 0 \text{ in } (\bar{\Omega} \setminus \Omega^\#) \times [0, T], \quad (3)$$

$$\operatorname{div} y = 0 \text{ in } \bar{\Omega} \times [0, T], \quad (4)$$

$$y(\cdot, t) \text{ satisfies the boundary conditions BC on } \Gamma \setminus \Gamma^\# \forall t \in [0, T]. \quad (5)$$

The nonnegative real number ν appearing in (3) is the viscosity. It is equal to 0 if the fluid is perfect. In that case (3) is simply the Euler equations (for incompressible fluids)

$$\frac{\partial y}{\partial t} + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = 0 \text{ in } (\bar{\Omega} \setminus \Omega^\#) \times [0, T]. \quad (6)$$

When $\nu > 0$, (3) is the Navier-Stokes equations.

J.-L. Lions problem of controllability is the following one: let $T > 0$, let y_0 and y_1 in $C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ be such that

$$\operatorname{div} y_0 = 0 \text{ in } \bar{\Omega}, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} y_1 = 0 \text{ in } \overline{\Omega}, \quad (8)$$

$$y_0 \text{ satisfies the boundary conditions BC on } \Gamma \setminus \Gamma^\#, \quad (9)$$

$$y_1 \text{ satisfies the boundary conditions BC on } \Gamma \setminus \Gamma^\#, \quad (10)$$

does there exist a trajectory y of the Navier-Stokes or Euler control system such that

$$y(\cdot, 0) = y_0 \text{ in } \overline{\Omega}, \quad (11)$$

$$y(\cdot, T) = y_1 \text{ in } \overline{\Omega}? \quad (12)$$

That is to say, starting with the initial data y_0 for the velocity field, we ask whether there are trajectories of the control system considered (Navier-Stokes if $\nu > 0$, Euler if $\nu = 0$) which, at a fixed time T , are equal to the given velocity field y_1 . If this problem has always a solution one says that the control system considered is exactly controllable.

Note that (3), (4), (5) and (11) have many solutions. In order to have uniqueness one needs to add extra conditions. These extra conditions are the controls.

Of course due to the smoothing of the Navier-Stokes equations one cannot expect (12) in general for the Navier-Stokes equation: when $\nu > 0$ one replaces (12) by

$$y(\cdot, T) \text{ is "close" to } y_1. \quad (13)$$

for an appropriate topology –see [29] [30]–; we will see also in section 3 a stronger way to replace (12) in order to recover a natural definition of (exact) controllability of the Navier-Stokes condition.

Our survey is organized as follows

- In section 2 we consider the case of the Euler control system,
- In section 3 we consider the case of the Navier-Stokes control system.

2 Controllability of the Euler equations

In this section the boundary conditions BC (5), (9), and (10) are respectively

$$y(x, t) \cdot n(x) = 0 \forall (x, t) \in (\Gamma \setminus \Gamma^\#) \times [0, T], \quad (14)$$

$$y_0(x).n(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma \setminus \Gamma^\#, \quad (15)$$

$$y_1(x).n(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma \setminus \Gamma^\#. \quad (16)$$

For simplicity we assume that

$$\Omega^\# = \emptyset,$$

i.e. we study the case of boundary control (see [7] when $\Omega^\# \neq \emptyset$ and $l = 2$). In that case a control is given by $y.n$ on $\Gamma^\#$ with $\int_{\Gamma^\#} y.n = 0$ and by $\text{curl } y$ if $l = 2$ and $\text{curl } y.n$ if $l = 3$ at the points of $\Gamma^\# \times [0, T]$ where $y.n < 0$: these boundary conditions, (14), and the initial condition (11) imply the uniqueness of the solution to the Euler equations (6) -up to an arbitrary function of t which may be added to p -; see also [25] for the existence of solution.

Let us first point out that in order to have (exact) controllability one needs that

$$\Gamma^\# \text{ intersects any connected component of } \Gamma. \quad (17)$$

Indeed, let Γ_i be a connected component of Γ which does not intersect $\Gamma^\#$ and assume that, for some smooth Jordan curve C_0 on Γ_i (if $l = 2$ one takes $C_0 = \Gamma_i$),

$$\int_{C_0} y_0.ds \neq 0 \quad (18)$$

but that

$$y_1(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_i. \quad (19)$$

Then there is no solution to our problem, that is there is no $y \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^2)$ and $p \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R})$ such that (4), (6), (11), (12), and (14) hold. Indeed, if such a solution (y, p) exists, then, by Kelvin's law,

$$\int_{C(t)} y(\cdot, t).ds = \int_{C_0} y_0.ds, \quad (20)$$

where $C(t)$ is the Jordan curve obtained, at time t , from the points of the fluids which at time 0 were on C_0 ; in other words $C(t)$ is the image of C_0 by the flow map associated to the time-varying vector field y and to the time interval $[0, T]$. But (12), (18), (19) and (20) are in contradiction.

Conversely, if (17) holds, then the Euler control system is controllable:

Theorem 2.1 *Assume that $\Gamma^\#$ intersects any connected component of $\partial\Omega$. Then the Euler control system is exactly controllable.*

Theorem 2.1 has been proved in

- [6] when Ω is simply-connected and $l = 2$,
- [7] when Ω is multi-connected and $l = 2$,
- [21] when Ω is contractible and $l = 3$,
- [22] when Ω is not contractible and $l = 3$.

The strategy of the proof of Theorem 2.1 relies on a method described in [6], [7], and [8] under the name of “return method” and introduced in [5] for a stabilization problem. Roughly speaking it consists in looking for (\bar{y}, \bar{p}) such that (4), (6), (11), (12) hold, with $y = \bar{y}, p = \bar{p}, y_0 = y_1 = 0$ and such that the linearized control system around the trajectory \bar{y} is controllable under the assumptions of Theorem 2.1. With such a (\bar{y}, \bar{p}) one may hope that there exists (y, p) -close to (\bar{y}, \bar{p}) - satisfying the required conditions, at least if y_0 and y_1 are “small”. Finally, by using some scaling argument, one can deduce from the existence of (y, p) when y_0 and y_1 are “small” the existence of (y, p) even if y_0 and y_1 are not “small”.

Let us emphasize that one cannot take $(\bar{y}, \bar{p}) = (0, 0)$. Indeed, with such a choice of (\bar{y}, \bar{p}) , (4), (6), (11), (12) hold, with $y = \bar{y}, p = \bar{p}, y_0 = y_1 = 0$, but the linearized control system around $\bar{y} = 0$ is not at all controllable. Indeed the linearized control system around $\bar{y} = 0$ is

$$\operatorname{div} z = 0 \text{ in } \bar{\Omega} \times [0, T], \quad (21)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \pi = 0 \text{ in } \bar{\Omega} \times [0, T], \quad (22)$$

$$z(x, t) \cdot n(x) = 0 \forall (x, t) \in (\Gamma \setminus \Gamma^\#) \times [0, T].$$

Taking the curl of (22), one gets

$$\frac{\partial \operatorname{curl} z}{\partial t} = 0,$$

which clearly shows that the linearized control system is not controllable. So one needs to consider other (\bar{y}, \bar{p}) . Let us briefly explain how one constructs

“good” (\bar{y}, \bar{p}) when $l = 2$ and Ω is simply connected. In such a case one easily checks the existence of a harmonic function θ in $C^\infty(\bar{\Omega})$ such that

$$\begin{aligned} \nabla\theta(x) &\neq 0 \forall x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial n} &= 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma^\#. \end{aligned}$$

Let $\alpha \in C^\infty(0, T)$ vanishing 0 and T . Let

$$(\bar{y}, \bar{p})(x, t) = (\alpha(t)\nabla\theta(x), -\alpha'(t)\theta(x) - \frac{1}{2}\alpha^2(t) |\nabla\theta(x)|^2).$$

Then (4), (6), (11), (12) hold, with $y = \bar{y}, p = \bar{p}, y_0 = y_1 = 0$. Moreover using arguments relying on an extension method analogous to the one introduced by Russell in [33] one can see that the linearized control system around \bar{y} is controllable.

When $\Gamma^\#$ does not intersect all the connected components of $\Gamma^\#$ one can get, if $l = 2$, approximate controllability and even exact controllability outside any arbitrarily small neighborhood of the union Γ^* of the connected components of Γ which does not intersect $\Gamma^\#$. More precisely, one has

Theorem 2.2 [7]. *Assume that $l = 2$. There exists a constant c_0 depending only on Ω such that, for any $\Gamma^\#$ as above, any $T > 0$, any $\varepsilon > 0$, and any y_0, y_1 in $C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ satisfying (7), (8), (15) and (16), there exists a trajectory y of the Euler control system on $[0, T]$ satisfying (11) such that*

$$y(x, T) = y_1(x), \forall x \in \bar{\Omega} \text{ such that } \text{dist}(x, \Gamma^*) \geq \varepsilon, \quad (23)$$

$$\|y(\cdot, T)\|_{L^\infty} \leq c_0(\|y_0\|_{L^2} + \|y_1\|_{L^2} + \|\text{curly}y_0\|_{L^\infty} + \|\text{curly}y_1\|_{L^\infty}). \quad (24)$$

In (23), $\text{dist}(x, \Gamma^*)$ denotes the distance of x to Γ^* , i.e.

$$\text{dist}(x, \Gamma^*) = \text{Min} \{|x - x^*|; x^* \in \Gamma^*\}. \quad (25)$$

We use the convention $\text{dist}(x, \emptyset) = +\infty$ and so Theorem 2.2 implies Theorem 2.1. In (24) $\|\cdot\|_{L^r}$, for $r \in [1, +\infty]$, denotes the L^r -norm on Ω . Let us point out that, y_0, y_1 , and T as in Theorem 2.2 being given, it follows from (23) and (24) that, for any r in $[1, +\infty)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|y(0, T) - y_1\|_{L^r} = 0; \quad (26)$$

that is Theorem 2.2 implies approximate controllability in the L^r -space for any r in $[1, +\infty)$. Let us notice that, if $\Gamma^* \neq \emptyset$, then, again by Kelvin’s law, approximate controllability for the L^∞ -norm does not hold.

3 Controllability of the Navier-Stokes equations

In this section $\nu > 0$. We now need to specify the boundary conditions BC. Three types of conditions are considered

- Stokes boundary condition,
- Navier boundary condition,
- curl condition.

The Stokes boundary condition is the well known no-slip boundary condition

$$y = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma^\#, \quad (27)$$

which of course implies (2)

The Navier boundary condition [32] imposes, condition (2), which is always assumed, and

$$\bar{\sigma} y \cdot \tau + (1 - \bar{\sigma}) n^i \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} + \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \tau^j = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma^\#, \quad (28)$$

where $\bar{\sigma}$ is a constant in $[0, 1)$, $n = (n^1, \dots, n^l)$ and $\tau = (\tau^1, \dots, \tau^l)$ is any tangent vector field on the boundary Γ . In (28) we also have used the usual summation convention. Note that the Stokes boundary condition (27) corresponds to the case $\bar{\sigma} = 1$, which we will not include in the Navier boundary condition considered here. The boundary condition (28) with $\bar{\sigma} = 0$ corresponds to the case where there the fluid slips on the wall without friction. It is the appropriate physical model for some flow problems; see [20] for example. The case

$\bar{\sigma} \in (0, 1)$ corresponds to a case where there the fluid slips on the wall with friction; it is also used in models of turbulence with rough walls; see, e.g., [26]. Note that in [4] F. Coron has derived rigorously the Navier boundary condition (28) from the boundary condition at the kinetic level (Boltzmann equation) for compressible fluids. Let us also recall that C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore have derived in [3] the incompressible Navier-Stokes equations from a Boltzmann equation.

Let us point out that, using (2), one sees that, if $l = 2$ and if τ is the unit tangent vector field on $\partial\Omega$ such that (τ, n) is a direct basis of \mathbb{R}^2 , (28) is equivalent to

$$\sigma y \cdot \tau + \text{curl } y = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma^\#$$

with $\sigma \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$ defined by

$$\sigma(x) = \frac{2(1 - \bar{\sigma})\kappa(x) - \bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}} \quad \forall x \in \Gamma, \quad (29)$$

where κ is the curvature of Γ defined through the relation $\frac{\partial n}{\partial \tau} = \kappa \tau$. In fact we will not use this particular character of (29) in our considerations; Theorem 3.5 below holds for any $\sigma \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$.

Finally the curl condition is considered in dimension 2 ($l = 2$). This condition is, condition (2) which is always assumed, and

$$\text{curl } y = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma^\# \quad (30)$$

It corresponds to the case $\sigma = 0$ in (29).

As mentioned in the introduction, due to smoothing property of the Navier-Stokes equation, one cannot expect to get (12). For these equations, the good notion for exact controllability is not passing from a state (y_0) to another state (y_1). As proposed by Fursikov and Imanuvilov in [16] [17], the good definition for exact controllability is passing from one *trajectory* (\hat{y}_0) to another *trajectory* (\hat{y}_1). This definition of controllability, in the framework of finite-dimensional control systems, was introduced by Willems [34]. This leads to the following, still open, problem of exact controllability *for trajectories* of the Navier-Stokes equation with the Stokes, or Navier, or curl condition.

Open Problem 3.1 *Let $T > 0$. Let \hat{y}_0 and \hat{y}_1 be two trajectories of the Navier-Stokes control system on $[0, T]$. Does there exist a trajectory y of the Navier-Stokes control system on $[0, T]$ such that*

$$y(x, 0) = \hat{y}_0(x, 0) \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad (31)$$

$$y(\cdot, T) = \hat{y}_1(\cdot, T) \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (32)$$

Related to this open question one knows two types of results

- local results,
- global results,

which we briefly describe in the next subsections

3.1 Local results

Let us introduce the following definition

Definition 3.2 *The Navier-Stokes control system is locally (for the Sobolev H^1 - norm)) exactly controllable for trajectories if, for any $T > 0$ and for any trajectory \hat{y}_1 of the Navier-Stokes control system on $[0, T]$, there exists $\epsilon > 0$ such that, for any trajectory \hat{y}_0 of the Navier-Stokes control system on $[0, T]$ such that*

$$\|\hat{y}_0(\cdot, 0) - \hat{y}_1(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon,$$

there exists a trajectory y of the Navier-Stokes control system on $[0, T]$ satisfying (31) and (32).

Then one has the following results

Theorem 3.3 *The Navier-Stokes control system is locally exactly controllable for trajectories in the following cases*

- (i) *Curl condition or Navier boundary condition in dimension 2 ($l=2$).*
- (ii) *Stokes condition.*

Case (i) has been obtained by A.V. Fursikov and O. Yu Imanuvilov in [17] [18]; Case (ii) has been obtained by A.V. Fursikov in [15] when $\Gamma^\# = \Gamma$ and by O. Yu Imanuvilov in [24] for the general case.

3.2 Global results

E. Fernández-Cara and J. Real in [14] and E. Fernández-Cara and M. González-Burgos in [13] have proved the following global result

Theorem 3.4 *Let $T > 0$ and let y_0 in $C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^l)$ satisfying (7) and the boundary conditions BC. Then the linear space spanned by the $y(\cdot, T)$ such that y is a trajectory of the Navier-Stokes control system satisfying the initial condition (11), is dense, with respect to the L^2 -norm in the set of $y_1 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^l$ satisfying (8).*

In fact [14] and [13] deal with the Stokes boundary condition but can be easily adapted to treat the other boundary conditions.

Let $d \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ be defined by

$$d(x) = \text{dist}(x, \Gamma) = \text{Min} \{|x - x'|; x' \in \Gamma\}.$$

In [8] the following theorem is proved

Theorem 3.5 *Let $T > 0$, let y_0 and y_1 in $C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ be such that (7) and (8) hold. Let us also assume that y_0 and y_1 satisfies the Navier boundary condition (28). Then there exists a sequence $(y^k; k \in \mathbb{N})$ of trajectories of the Navier-Stokes control system on $[0, T]$ with the Navier boundary condition (28) such that, as $k \rightarrow +\infty$,*

$$\int_{\Omega} d^\mu |y^k(\cdot, T) - y_1| \rightarrow 0, \quad \forall \mu > 0, \quad (33)$$

$$|y^k(\cdot, T) - y_1|_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \rightarrow 0, \quad (34)$$

and, for all compact K included in $\Omega \cup \Gamma^\#$,

$$|y^k(\cdot, T) - y_1|_{L^\infty(K)} + |\text{curl } y^k(\cdot, T) - \text{curl } y_1|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0. \quad (35)$$

In this theorem $W^{-1,\infty}(\Omega)$ denotes the usual Sobolev space of first derivatives of functions in $L^\infty(\Omega)$ and $|\cdot|_{W^{-1,\infty}(\Omega)}$ one of its usual norms, for example the norm given in [1, Section 3.10].

As in the proof of the controllability of the 2-D Euler equations of incompressible perfect fluids (see section 2) the return method. Let us recall that it consists in looking for a trajectory of the Navier-Stokes control system \bar{y} such that

$$\bar{y}(\cdot, 0) = \bar{y}(\cdot, T) = 0 \text{ in } \bar{\Omega}, \quad (36)$$

and such that the linearized control system around the trajectory \bar{y} has a controllability in a "good" sense. With such a \bar{y} one may hope that there exists y - close to \bar{y} - satisfying the required conditions, at least if y_0 and y_1 are "small". Note that the linearized control system around \bar{y} is

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \nu \Delta z + (\bar{y} \cdot \nabla)z + (z \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla \pi = 0 \text{ in } (\bar{\Omega} \setminus \Omega^\#) \times [0, T], \quad (37)$$

$$\text{div } z = 0 \text{ in } \bar{\Omega} \times [0, T], \quad (38)$$

$$z \cdot n = 0 \text{ on } (\Gamma \setminus \Gamma^\#) \times [0, T], \quad (39)$$

$$\sigma z \cdot \tau + \text{curl } z = 0 \text{ on } (\Gamma \setminus \Gamma^\#) \times [0, T]. \quad (40)$$

In [27] J.-L. Lions has proved that if $\bar{y} = 0$ this linear system is approximatively controllable; in fact he has treated the case of the Stokes boundary condition,

but his proof can be easily adapted to the case of the Navier boundary conditions considered here. Unfortunately, it is not clear how to deduce from the approximate controllability of this linear system the existence of a trajectory y of the Navier-Stokes control system (with the Navier boundary condition) satisfying (11) and (13) if y_0 and y_1 are not small. For this reason, one does not use $(\bar{y}, \bar{p}) = (0, 0)$, but (\bar{y}, \bar{p}) similar to the one constructed in [7] to prove the controllability of the 2-D Euler equations of incompressible perfect fluids; these (\bar{y}, \bar{p}) are chosen to be “large” so that, in some sense, “ Δ ” is small compared to “ $(\bar{y} \cdot \nabla) + (\cdot \nabla)\bar{y}$ ”.

Note that (33), (34), and (35) are not strong enough to imply

$$|y^h(\cdot, T) - y_1|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad (41)$$

i.e. to get the approximate controllability in L^2 of the Navier-Stokes control system. But, in the special case where $\Gamma^\# = \Gamma$, (33), (34), and (35) are strong enough to imply (41). Moreover, gluing together (the proofs of) Theorem 3.3 and Theorem 3.5, one gets

Theorem 3.6 [9] *If $\Gamma^\# = \Gamma$ and $l = 2$, the Navier-Stokes control system is exactly controllable for trajectories, i.e. open problem 3.1 has a positive answer when $\Gamma^\# = \Gamma$ and $l = 2$.*

Let us also mention that, in [11], C. Fabre has obtained, in every dimension, an approximate controllability result of two natural “cut off” Navier-Stokes equations. Her proof relies on a general method introduced by E. Zuazua in [35] to prove approximate controllability of semilinear wave equations. This general method is based on HUM (Hilbert Uniqueness Method, due to J.-L. Lions [28]) and on a fixed point technique; see also [12] where C. Fabre, J.-P. Puel and E. Zuazua use this method to prove approximate controllability of semilinear heat equations.

Remark 3.7 *It is usually accepted that the viscous Burgers equation provides a realistic simplification of the Navier-Stokes system in fluid Mechanics. But J.I. Diaz has proved in [10] that the viscous Burger equation is not approximatively controllable; see also [16]. For the nonviscous Burger equation, results have been obtained by F. Ancona and A. Marson in [2] and by Th. Horsin in [23].*

References

- [1] R.A. Adams: *Sobolev spaces*, Academic Press, San Diego, London, 1978.

- [2] F. Ancona and A. Marson, On the Attainable Set for Scalar Nonlinear Conservation Laws with Boundary Control, to appear in *SIAM J. of control*.
- [3] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore, Fluid dynamic limits of kinetic equations I: formal derivations, *J. Statistical Physics*, 63 (1991) pp. 323-344.
- [4] F. Coron, Derivation of slip boundary conditions for the Navier-Stokes system from the Boltzmann equation, *J. Statistical Physics*, 54 (1989) pp. 829-857.
- [5] J.-M. Coron, Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift, *Math. Control Signals Systems*, 5 (1992) pp. 295-312.
- [6] J.-M. Coron, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 317 (1993) pp. 271-276.
- [7] J.-M. Coron, On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids, *J. Math. Pures & Appliquées*, 75 (1996) pp. 155-188.
- [8] J.-M. Coron, On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, www.emath.fr/cocv/, 1 (1996) pp. 35-75.
- [9] J.-M. Coron and A. Fursikov, Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary, preprint, 1996.
- [10] J.I. Díaz, Sobre la controlabilidad aproximada de problemas no lineales disipativos, in Proceedings of *Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos*, A. Valle ed., (1991) pp. 41-48.
- [11] C. Fabre, Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, www.emath.fr/cocv/, 1 (1996) pp. 267-302.
- [12] C. Fabre, J.-P. Puel and E. Zuazua, Approximate controllability for semi-linear heat equation, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 125A (1995) pp. 31-61.
- [13] E. Fernández-Cara and M. González-Burgos, A result concerning approximate controllability for the Navier-Stokes equations, *SIAM J. Control*, 33 (1995) pp. 31-61.

- [14] E. Fernández-Cara and J. Real, On a conjecture due to J.-L. Lions, *Non-linear Analysis, Theory, Methods & Appl.*, 21 (1993) pp. 835-847.
- [15] A. Fursikov, Exact boundary zero controllability of three-dimensional Navier-Stokes equations, *J. Dynamical Control and Systems*, 1 (1995) pp. 325-350.
- [16] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, On controllability of certain systems simulating a fluid flow, in: *Flow Control*, IMA vol. in Math. and its Appl., M.D. Gunzburger ed., Springer Verlag, New York, 68 (1994) pp. 149-184.
- [17] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, Local exact controllability of the Navier-Stokes equations, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323 (1996) pp. 275-280.
- [18] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, On exact boundary zero controllability of the two-dimensional Navier-Stokes equations *Acta Appl. Math.* 36 (1994) pp. 1-10.
- [19] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, Local exact controllability for 2 - D Navier-Stokes equations, *Sbornik Math.*, 187 (1996) (in Russian).
- [20] G. Geymonat and E. Sanchez-Palencia, On the vanishing viscosity limit for acoustic phenomena in a bounded region, *Arch. Rat. Mechanics and Analysis*, 75 (1981) pp. 257-268.
- [21] O. Glass, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3, *C.R. Acad. Sci. Paris*, to appear.
- [22] O. Glass, Exact boundary controllability of 3-D Euler equation, Preprint, October 1997, submitted to *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, www.emath.fr/cocv/.
- [23] Th. Horsin, On the controllability of the Burger equation, preprint Université de Versailles, 1997, submitted to *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, www.emath.fr/cocv/.
- [24] O. Yu. Imanuvilov, On exact controllability for Navier Stokes equations, Preprint 1997, submitted to *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, www.emath.fr/cocv/.
- [25] A.V. Kazhikov, Note on the formulation of the problem of flow through a bounded region using equations of perfect fluid, *PMM USSR*, 44 (1981) pp. 672-674.

- [26] B.E. Launder and D.B. Spalding, *Mathematical models of turbulence*, Academic Press, 1972.
- [27] J.-L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [28] J.-L. Lions, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, J. Von Neumann Lecture, Boston 1986, *SIAM review*, 30 (1988) pp.1-68.
- [29] J.-L. Lions, Are there connections between turbulence and controllability?, in: *9th INRIA International Conference*, Antibes, June 12-15, 1990.
- [30] J.-L. Lions, Exact controllability for distributed systems. Some trends and some problems, in: *Applied and Industrial Mathematics*, R. Spigler ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (1991) pp. 59-84.
- [31] G.E.A. Meier and G.H. Schnerr, *Control of flow instabilities and unsteady flows*, CISM Courses and Lectures 369, Springer-Wien-New York, 1996.
- [32] C.L.M.H. Navier, Sur les lois du mouvement des fluides, *Mem. Acad. R. Sci. Inst. France*, 6 (1823) pp. 389-440.
- [33] D.L. Russell, Exact boundary value controllability theorems for wave and heat processes in star-complemented regions, in *Differential Games and Control Theory*, Roxin, Liu et Sternberg eds., Marcel Dekker, New York, 1974, pp. 291-319.
- [34] J.C. Willems, Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 36 (1991) pp. 259-294.
- [35] E. Zuazua, Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Nonlinear Analysis*, 10 (1993), pp. 109-129.

**UNA INTRODUCCIÓN
AL ANÁLISIS NO ESTÁNDAR
MEDIANTE TÉCNICAS ALGEBRAICAS**

VIERI BENCI ¹

UNIVERSIDAD DE PISA

e-mail: benci@gauss.dm.unipi.it

En sus orígenes, el cálculo infinitesimal pretendía realizar operaciones algebraicas con cantidades infinitamente grandes o infinitamente pequeñas de modo análogo a las que se efectúan con números reales. Esta idea, tan atractiva desde un punto de vista intuitivo, se puede formular de un modo riguroso. El enfoque moderno del Cálculo usando infinitésimos se debe a Robinson (1966); su teoría fue llamada Análisis No Estándar. La construcción de Robinson, que es muy complicada, fue simplificada por Keisler (1976). También Nelson, en 1977, propuso una nueva forma para introducir el Análisis No Estándar. Todas estas formas de definir los infinitésimos tienen una característica en común: utilizan teorías lógicas bastante elevadas. En esta conferencia se presenta un nuevo método que sólo usa herramientas algebraicas. Pretendemos dar una axiomática del cuerpo de números hiper-reales que permita fundamentar el análisis sobre la noción de infinitésimo.

1 Cuerpos ordenados

Sea \mathbf{K} un cuerpo. Una ordenación de \mathbf{K} está determinada por un subconjunto $P \subset \mathbf{K}$ que cumple

- \mathbf{K} es unión disjunta de P , $-P$ y $\{0\}$
- Dados $x, y \in P$, se cumple $x + y \in P$, $xy \in P$.

Los elementos de P se dirán positivos y se usará la notación $x > 0$ en lugar de $x \in P$. El orden en \mathbf{K} se define de la siguiente forma: dados $x, y \in \mathbf{K}$ se dice que x es mayor que y , y se nota por $x > y$, si se cumple $x - y \in P$. Dado $x \in \mathbf{K}$, el valor absoluto $|x|$ es un elemento de $P \cup \{0\}$ que se define de modo análogo al caso real.

Los procedimientos habituales para manipular desigualdades son válidos en cualquier cuerpo ordenado.

¹Notas por Juan Campos y Rafael Ortega

Ejercicio. Sea \mathbf{K} un cuerpo ordenado. Demuestra:

- a) 1 es positivo
- b) \mathbf{K} tiene característica cero
- c) Si $x > 0$ entonces $x^{-1} > 0$.

Los ejemplos más conocidos de cuerpo ordenado son \mathbf{Q} , \mathbf{R} y todos los subcuerpos de \mathbf{R} . A continuación damos otro ejemplo.

Ejercicio. Sea $\mathbf{K} = \mathbf{R}(t)$ el cuerpo de funciones racionales en la variable t . Se dice que $f = f(t)$ es positiva si $f(t) > 0$ para valores de t suficientemente grandes. Demuestra:

- a) \mathbf{K} es un cuerpo ordenado que contiene a \mathbf{R} como subcuerpo (los números reales se identificarán a funciones constantes).
- b) Existen elementos positivos de \mathbf{K} que son más pequeños que cualquier número real positivo.

2 El primer axioma y el teorema de la parte estándar

AXIOMA 1. El conjunto de los números hiper-reales \mathbf{R}^* es un cuerpo ordenado que contiene a \mathbf{R} como subcuerpo ordenado.

Un número $\xi \in \mathbf{R}^*$ se dice

- *infinito* si $\xi \geq x \quad \forall x \in \mathbf{R}$
- *infinitésimo* si $|\xi| \leq x \quad \forall x \in \mathbf{R}^+$
- *acotado* si $|\xi| \leq x$ para algún $x \in \mathbf{R}^+$.

Si \mathbf{R}^* es distinto de \mathbf{R} y contiene un número infinito α_0 , entonces $\epsilon_0 = \frac{1}{\alpha_0}$ es un infinitésimo.

Ejercicio. Clasifica los siguientes números según sean infinitos, infinitésimos o acotados:

$$\frac{\epsilon_0}{2}, \epsilon_0^2, \epsilon_0 + \epsilon_0^{-2}, 2 + \alpha_0, \epsilon_0 + \alpha_0, \frac{\epsilon_0^2 + 1}{\epsilon_0^2 - 1}, \epsilon_0 \alpha_0.$$

Definición. Dados dos números $\xi, \eta \in \mathbf{R}^*$ tales que $\xi - \eta$ es un infinitésimo, se dirá que ξ y η están infinitamente próximos y se empleará la notación

$$\xi \sim \eta.$$

Ejercicio. Sean ξ y η dos números acotados de \mathbf{R}^* tales que $\xi \leq \eta$. Prueba que los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) ξ y η no están infinitamente próximos
- ii) existen números reales r y s tales que

$$\xi < r < s < \eta.$$

El siguiente resultado ayuda a comprender la estructura de la recta hiper-real.

Teorema de la parte estándar. *Todo número acotado $\xi \in \mathbf{R}^*$ está infinitamente próximo a un único número real x_0 .*

Ejercicio. Demuestra el teorema usando la noción de cortadura de Dedekind. Dos subconjuntos no vacíos \mathcal{A} y \mathcal{B} de la recta real definen una cortadura de Dedekind en \mathbf{R} si se cumple:

$$\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, a \leq b, \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbf{R}.$$

Es fácil probar que para una cortadura de Dedekind existe un único número x_0 tal que

$$a \leq x_0 \leq b, \quad \forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}.$$

A partir de aquí puedes probar el teorema de la parte estándar usando el hecho de que los siguientes conjuntos definen una cortadura de Dedekind,

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbf{R} / x \leq \xi\}, \quad \mathcal{B} = \{x \in \mathbf{R} / x \geq \xi\}.$$

El número x_0 recibe el nombre de *parte estándar* de ξ y se nota por $x_0 = st(\xi)$. Se sigue del teorema que todo número acotado $\xi \in \mathbf{R}^*$ se descompone en la forma

$$\xi = x_0 + \epsilon, \quad \epsilon \sim 0.$$

Dado $\xi \in \mathbf{R}^*$, la *mónada* de ξ es el conjunto

$$\{\eta \in \mathbf{R}^* / \xi \sim \eta\}.$$

(En el sistema filosófico de Leibniz, una mónada es cada una de las sustancias indivisibles, pero de naturaleza distinta, que componen el universo).

La mónada de cada número real x_0 se encuentra en la recta hiper-real entre x_0 y los restantes números reales.

3 La noción de derivada y el cálculo con funciones racionales

Sea $f = f(x)$ una función racional, $f \in \mathbf{R}(x)$. Esta función también tiene sentido cuando la evaluamos en \mathbf{R}^* porque las operaciones que se efectúan son

las usuales en un cuerpo. Definimos la derivada de f en $x_0 \in \mathbf{R}$,

$$Df(x_0) = \text{st}\left\{\frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon}\right\}, \epsilon \sim 0.$$

Ejemplo. $f(x) = x^2$

$$Df(x) = \text{st}\left\{\frac{(x + \epsilon)^2 - x^2}{\epsilon}\right\} = \text{st}\left\{\frac{x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 - x^2}{\epsilon}\right\} = \text{st}\{2x + \epsilon\} = 2x.$$

Ejercicio. Calcula la derivada de una función racional cualquiera y comprueba que el resultado no depende de la elección del infinitésimo ϵ .

El axioma 1 es suficiente para desarrollar el cálculo infinitesimal de funciones racionales. Si pretendiéramos calcular la derivada de la función coseno de acuerdo al modelo anterior, sería necesario dar sentido a la expresión

$$\cos(x_0 + \epsilon),$$

y para ello necesitamos nuevos axiomas.

4 La axiomática hiper-real y el número α_0

Una sucesión real es una aplicación $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$. Se suele emplear la notación $\{\varphi(n)\}_{n \in \mathbf{N}}$. El conjunto de sucesiones reales, que se designa por $\mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, tiene una estructura de anillo con las operaciones

$$(\varphi + \psi)(n) = \varphi(n) + \psi(n), \quad (\varphi \cdot \psi)(n) = \varphi(n) \cdot \psi(n).$$

AXIOMA 2. *Existe un homomorfismo de anillos*

$$J : \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^*$$

que es sobreyectivo.

Ejercicio. Dado $a \in \mathbf{R}$, se define la sucesión constante

$$c_a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}, \quad c_a(n) = a.$$

Demuestra $J(c_a) = a$, $\forall a \in \mathbf{Q}$. (Sugerencia: empieza por el caso $a = 1$).

Pretendemos que $J(\varphi)$ proporcione información sobre φ en infinito. Por ejemplo, esperamos que $\epsilon_0 = J(\varphi)$ sea un infinitésimo para $\varphi(n) = \frac{1}{n}$ si $n \geq 1$ y $\varphi(0) = 0$. Entonces será posible dar sentido a expresiones tales como $\cos(x_0 + \epsilon_0)$ sin más que definir

$$\cos(x_0 + \epsilon_0) = J(\psi), \quad \psi(n) = \cos(2 + \varphi(n)).$$

Esta definición permite extender al campo hiper-real fórmulas tradicionales; así

$$\cos(2 + \epsilon_0) = \cos 2 \cos \epsilon_0 - \operatorname{sen} 2 \operatorname{sen} \epsilon_0.$$

Los axiomas 1 y 2 no bastan para estos propósitos. Si definimos $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}$, $J(\varphi) = \varphi(7)$, se cumplen dichos axiomas pero no se dispone de infinitésimos. Para evitar esta situación y para hacer que J sea compatible con el orden introduciremos un tercer axioma.

AXIOMA 3. Sea $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Si existen $k \in \mathbf{N}^+$ y $a \in \mathbf{R}$ tales que

$$\varphi(kn) \geq a,$$

entonces $J(\varphi) \geq a$.

Es posible construir un modelo que cumpla los tres axiomas; además, siempre que se cumplan los tres axiomas se sabe que hay números infinitos. Un ejemplo es el número α_0 definido por

$$\alpha_0 = J(i),$$

donde $i : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, $i(n) = n$ es la inclusión de \mathbf{N} en \mathbf{R} . A partir de ahora fijaremos la notación y α_0 designará específicamente este número infinito.

Ejercicio. Demuestra $J(c_a) = a$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

El axioma 3 da una gran relevancia a los subconjuntos de \mathbf{N} de la forma $k\mathbf{N}$. Por ejemplo, si φ y ψ son dos sucesiones que coinciden en los pares ($k = 2$), entonces $J(\varphi) = J(\psi)$. Por el contrario, si φ y ψ coinciden en los impares, no hay relación entre $J(\varphi)$ y $J(\psi)$. En un principio este hecho puede resultar chocante desde el punto de vista psicológico.

Ejercicio. Se definen las sucesiones

$$\varphi_P(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \varphi_I(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

i) Observa que se cumplen las identidades $\varphi_P + \varphi_I = c_1$ y $\varphi_P \cdot \varphi_I = 0$ y usa los axiomas 1 y 2 para probar que se cumple una de las siguientes alternativas

$$J(\varphi_P) = 1, \quad J(\varphi_I) = 0,$$

o bien,

$$J(\varphi_P) = 0, \quad J(\varphi_I) = 1.$$

ii) Usa el axioma 3 y prueba que se cumple la primera alternativa.

Dada una sucesión $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, la extendemos a $\mathbf{N} \cup \{\alpha_0\}$ por medio de la definición

$$\varphi(\alpha_0) = J(\varphi).$$

Como J es sobreyectiva, esta notación nos permite representar todo número hiper-real $\xi \in \mathbf{R}^*$ en la forma

$$\xi = \varphi(\alpha_0),$$

donde $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Esta representación no es única.

Precisamos ahora como se extienden los conjuntos y funciones al campo hiper-real.

Definición. Dado $A \subset \mathbf{R}$, el conjunto hiper-real

$$A^* = \{\varphi(\alpha_0) / \varphi \in \mathcal{F}(\mathbf{N}, A)\}$$

es la *extensión natural* de A .

Ejercicio. Pretendemos probar que la extensión de un intervalo real $[a, b]$ es el correspondiente intervalo hiper-real.

i) Sea $\xi \in \mathbf{R}^*$, $\xi = \varphi(\alpha_0)$, $\xi \geq a$. Se definen las sucesiones

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi(n) \geq a \\ 0, & \text{si } \varphi(n) < a \end{cases} \quad \chi_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } \varphi(n) \geq a \\ 1, & \text{si } \varphi(n) < a \end{cases}$$

Demuestra que se cumple una de las siguientes alternativas:

$$\chi_1(\alpha_0) = 1, \quad \chi_2(\alpha_0) = 0,$$

o bien,

$$\chi_1(\alpha_0) = 0, \quad \chi_2(\alpha_0) = 1.$$

ii) Se define ahora la sucesión modificada $\tilde{\varphi} = \chi_1 \cdot \varphi + \chi_2 \cdot a$. Observa que $\tilde{\varphi}$ cumple $\tilde{\varphi} \geq \varphi$ y demuestra que

$$\tilde{\varphi}(\alpha_0) = \varphi(\alpha_0) = \xi.$$

Ejercicio. $(\mathbf{R} - \{0\})^* = \mathbf{R}^* - \{0\}$.

Definición. Sea $f : A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función real, su extensión viene dada por la expresión

$$f : A^* \subset \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}^*, \quad f^*(\varphi(\alpha_0)) = (f \circ \varphi)(\alpha_0).$$

Se demuestra que esta definición es consistente, pues el valor $f^*(\xi)$ sólo depende del número $\xi \in A^*$ y no de la representación $\xi = \varphi(\alpha_0)$ que se haya escogido. En lo sucesivo no usaremos la notación f^* , pues la extensión de f se designará también por f . Es fácil probar que, dado un subconjunto A de \mathbf{R} , se cumple

$$f(A^*) = f(A)^*.$$

5 Continuidad

Los conceptos del análisis real se pueden introducir a partir la axiomática que se ha presentado. Como ilustración, estudiamos las nociones de continuidad y continuidad uniforme.

Sea $f : A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función dada. Se dice que f es *continua* en $x_0 \in A$ si se cumple

$$\xi \in A^*, \xi \sim x_0 \implies f(\xi) \sim f(x_0).$$

(Observa que en esta definición se ha usado la extensión de f al calcular $f(\xi)$). La función f será continua en A si lo es en cada uno de sus puntos. Por último, diremos que f es *uniformemente continua* en A si

$$\xi, \eta \in A^*, \xi \sim \eta \implies f(\xi) \sim f(\eta).$$

Ejemplo. $f : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

En este caso el dominio $A = \mathbf{R} - \{0\}$ tiene la extensión $A^* = \mathbf{R}^* - \{0\}$; en consecuencia f está definida para todo hiper-real excepto el cero.

i) f es continua en A

Sea $x_0 \in \mathbf{R} - \{0\}$ y $\epsilon \sim 0$, $\epsilon \neq 0$, entonces

$$f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \epsilon} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \epsilon}{x_0(x_0 + \epsilon)} = \frac{-\epsilon}{x_0(x_0 + \epsilon)} \sim 0$$

(no es difícil probar que $\frac{\epsilon}{x_0(x_0 + \epsilon)}$ es un infinitésimo; por ejemplo, de $|x_0 + \epsilon| \geq \frac{1}{2}|x_0|$ se sigue que

$$\left| \frac{\epsilon}{x_0(x_0 + \epsilon)} \right| \leq \frac{2|\epsilon|}{|x_0|^2} \sim 0.)$$

ii) f no es uniformemente continua en A

Sea $\epsilon \sim 0$, $\epsilon \neq 0$. Probaremos que $f(2\epsilon)$ y $f(\epsilon)$ no están próximos a pesar de que ϵ y 2ϵ sí lo están.

$$f(2\epsilon) - f(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} = -\frac{1}{2\epsilon},$$

y el resultado es un número infinito.

A continuación damos una demostración no estándar de un resultado bien conocido.

Teorema (Cantor). *Toda función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ es uniformemente continua.*

Demostración. Empezamos con dos observaciones:

- Si ξ es un hiper-real en $[a, b]^*$, entonces su parte estándar $x = st(\xi)$ pertenece a $[a, b]$. (Puedes probar este hecho usando la descripción de $[a, b]^*$ que obtuvimos en un ejercicio).
- Sean $\xi, \eta \in [a, b]^*$ y $x = st(\xi)$, $y = st(\eta)$ la parte estándar correspondiente. Si $\xi \sim \eta$ entonces $x = y$. ($x \sim \xi$, $y \sim \eta$, $\xi \sim \eta \implies x \sim y$; así, x e y son números reales infinitamente próximos y por tanto coinciden).

Probamos ahora el teorema. Sean $\xi, \eta \in [a, b]^*$, $\xi \sim \eta$, pretendemos demostrar que $f(\xi)$ y $f(\eta)$ también están infinitamente próximos. Por la continuidad de f en $x = st(\xi) = st(\eta)$,

$$f(\xi) \sim f(x), \quad f(\eta) \sim f(x)$$

de donde

$$f(\xi) \sim f(\eta).$$

6 El teorema de Weierstrass y la noción de supremo

Teorema (Weierstrass) *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en $[a, b]$.*

La demostración, que haremos para el caso del máximo, va a venir después de unos preliminares que nos darán el punto de vista no estándar de la noción de supremo.

La parte estándar de un número infinito se interpretará como $\pm\infty$ según la siguiente definición

$$tr : \mathbf{R}^* \rightarrow \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}, \quad tr(\xi) = \begin{cases} st(\xi) & \text{si } \xi \text{ es acotado} \\ +\infty & \text{si } \xi \text{ es infinito y positivo} \\ -\infty & \text{si } \xi \text{ es infinito y negativo} \end{cases}$$

Definición. Sea A un subconjunto de \mathbf{R} . Un número $l \in \hat{\mathbf{R}}$ es supremo de A si

(i) $\forall x \in A \quad x \leq l$

(ii) $\exists \xi \in A^*, tr(\xi) = l$.

Lema. *Todo subconjunto no vacío de \mathbf{R} tiene un único supremo.*

Demostración. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, distinguimos dos casos:

Caso 1) A no está acotado superiormente.

Probamos que $l = +\infty$ es supremo. Para ello es suficiente probar *ii*). Sea $x_n \in A$ tal que $x_n \geq n$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Definimos la sucesión $\varphi(n) = x_n$ y deducimos que el número $\xi = \varphi(\alpha_0)$ está en A^* y es infinito y positivo. Por tanto, $tr(\xi) = +\infty$ y $+\infty$ es supremo.

Caso 2) A está acotado superiormente.

Los conjuntos

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbf{R} / \exists a \in A, x \leq a\}, \quad \mathcal{B} = \{x \in \mathbf{R} / \forall a \in A, x \geq a\}$$

definen una cortadura de Dedekind en \mathbf{R} . Sabemos que existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tal que

$$a \leq x_0 \leq b \quad \forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$$

y vamos a ver que x_0 es supremo de A . Como A es un subconjunto de \mathcal{A} , la condición (i) en la definición de supremo es evidente y basta comprobar que se cumple (ii). Para cada $n \in \mathbf{N}$ el número real $x_0 - \frac{1}{n}$ está a la izquierda de x_0 y por tanto pertenece a \mathcal{A} . De la definición de \mathcal{A} se sigue que ha de existir un número $a_n \in A$ que cumpla

$$x_0 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq x_0$$

y, si definimos la sucesión $\varphi(n) = a_n$, el número hiper-real $\xi = \varphi(\alpha_0)$ está en A^* . Usando el axioma 3 obtenemos

$$x_0 - \frac{1}{n} \leq \varphi(kn) \leq x_0, \quad \forall k \in \mathbf{N} \implies x_0 - \frac{1}{n} \leq \varphi(\alpha_0) \leq x_0, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Podemos deducir ahora que x_0 y ξ están infinitamente próximos y, en consecuencia, $x_0 = st(\xi)$.

Hemos probado la existencia de supremo y a continuación vamos a probar la unicidad. Sean $l_1 \geq l_2$ supremos de A y $\xi_1, \xi_2 \in A^*$ tales que $tr(\xi_i) = l_i$. Podemos encontrar una sucesión $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbf{N}, A)$ tal que $\varphi(\alpha_0) = \xi_1$. Entonces, por ser l_2 supremo, $\varphi(n) \leq l_2 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ y el axioma 3 implica que $\xi_1 = \varphi(\alpha_0) \leq l_2$. En consecuencia,

$$l_1 = tr(\xi_1) \leq l_2$$

y ambos supremos coinciden.

Demostración del teorema de Weierstrass. Sea l el supremo del conjunto $f([a, b])$. Sabemos que existe $\xi \in f([a, b])^*$ tal que $tr(\xi) = l$ y, por la identidad

$$f([a, b])^* = f([a, b]^*),$$

deducimos la existencia de $\eta \in [a, b]^*$ tal que $f(\eta) = \xi$. Vamos a probar que f alcanza su máximo en $x_0 = st(\eta) \in [a, b]$.

La continuidad de f implica

$$f(x_0) \sim f(\eta) = \xi$$

y, como ξ y l están infinitamente próximos,

$$f(x_0) \sim \xi \sim l \implies f(x_0) = l.$$

Bibliografía

- Keisler J., Foundations of Infinitesimal Calculus, Prindle, Weber & Schmidt Incorporated, Boston, 1976.
- Nelson, E., Internal Set Theory, a new approach to Nonstandard Analysis, Bull. AMS **83** (1977) 1165-1198.

“SCATTERING”† CAÓTICO Y LA ESTABILIDAD DEL SISTEMA SOLAR

F. BORONDO¹, R. GUANTES¹ Y S. MIRET-ARTÉS²

¹DEP. DE QUÍMICA, UNIV. AUTÓNOMA DE MADRID,
CANTOBLANCO-28049 MADRID.

²INSTITUTO DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA FUNDAMENTAL,
C.S.I.C., 28006 MADRID.

Resumen

En este artículo se presentan algunos aspectos de las colisiones He-superficie de Cu, como ejemplo ilustrativo de scattering caótico, y se discute como los resultados pueden ser entendidos y sistematizados utilizando las ideas que Poincaré introdujo en su ya clásico tratado sobre la estabilidad del sistema solar.

1 Introducción

Las últimas décadas han contemplado un gran desarrollo en el estudio del caos en sistemas dinámicos de baja dimensionalidad. Así, por ejemplo, resulta ya paradigmática la comprensión del mecanismo de destrucción de toros en mapas simplécticos [1]. Sin embargo, hay aspectos que a nuestro juicio no han recibido tanta atención, como es por ejemplo el caos en procesos de scattering o colisión [2]. Los estudios que existen en la literatura sobre este tema para sistemas realistas suelen ser bastante fenomenológicos, mientras que los resultados más fundamentales se encuentran en los que tratan modelos sencillos (tres discos impenetrables, cuatro colinas, etc.).

La diferencia entre sistemas ligados y de scattering radica en que los últimos ocupan un volumen de fases infinito, que consta de dos partes: una de interacción, donde el acoplamiento entre modos es importante, y otra asintótica, donde el movimiento es integrable. Aunque pueda pensarse *a priori* que la existencia de esta segunda zona no es interesante, veremos cómo introduce modificaciones sustanciales respecto del caso ligado.

Desde el punto de vista práctico, la colisión de un haz de átomos de gases nobles, en particular He, con superficies es un procedimiento bien establecido para investigar la estructura de éstas, habiéndose realizado numerosos estudios experimentales sobre estas colisiones [3]. Esta técnica tiene las ventajas de no

[†]Preferimos utilizar el término inglés en lugar de la voz española *dispersión*, que a nuestro juicio tiene connotaciones que llevan a una interpretación muy diferente.

ser destructiva y ser sólo sensible a la capa atómica más externa, con lo que proporciona información sobre la corrugación de la superficie. La corrugación puede entenderse como el potencial efectivo que “ven” o “sienten” los átomos a medida que inciden sobre la superficie, y depende de la dirección en que se haya cortado el sólido. Esto se ilustra en la Fig. 1 para el caso del Cu.

Aunque el tratamiento correcto de la dinámica que nos ocupa debe ser mecanocuántico, cálculos publicados en la literatura [4] muestran que ésta puede ser adecuadamente tratada aunque se utilicen métodos basados en trayectorias clásicas. Esta aproximación tiene la ventaja de proporcionar una imagen física intuitiva de los procesos involucrados.

2 Sistema y Cálculo de Trayectorias

Las medidas experimentales existentes para las colisiones He-Cu [5] indican que excepto para las superficies más corrugadas el scattering fuera del plano es despreciable. Así, nosotros utilizaremos un Hamiltoniano en 2D:

$$H(x, z) = \frac{1}{2m_{\text{He}}} (P_x^2 + P_z^2) + V(x, z), \quad (1)$$

donde las coordenadas x y z representan las direcciones paralela y perpendicular a la superficie respectivamente, y el potencial $V(x, z)$ se toma como una función de Morse en la dirección z multiplicada por una corrugación armónica en x [5]. Así, el potencial es periódico en esta dirección con una periodicidad igual al tamaño de la celdilla unidad, a .

Las trayectorias se calculan por integración numérica de las ecuaciones de Hamilton empezando en la zona asintótica ($z_{\text{max}} = 12 \text{ \AA}$ en nuestro caso), y vienen caracterizadas por sus condiciones iniciales: E , θ_i y b , que son respectivamente la energía de colisión, el ángulo de incidencia (medido respecto a la normal a la superficie) y el parámetro de impacto (normalizado al valor de a) que da la posición inicial en la dirección x .



Figura 1.—Sección correspondiente a las caras cristalográficas (110) y (117) del Cu mostrando el origen atómico de la corrugación.

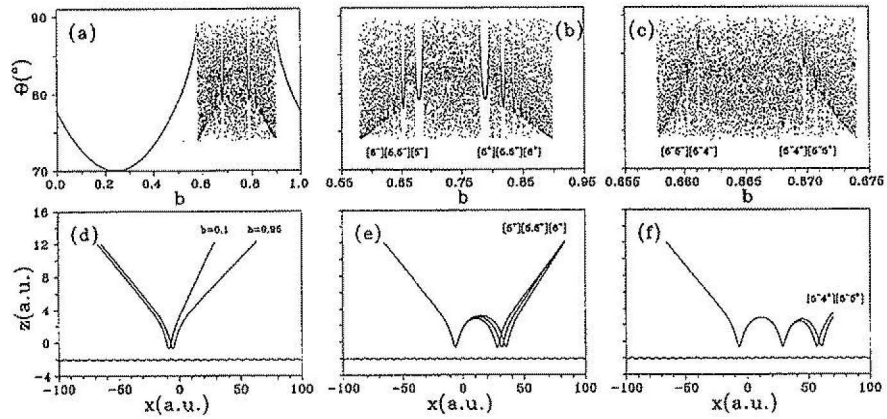


Figura 2.—(Arriba) Variación del ángulo de deflexión frente al parámetro de impacto para las colisiones He–Cu(110) a $E=21$ meV y $\theta_i=80^\circ$, y ampliaciones sucesivas de la zona caótica que aparece. (Abajo) Algunas trayectorias directas, (d), y atrapadas, (e)–(f), representativas de estas zonas.

Algunos resultados típicos se presentan en la Fig. 2, donde se muestra la variación del ángulo de deflexión θ_f con b . La curva consta de una parte suave y bien comportada, que corresponde a trayectorias directas [ver ejemplos en la parte (d)], y otra mucho más patológica que contiene una infinitud de singularidades correspondientes a trayectorias que permanecen atrapadas temporalmente en la superficie [ver ejemplos en las partes (e)–(f)]. En estas zonas patológicas, que reciben el nombre de regiones de *chattering* (resultado de fundir los términos *chaotic* y *scattering*), la dinámica muestra una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, que como es bien sabido constituye una de las mejores definiciones de caos desde un punto de vista operacional. Para entender el origen de esta conducta, aparentemente aleatoria, hay que fijarse en que las singularidades aparecen todas en $\theta_f = 90^\circ$. En estos casos, el choque del átomo incidente con la superficie es tal que la energía que queda en el modo perpendicular es ligeramente menor que la necesaria para escapar, de forma que tiende asintóticamente a un movimiento paralelo a la superficie. Al sobrepasar estos puntos, esta energía se hace apreciablemente menor y la partícula vuelve a rebotar sobre la superficie repetidamente hasta que recupera el impulso necesario para escapar. En general, los puntos de rebote están lo suficientemente

alejados del punto inicial como para que la trayectoria “pierda memoria” de las condiciones iniciales, originándose así una conducta caótica. Además, cuando estas regiones se amplían [Figs. 2 (b)–(c)] muestran que esta estructura de zonas regulares y caóticas se repite una y otra vez a menor tamaño, mostrando una simetría de escala que nos indica su naturaleza *fractal*.

El tema de los fractales ha sido recurrente en la bibliografía reciente y ya no sorprende [6] a nadie su aparición en situaciones como las descritas. Nosotros vamos a ir un paso más allá y mostrar cómo este fractal se puede relacionar con la dinámica subyacente, y qué cosas podemos aprender sobre la misma. Para ello, hemos representado en las Figs. 2 (e)–(f) trayectorias representativas (las que corresponden a los mínimos) de las zonas regulares que aparecen en la curva $\theta_f - b$. Se observa una clara jerarquía en las trayectorias. Por una parte, a medida que profundizamos en la ampliación de la zona de chattering las trayectorias realizan un mayor número de saltos antes de escapar, lo cual nos permite clasificarlas por generaciones. En segundo lugar, dentro de cada generación hay una zona central, de forma que a medida que avanzamos hacia la derecha o la izquierda, el último salto que da la trayectoria abarca una celdilla unidad más que en la zona regular precedente. En las figuras se ha incluido el equipotencial correspondiente a la energía de colisión para que puedan contarse fácilmente el número de celdillas involucradas en cada trayectoria. Teniendo en cuenta estos dos hechos, la jerarquía que antes mencionábamos se puede materializar en un sistema de etiquetaje que caracterice cada trayectoria mediante una serie de dígitos que indiquen el número de celdillas atravesadas en cada salto. Sólo falta añadir, para que la regla sea biunívoca, un superíndice + ó – dependiendo de que la trayectoria se encuentre a la derecha o a la izquierda de las trayectorias de la generación anterior. Este criterio es el que se ha utilizado en la Fig. 2, y ha sido descrito en detalle en la Ref. [7].

El enfoque que acabamos de presentar descansa en una imagen intuitiva que es posible porque se ha utilizado la mecánica clásica. Sin embargo, tiene la desventaja de ser excesivamente heurístico. Por ejemplo, hay una serie de cuestiones para las cuales no tiene respuesta: ¿por qué no aparece ninguna trayectoria en la que el primer salto sea de menos de 5 celdillas?, ¿por qué las sucesivas generaciones corresponden a un número creciente de saltos?, etc. Una respuesta satisfactoria a estas cuestiones necesita un enfoque más fundamental que atienda más a la topología del caos que a su fenomenología. Para ello recurriremos a los trabajos de Poincaré [8], uno de los pioneros de la ciencia del caos.

3 El cumpleaños del rey Oscar II de Suecia

En 1898 Mittag-Leffler fue encargado de convocar un concurso con motivo del sesenta cumpleaños del rey Oscar II de Suecia [9]. Se pidieron contribuciones sobre cuatro problemas propuestos por Weierstrass, uno de los cuales consistía en demostrar la estabilidad del sistema solar. Este problema tuvo su origen, según parece, en un comentario de Dirichlet a Kronecker, según el cual este había conseguido demostrar la convergencia de las series utilizadas en mecánica celeste, aunque nunca dejó prueba escrita de la demostración. El premio, consistente en 2500 coronas y una medalla, lo ganó Henri Poincaré con un trabajo sobre el problema reducido de tres cuerpos, que Hill había utilizado en el cálculo de órbitas lunares, y que fué publicado con el título: "*Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*", donde se demostraba que en los sistemas deterministas hay lugar para la impredecibilidad.

En su trabajo Poincaré introdujo dos ideas seminales. Por una parte visualizó el espacio de las fases de Hamilton mediante superficies de sección (SSP), lo cual transforma los problemas dinámicos en topológicos, permitiendo visualizar a la vez todas sus soluciones del problema. En segundo lugar, puso de manifiesto la importancia de las órbitas periódicas inestables (OPI) y su entorno, donde se origina la llamada *red homoclínica*, para entender la dinámica de los sistemas caóticos.

4 Red homoclínica

Si aplicamos el programa de Poincaré al caso que nos ocupa, nos encontramos el problema de que en sistemas no ligados no hay una forma estandar de definir SSPs. En nuestro caso, aprovecharemos la periodicidad y simetría del potencial, [$V(x, z) = V(x + a, z)$, $V(x, z) = V(-x, z)$ y $V(a/2 + x, z) = V(a/2 - x, z)$], y la situaremos en $x = x_0 + na$, con $x_0 = 0$ ó $a/2$. Por otra parte, la OPI relevante es una trayectoria que se mueve paralelamente a la superficie en la zona asintótica, lo cual no parece, a primera vista, que pueda ser muy fructífero. Vamos a ver, sin embargo, como en el entorno de esta trayectoria tan simple, se genera toda la estructura caótica que gobierna la conducta dinámica de la zona de interacción.

En la Fig. 3 se presentan, para dos energías de colisión, las SSP de 2000 trayectorias correspondientes a $\theta_i = 90^\circ$ †. En primer lugar se observa que la figura resultante para 400 meV es más sencilla que la de 21 meV, que presenta unas oscilaciones muy acusadas. Estas son las oscilaciones homoclínicas

†Más correctamente un valor (89.999°) computacionalmente equivalente.

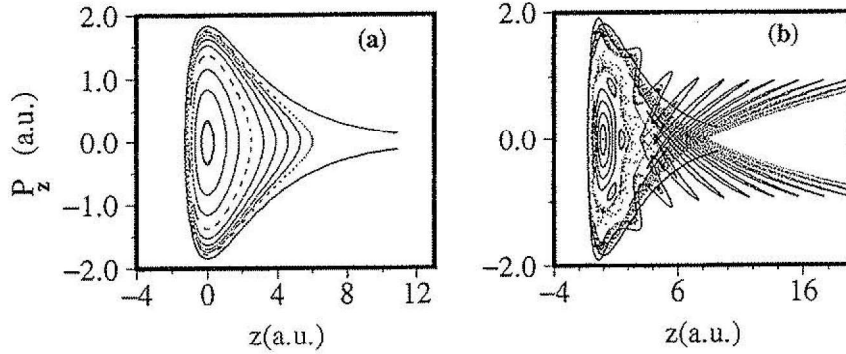


Figura 3.—Red homoclínica de la órbita inestable principal para las colisiones He-Cu(110) a: (a) 400 meV, y (b) 21 meV.

que puso de manifiesto Poincaré, y que están compuestas por una maraña increíblemente complicada de cruces, que es la expresión del caos existente. La estructura que forman estos cruces entre las ramas correspondientes a valores iniciales de P_z positivos y negativos es el resultado de dos efectos: los lóbulos interno y externo de cada oscilación deben encerrar áreas iguales, y cada rama no puede cruzarse a sí misma. Hay que indicar que la apariencia sencilla de la Fig. 3 (a) no quiere decir que para 400 meV no existan oscilaciones, sino simplemente que no son apreciables en la escala de la figura.

En segundo lugar, en la Fig. 3 (a) se observa que el espacio de fases está dividido en dos regiones: la interna, formada por curvas cerradas alrededor del origen, que corresponde a trayectorias regulares completamente atrapadas, y la zona externa (donde no se ha dibujado ninguna curva) que corresponde a trayectorias de colisión que vendrían de $z = \infty$ con $P_z < 0$ para ir hacia $z = \infty$ con $P_z > 0$ rodeando la zona atrapada y cambiando de signo en el choque del He con la superficie. La estructura que presenta el espacio de fases es indistinguible del caso regular, en el que el potencial constara sólo de la función de Morse. En la Fig. 3 (b) la fenomenología es esencialmente la misma, aunque más complicada por el hecho de que las oscilaciones ya no son despreciables. En este caso, las trayectorias de colisión se comportan de dos maneras diferentes, dependiendo de que inicialmente estén situadas dentro o fuera de las oscilaciones. Si están fuera la dinámica es igual a la descrita anteriormente, pero si están dentro la trayectoria entrará en algún momento en la zona de atrapamiento,

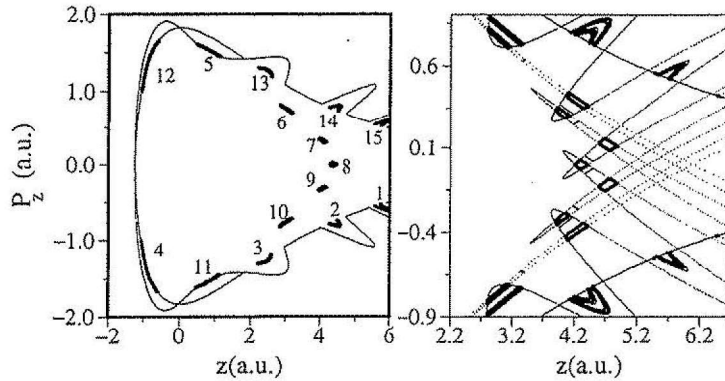


Figura 4.—Ampliación de la Fig. 3 (b) mostrando: (a) la dinámica de una trayectoria atrapada temporalmente saltando por las teselas que componen la zona caótica del espacio de fases, y (b) el origen de estas teselas en las intersecciones de los lóbulos de las oscilaciones homoclínicas.

permaneciendo allí un cierto intervalo de tiempo antes de salir. Esta dinámica se ilustra en la Fig. 4 (a) para las trayectorias marcadas como $[8^\pm]$. Las sucesivas intersecciones con la SSP caen dentro de un conjunto de teselas, que recubren de forma densa toda la zona caótica, siendo así su organización un reflejo de la estructura del caos que exhibe nuestro problema. Estas teselas, como se aprecia en la parte (b), donde además se han dibujado otras familias ($[9^\pm]$ y $[8^\pm, 8^\pm]$), se originan por las sucesivas intersecciones de los lóbulos de las oscilaciones homoclínicas. Además, estas teselas se acomodan en forma de herradura unas dentro de otras, en los lóbulos anteriores a la entrada en la región de interacción, formando una estructura fractal.

Esta imagen es, así, mucho más predictiva que los argumentos utilizados en la Sec. 2. Por ejemplo, vamos a ver cómo nos permite interpretar los resultados que se obtienen para cualquier otro valor del ángulo de incidencia. Para un valor de $\theta_i \neq 90^\circ$ las condiciones iniciales son diferentes de las utilizadas en la construcción de la Fig. 3. Ahora bien, sean las que sean, formarán un segmento que se puede dibujar superpuesto a la red homoclínica de 90° . Esta línea cortará las oscilaciones homoclínicas indicando cuales quedarán dentro y cuales fuera, lo que determina su destino final. Así, se puede predecir que, en el caso que nos ocupa, existe un umbral de caos que corresponde al valor de θ_i (igual a 74.3957°) para el cual la línea de condiciones iniciales es tangente a todos los picos de las oscilaciones homoclínicas [ver Fig. 5 (a)]. Por otra parte, esta figura

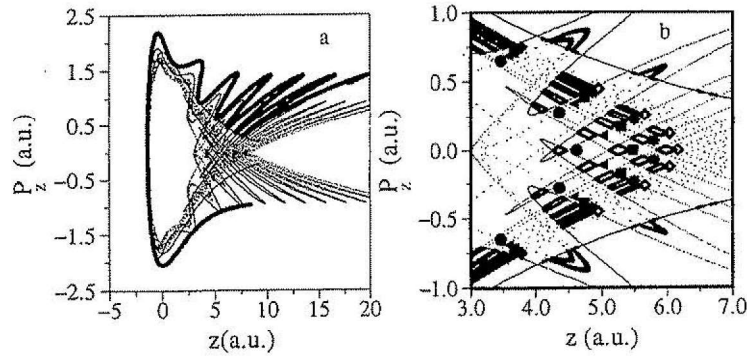


Figura 5.—(a) Superficies de sección correspondientes al umbral de caos que ocurre para $\theta_i = 74.3957^\circ$. (b) Ampliación de la Fig. 4 mostrando la relación existente entre teselas y órbitas periódicas de período 8 (círculos), 9 (triángulos), 10 (cuadrados) y 11 (rombos). Ver más detalles en el texto.

también nos indica que a medida que se aumenta el valor de θ_i (de forma que se tienda al valor máximo de 90°), la intersección de la línea de condiciones iniciales se va desplazando hacia el interior de las oscilaciones, cortando cada vez más teselas. Así, las zonas regulares, centrales de las figuras de θ_f frente a b corresponden a saltos iniciales de un menor número de celdillas, existiendo un valor mínimo que ocurre cuando se corta la tesela más interior, es decir la que corresponde al primer cruce entre lóbulos de las oscilaciones homoclínicas. Para establecer cuál es este primer cruce hay que tener en cuenta que, como se muestra en la Fig. 5 (b), en la vecindad de cada intersección homoclínica hay una órbita periódica (infinitamente atrapada) cuya topología es similar a la de las trayectorias de la correspondiente tesela. Estas órbitas periódicas se pueden calcular fácilmente debido a que forzosamente siguen algún patrón de simetría, y su desaparición a medida que disminuye la energía se representa en el llamado *diagrama de bifurcación* [7].

Para concluir, indicaremos que en este artículo se ha presentado un análisis de las estructuras fractales que determinan la conducta caótica en el scattering de átomos de He sobre superficies de Cu, descrito por un potencial realista, relacionando en todo momento los resultados que se obtienen con la dinámica subyacente, lo que ha permitido explicar de forma intuitiva diversos hallazgos experimentales [7]. Asimismo, estos resultados se han sistematizado utilizando las ideas introducidas por Poincaré en su estudio de la estabilidad del sistema

solar un siglo atrás.

Referencias

- [1] J. M. Greene, *J. Math. Phys.* **20**, 1183 (1986); A. A. Zembekov, F. Borondo and R. M. Benito, *J. Chem. Phys.* **107**, 7934 (1997).
- [2] Ver por ejemplo: B. Eckhardt, *Physica D* **33**, 89 (1988); U. Smilanski, en *Chaos in Quantum Physics*, editado por M.-J. Giannoni, A. Voros y J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1992), pág. 371.
- [3] E. Hulpke (editor), *Helium Atom Scattering from Surfaces* (Springer Verlag, Berlin, 1992).
- [4] R. B. Gerber, *Chem. Rev.* **87**, 29 (1987); R. Guantes, F. Borondo, C. Jaffé y S. Miret-Artés, *Phys. Rev B* **53**, 14117 (1996).
- [5] D. Gorse et al., *Surf. Sci.* **47**, 611 (1984).
- [6] Sin embargo, véase una crítica reciente sobre la existencia de fractales en la naturaleza en: D. Avnir et al., *Science* **279**, 39 (1998).
- [7] R. Guantes, F. Borondo y S. Miret-Artés, *Phys. Rev. E* **56**, 378 (1997); R. Guantes, Tesis Doctoral (UAM, 1997).
- [8] H. Poincaré, *New Methods in Celestial Mechanics* (AIP Press, Williston, 1995).
- [9] I. Peterson, *Newton's Clock: Chaos in the Solar System* (Freeman, New York, 1993).

EL MUNDO DE LA CIENCIA
Y
LAS MATEMÁTICAS DEL MUNDO

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Extracto del discurso leído por el Profesor Díaz en el acto de su recepción en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. El discurso completo ha sido publicado por la Academia.

1 La calidad frente a la polémica estéril: puro *versus* aplicado

La clave de la aplicabilidad de un resultado matemático radica en su calidad, independientemente de si ha sido concebido en aras de una aplicación concreta. La vieja polémica entre *matemática aplicada* y *matemática pura*, ya iniciada con el cruce de insinuaciones entre Jacobi y Fourier a principios del XIX¹ me parece estéril e infructuosa. Tampoco es nada atrayente la cuestión de si se debería matizar entre *matemática aplicada* y *matemática aplicable*. Cuando las matemáticas involucradas son de calidad se pierde toda distinción y lo que las caracteriza es su unidad, su potencia y su universalidad. En una primera aproximación se podría decir que la matemática es buena si sobrevive y es mala si lo más correcto es ignorarla antes que desaparezca de la escena. Obviamente esto es excesivamente vago. Es claro que la noción de buena y mala matemática es casi una cuestión de gusto personal, como lo prueba la provocadora y difícilmente respetable toma de posición de algunos matemáticos relevantes (véase Halmos [28]). En cualquier caso, parece haber un acuerdo común sobre lo que son matemáticas buenas y las que no lo son. Algunos autores se atreven a hacer un listado de los criterios que definen una buena matemática (véase Saari [50]). Yo prefiero mantenerme en una cierta ambigüedad consensuada.

¹Véase, por ejemplo, Dieudonné [19].

En realidad, la compleja dialéctica entre ciencia pura y ciencia aplicada no se limita al campo de las matemáticas y es uno de los problemas más profundos de la historia científica. De hecho, tal polémica a veces viene enunciada en términos de ciencia *versus* tecnología, reservando a la primera un carácter puro y asignando a la segunda, de manera conceptual, el papel de ciencia aplicada ².

Volviendo a la calidad como alternativa a esta polémica, es de señalar que ese espíritu congeniador no es nuevo y ya Leonhard Euler, uno de los más grandes “matemáticos aplicados” de la historia, nos decía en 1747 (Euler [22], I.2, pp. 63-63):

... ni el autor es perturbado por la autoridad de los más grandes matemáticos cuando declaran algunas veces que la teoría de números es sin embargo inútil y no merece investigación. En primer lugar, el conocimiento es siempre bueno en sí mismo, incluso si parece alejado del uso común. En segundo lugar, todos los aspectos de la verdad que son accesibles a nuestra mente están tan cerca unos de otros que no deberíamos rechazar ni siquiera los que no tengan utilidad. Además, incluso si la demostración de alguna proposición no parece tener un uso inmediato, sucede con frecuencia que el método por el que ese problema ha sido resuelto abre el camino al descubrimiento de resultados más útiles.

Euler conocía mejor que nadie de su tiempo la íntima relación entre la “inútil” teoría de números y el cálculo de perturbaciones para el estudio de las trayectorias de los planetas³. El ejemplo de Euler no es el único, ha habido, hay y habrá casos como el suyo: los más recientes de von Neumann y Wiener son reivindicados por los defensores más radicales de la matemática pura y de la aplicada.

Hubo una época en la que esa pretendida separación entre las llamadas matemáticas puras y aplicadas era ficticia pues los matemáticos cultivaban ambos enfoques, además de otras ciencias. La separación se puede decir que alcanzó su máximo con la irrupción de la matemática más abstracta desarrollada por el grupo Bourbaki aunque algunos, como Auslander y Tolimieri [5], sitúan ese

²Aunque la polémica tiene un interés actual (véase, por ejemplo, Sánchez Ron [51]), tiene antecedentes lejanos que se remontan al siglo X. Así nos lo describe el ingeniero árabe Al-Farabi (870-950) en el artículo III de su tratado [1] en el que se refiere a la difícil transición entre teoría y práctica.

³Mi profunda admiración por la figura de Euler me fue inculcada, hace ya tiempo, por Alberto Dou, estudioso y traductor de su obra (véase Dou [23]) y por Amable Liñán, para quien Euler es una constante referencia por sus pioneras y profundas aportaciones a la mecánica de fluidos.

máximo en la época posterior a la Segunda Guerra Mundial y con la selectiva política científica, en especial en el campo de la matemática aplicada, del gobierno de Estados Unidos.

Von Neumann expresaba en [41] su preocupación ante situaciones límite:

Las ideas matemáticas se originan empíricamente...; una vez que son concebidas, el tema comienza a tener vida propia... Cuando una disciplina matemática se aleja de su origen empírico... se vuelve cada vez más guiado por la estética; si el alejamiento es descomunal, o si se alcanza una gran abstracción, el tema matemático está en peligro de degeneración.

Afortunadamente, hoy día ambos enfoques vuelven a tener numerosos puntos en común con un rico intercambio de ideas⁴. Bastiones de la matemática pura están hoy próximos a las aplicaciones y así, a modo de ejemplo, la geometría no conmutativa tiene importantes conexiones con la mecánica cuántica y con la física del estado sólido, la teoría de nudos en topología está siendo aplicada en electromagnetismo, mecánica de fluidos, la teoría cuántica de campos y la genética molecular, etc. Lejos de haber arrinconado al *mundo de las matemáticas*, los modernos y potentes ordenadores las han enriquecido del espíritu de las *matemáticas del mundo* al hacer aplicables a problemas prácticos técnicas matemáticas de gran sofisticación.

2 Sobre el arte de modelizar

La primera de las etapas a la hora de abordar un problema “real” la constituye la *modelización matemática*. Un modelo no es más que un conjunto de relaciones utilizado para representar y estudiar de forma simple y comprensible un objeto o fenómeno de la realidad.

La experiencia muestra que obtener un modelo “correcto”, en los términos de los que nos ocuparemos más tarde, no es siempre una tarea fácil y de hecho puede equivaler a haber resuelto ya más de la mitad del problema. Existen algunos recursos para afrontar esa difícil tarea pero su carácter constructivo involucra inevitablemente otras componentes ligadas a la experiencia, intuición y sentido estético. Estas son quizás las razones por la que numerosos autores se refieren a ese proceso cómo “el arte de modelizar”.

⁴Esa interacción aparece perspicazmente observada en el libro de Pollard [46] en el que escribe: “Purifiquemos ahora lo aplicado y apliquemos lo puro.”

No es difícil encontrar antecedentes del proceso de modelización acudiendo a análisis antropológicos. Aristóteles [3] afirmaba ya:

El hombre es el más mimético de todos los animales y gracias a ese mimetismo adquiere todos sus conocimientos.

Esta capacidad le lleva a intentar repetir con su cuerpo y en su mente el mundo exterior. Su oído y su garganta le permiten reproducir los sonidos. La dualidad repetición-retroacción es uno de los fundamentos del aprendizaje individual que se extiende más tarde por la dimensión social del hombre. Perrier [45] sugiere ver la capacidad innata de simulación del mundo exterior en las admirables danzas de caza de los pueblos llamados primitivos. En ellas ya hay una racionalización del proceso de extrapolación-generalización. Apunta este autor que uno de los problemas abiertos de la antropología (de la sociología y de la psicología) radica en justificar la “visión anticipada” de los hechos que con frecuencia se presenta en la conducta humana una vez que ha tomado conciencia de una situación.

La pintura y la escultura son artes en las que no es difícil ver actitudes con muchos puntos comunes con las que se desarrollan en la modelización. ¿Cómo no ver en los impresionantemente bellos y precisos dibujos de los remolinos de agua de Leonardo da Vinci la esencia del espíritu científico observando una compleja realidad e intentando reproducirla para así comprenderla mejor? ¿Cómo no ver en la sonrisa de su Gioconda, o en tantas obras del Greco y de Goya, la representación materializada de un mundo interior inmaterial? ¿Cómo no asombrarse ante la genialidad de Velázquez para captar el sentido de la luz?

Semánticamente la palabra “modelo” tiene una rica acepción. El Diccionario de la Real Academia de la Lengua, en su vigésima primera edición, le asigna hasta diez significados⁵. Además del que otorga al ámbito propiamente matemático, me parece especialmente indicativo otro de ellos, el cuarto, en el que se le da el significado de “representación en pequeño de una cosa”. Esta acepción está más cercana de los llamados *modelos icónicos* de los que los mapas, las fotografías y las maquetas son excelentes ejemplos. El modelo matemático también se puede entender unido a esa idea de cambio de escala, aunque la escala aludida no sea la espacial sino la de la abstracción⁶. Pero además la

⁵Alberto Dou me hizo fijar la atención en cómo la palabra “modelo” puede tener acepciones bien diferentes a la que utilizamos en el ámbito matemático. Así, por ejemplo, en pintura, el modelo es la persona que posa y no el cuadro en sí mismo que reproduce la realidad. Algo parecido ocurre también en el ámbito de la confección. Ambos casos corresponden a la décima acepción del Diccionario.

⁶Un detallado y muy documentado análisis de la relación entre el modelo matemático y otros usos de esa palabra puede encontrarse en la monografía de Aris [4].

modelización debe completarse con el proceso de la experimentación, para lo que es de gran utilidad la maqueta a pequeña escala. Volveremos sobre esa relación más tarde.

La modelización de una compleja realidad no ha pasado siempre por el uso de la matemática. La historia pasada nos ha brindado otros numerosos ejemplos: son los llamados *modelos analógicos*, principalmente los *modelos mecánicos* y los *modelos eléctricos*. Entre los primeros son de resaltar las máquinas de calcular: tanto la *Pascalina* de Blas Pascal (1623-1662) como la máquina de Leibniz y las primeras máquinas de Charles Babbage (1792-1871) y Ada Lovelace, hija de Lord Byron. Desde finales del siglo XIX el modelo eléctrico reemplazó al mecánico⁷⁸.

Durante siglos, las simplificaciones necesarias para que la respuesta matemática obtenida del modelo fuera relevante eran descorazonadoras. Las llamadas "soluciones explícitas" sólo eran posibles en casos muy particulares. Los cálculos requerían mucho trabajo y tiempo. La aparición de los ordenadores cambió drásticamente el panorama. Aún así, es justo recordar los grandes éxitos de la modelización en tiempos anteriores a los de los ordenadores. Uno de mis preferidos es el de John Couch Adams y Urbain Le Verrier cuando desde sus despachos descubrieron, en 1846, un nuevo planeta: Neptuno. Calculando su trayectoria a partir de las perturbaciones de la trayectoria de Urano, realizaron una hazaña científica que se inscribió para siempre en los anales de la historia de la ciencia.

El proceso de modelización es de naturaleza pluridisciplinar pues requiere un conocimiento del objeto a modelizar y una cierta experiencia en las técnicas matemáticas que hacen coherente un modelo. Con frecuencia este proceso es el fruto de la colaboración de matemáticos con otros científicos. El proceso comienza por detectar las variables a determinar y aquellas otras magnitudes que se puede suponer como datos. Los principios básicos de las distintas ciencias conducen a una serie de ecuaciones (en la mayoría de los casos diferenciales) así como a unas condiciones auxiliares (información de lo que sucede en un tiempo inicial, en el contorno del dominio espacial donde se estudia el fenómeno, etc).

La modelización puede necesitar grandes dosis creativas y ha marcado gran-

⁷Véanse los comentarios de Lions [35] a propósito de un trabajo de Vito Volterra (1860-1940) en el que utiliza un modelo eléctrico, basado en las ecuaciones de Maxwell, para estudiar la temperatura en el interior de una montaña. Véase también los comentarios sobre máquinas analógicas en el discurso de Puig Adam [47].

⁸En ese campo se enmarcan las valiosas aportaciones, internacionalmente reconocidas, de Leonardo Torres Quevedo, quien dedicó su discurso de ingreso en esta Real Academia, [58], a una exposición sobre las *maquinas algebricas*.

des avances de la ciencia. Es el arte de hallar el lenguaje matemático subyacente en el universo que nos preconizaba Galileo. Uno de los grandes maestros matemáticos de este siglo, James Serrin, refiriéndose en [55] a su disconformidad con que todo proceso de modelización sea entendido como algo “pedestre” o de pobre contenido intelectual, escribía:

¿Se limita a ese mero tipo de modelización el establecimiento por Newton de sus leyes, o los descubrimientos de la *teoría de campos para medios deformables* de Euler y Cauchy, o la invención de *geometrías no Euclideas*, o de la *teoría de la relatividad*? Estos descubrimientos son más bien aplicaciones capitales del pensamiento matemático orientado a problemas físicos,..., y forman parte central de nuestra herencia matemática.

Más tarde me referiré a otros ejemplos en los que la modelización alcanza una gran finura matemática.

El modelo matemático se introduce como “prototipo”, bajo unas simplificaciones necesarias. Según la naturaleza de las simplificaciones supuestas se puede obtener una familia de modelos susceptibles de ser ordenados jerárquicamente según su distinta complejidad. Esa jerarquía aparece, por ejemplo, si al estudiar una variable física, como la temperatura de un medio continuo, la suponemos *homogénea espacialmente*, es decir constante para todos los puntos, o por el contrario la suponemos *distribuida espacialmente*, es decir variando de un punto a otro del medio continuo. En el primer caso obtendremos un modelo dado por una *ecuación diferencial ordinaria*; en el segundo el modelo será notablemente más complicado por contener *una ecuación en derivadas parciales*⁹. A su vez, esos modelos admiten varias subjerarquías según que nos interese la evolución en el tiempo o no. Los primeros son denominados *modelos en régimen transitorio*, o *modelos de evolución*, y los segundos *modelos de equilibrio*, o *modelos estacionarios*. Todos los modelos aludidos anteriormente son llamados *modelos continuos* dado que las incógnitas en estudio están definidas con continuidad. Su aproximación numérica conduce inevitablemente a *modelos discretos* dados por *ecuaciones en diferencias*. Otras veces los modelos discretos aparecen ya

⁹Sobre ecuaciones diferenciales trataron los discursos de Terradas [57] y Don [20]. Modelos involucrando *ecuaciones integro-diferenciales*, *ecuaciones con retardo* y otras *ecuaciones funcionales* también aparecen con gran frecuencia en la práctica (véase, por ejemplo, Navarro [40], Courant y Hilbert [14], Dautray y Lions [17] y sus referencias). También es de reseñar que la presencia simultánea de variables homogéneas y distribuidas, y por tanto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas con ecuaciones en derivadas parciales, se da en numerosas aplicaciones como, por ejemplo, en *adsorción* (véase Costa [13]).

en la formulación natural del problema, sin conexión alguna con ningún modelo continuo¹⁰.

Los modelos antes mencionados responden a un cierto tipo genérico. Son los llamados *modelos directos* pues su planteamiento presupone conocidos todos los datos del problema y su solución es la incógnita a determinar. Por el contrario, en los llamados *problemas inversos*, los verdaderos objetos de investigación son algunos de los datos auxiliares (parámetros, condiciones iniciales, etc), presuponiéndose conocidas algunas informaciones adicionales sobre la solución. Este tipo de problemas posee numerosas aplicaciones que van desde la explotación petrolífera y minera a la obtención de técnicas de diagnóstico médico, que reemplazan intervenciones quirúrgicas peligrosas, tales como, por ejemplo, la tomografía por resonancia magnética nuclear, que permite obtener imágenes de secciones del cerebro, o de otros órganos del cuerpo, a partir de medidas externas, etc.

Otra importante subjerarquía, sin duda diferenciando drásticamente la naturaleza de las técnicas que se han de emplear en el tratamiento posterior, se refiere a si la formulación parte de un punto de vista *determinista* o por el contrario se toleran elementos fortuitos, provenientes del azar. Esta última situación lleva a los *modelos estocásticos*, del tipo del movimiento Browniano, en los que la huella de Markov, y más recientemente de Ito, Dynkin y tantos otros, ha marcado su desarrollo hasta nuestros días. Mis reflexiones son fruto de mi actividad en el campo de los fenómenos deterministas y por tanto no estarán inspiradas en ese otro tipo de modelos, ni tampoco en *modelos estadísticos* en los que la información obtenida a través de los datos accesibles es utilizada como valores de una variable aleatoria para analizar la función de densidad u otras nociones asociadas^{11,12}.

Pero volvamos a la descripción genérica de la tarea de la modelización. El modelo nunca es "idéntico" al objeto en consideración, no podremos obtener de él todas las propiedades y particularidades del objeto de partida. Al modelizarlo se obtiene su reflejo aproximado, por lo que las consecuencias derivadas sólo pueden tener un valor aproximativo. La exactitud de esas consecuencias depende, íntimamente, de las simplificaciones realizadas inicialmente y ha de ser necesariamente contrastada: es la etapa de *validación* a la que me referiré

¹⁰Véase, por ejemplo Ortega y Rheinboldt [43].

¹¹Una referencia reciente y de gran claridad es la monografía de Sixto Ríos [48].

¹²Existen numerosas conexiones entre los modelos estocásticos y deterministas. Por ejemplo, la solución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales pueden ser entendidas como soluciones de problemas estocásticos construidos adecuadamente. Véase, por ejemplo, Fleming y Rishel [24] y Bensoussan y Lions [9].

más tarde.

Las simplificaciones introducidas son claramente función de los objetivos que se desea alcanzar. La modelización tiene, pues, una fuerte interacción con las etapas de validación, predicción, diseño y control que desarrollaremos en otras secciones. La jerarquía de los modelos que aproximan a un objeto, o a un fenómeno, suele partir de la “sana” filosofía que aconseja proceder de lo sencillo a lo complicado. La necesidad de revisar un modelo inicialmente aceptado puede venir motivada por diferentes razones: las respuestas obtenidas de modelos sencillos pueden ser extremadamente vagas y se desean respuestas más precisas, o bien porque se posea una nueva información sobre el objeto y ésta no se derive del modelo inicial, o bien porque se tenga interés en ciertos valores de los parámetros que queden fuera de la aplicabilidad del modelo de partida, etc. La construcción de un nuevo modelo suele apoyarse en la experiencia obtenida del modelo jerárquicamente anterior y, a menudo, el proceso de desarrollo y mejora del modelo se repite varias veces. Jerarquías de modelos se presentan en numerosos campos de la ciencia¹³.

La revisión de un modelo no tiene por qué ir, necesariamente, en la dirección de aumentar su complejidad o aumentar el número de parámetros y variables. A veces el modelo de partida es muy complejo y lo que interesa es obtener alguna información orientadora, aunque sea al precio de considerar únicamente algún caso particular relevante que corresponda a una cierta simplificación.

Una primera herramienta para “despreciar” alguno de los términos que aparecen en una complicada ecuación es el análisis de los *ordenes de magnitud* de cada uno de los términos en función de las *unidades características* que aparecen en el problema. Para ello se introducen cambios de variables que pasan el problema a su *formulación adimensional* haciendo aparecer una serie de parámetros¹⁴. De esta manera ya no hablaremos de un medio concreto asociado a una geometría particular sino de un caso universal que, recuperadas las magnitudes con sus dimensiones, lleva a una aplicación concreta. Este es el principio de la experimentación con maquetas. El *análisis dimensional*, cuyos orígenes se remontan ya a J. B. Fourier, conduce a la búsqueda de *soluciones autosemejantes*, válidas frente a adecuados cambios de escala en todas las mag-

¹³Exposiciones detalladas ilustrando esa filosofía se pueden encontrar, por ejemplo, en Aris [4], Demu [18] y Liñán [34], quienes lo ilustran mediante problemas de ingeniería química y de combustión, y Henderson-Sellers y McGuffie [29], quienes abordan diversos modelos climáticos.

¹⁴En mecánica de fluidos estos parámetros llevan los nombres de sus descubridores; son los números de Reynolds, Strouhal, Froude, Mach, Nusselt, Prandtl, etc. Véase, por ejemplo, las exposiciones de Millán [38], Liñán [34] y García Velarde [26].

nitudes. Dicha teoría tiene importantes conexiones con la *teoría de grupos*¹⁵.

La idea de simplificar un modelo complejo es también el principio que inspira, por ejemplo, la *teoría de la capa límite* en el estudio de un fluido viscoso al encontrar un obstáculo¹⁶. Las ecuaciones de partida son las de Navier-Stokes, pero sólo cuando se hacen adecuadas hipótesis simplificadoras, en términos de las escalas del obstáculo y la dirección del flujo, se puede obtener un modelo que dé luz a este complicado fenómeno. Otro tanto sucede con el modelo de *aguas poco profundas* de Saint-Venant (1797-1886) y muchos otros *submodelos* del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes¹⁷:

Otro género de problemas, en el que el reduccionismo es fundamental, de gran relevancia actual, tanto por sus aplicaciones como por la riqueza de las técnicas matemáticas desarrolladas, nace de la conexión entre *fenómenos microscópicos y macroscópicos*. Problemas de esta naturaleza aparecen en el estudio de “nuevos materiales” (los llamados *materiales compuestos*) de gran interés por sus propiedades elásticas, térmicas, magnéticas y acústicas¹⁸; en filtración de fluidos en medios porosos, etc. De nuevo, el proceso de modelización dista de ser una operación rutinaria. Lo que ahora se pretende obtener son unas *leyes homogeneizadas* para un objeto “virtual”, que por un lado tengan en cuenta las características del enorme número de sus componentes elementales pero que sea “manejable” y no precise distinguir entre los distintos puntos del objeto global. Las técnicas empleadas en estos procesos, tales como las de *homogeneización* (o desarrollos “en dos escalas”), *de promedios* y otras, forman parte del llamado *análisis asintótico*: el número de componentes es tan elevado que la modelización se realiza suponiendo que tal número crece hasta infinito¹⁹.

La formulación de las ecuaciones de un modelo suele ser fruto de expresar las leyes “físicas” de conservación (o de balance) en términos de las incógnitas del problema. Pero con frecuencia esas leyes no bastan para formular el número suficiente de ecuaciones que requieren las incógnitas del problema. Esto, lejos de ser un grave inconveniente, es coherente con el hecho de que esas leyes son aplicables a objetos o fenómenos de una gran heterogeneidad. Se ha de acudir, entonces, a formular unas *relaciones constitutivas* que especificando las características del objeto modelado completen el número de ecuaciones. Esas relaciones constitu-

¹⁵Entre las muchas referencias posibles son dignas de mención las de Palacios [44] y Barenblatt [6].

¹⁶Véase, por ejemplo, Schlichting [53].

¹⁷Véase, por ejemplo, Millán [38].

¹⁸Véase, por ejemplo, Alario [2].

¹⁹Entre las muchas referencias son relevantes las monografías de Bensoussan, Lions y Papanicolaou [10], Sanchez-Palencia [52] y Oleinik y otros [42].

tivas suelen introducir una jerarquía de modelos según su relativa sofisticación y son uno de los orígenes más frecuentes de la presencia de términos no lineales en los modelos²⁰.

El proceso de modelización culmina cuando el modelo contiene “implícitamente” la información buscada: algo que se dilucida mediante otro tipo de técnicas matemáticas a las que me referiré en la siguiente sección.

Una clase de modelos a los que he dedicado una buena parte de mi tiempo desde mis inicios en la investigación, aunque haya abordado también otro tipo de cuestiones, son los llamados *problemas de frontera libre*. Se trata de unos modelos, principalmente dados por ecuaciones en derivadas parciales, en los que aparecen unas curvas o superficies cuya localización es desconocida a priori y que separan geoméricamente regiones con diferentes propiedades. El ejemplo más típico es el que corresponde a la solidificación del agua o al derretimiento del hielo: es el llamado *problema de Stefan*. La separación entre hielo y agua no se puede fijar a priori y genera una superficie, *una frontera libre*, cambiante durante el proceso. Problemas de frontera libre aparecen de manera natural en la formulación matemática de numerosos problemas de la ciencia y de la tecnología²¹. Por citar sólo algunos de ellos nos podríamos referir a problemas relacionados con el tratamiento de materiales (solidificación del acero, crecimiento de cristales, semiconductores, termistores, superconductividad, etc.), problemas planteados en biología (crecimiento de huesos, dispersión difusiva de bacterias, etc), en teoría de la combustión y otros problemas de reacción-difusión, problemas de la mecánica de fluidos (capa límite, filtración en medios porosos, lubricación, capilaridad, zonas sólidas en fluidos no-Newtonianos, etc), en economía (modelización de opciones, problemas de mercado y de abastecimiento, etc) entre otros.

La formulación matemática de algunos problemas de frontera libre suele requerir expresiones no clásicas tales como las llamadas *inecuaciones variacionales* o las ecuaciones asociadas a *operadores multívocos*²².

3 Análisis matemático del modelo

El tratamiento matemático de un modelo pretende deducir de éste una serie de propiedades cuantitativas y cualitativas. En primer lugar, esas propiedades

²⁰Véase, por ejemplo, Galindo [25], así como referencias sobre *fluidos no-Newtonianos*, *gases politrópicos*, etc.

²¹Para una exposición de los aspectos de modelización de algunos de los problemas de frontera libre más representativos véase el libro de Crank [16].

²²Véase, por ejemplo, Duvaut y Lions [21], Brezis [11] y sus referencias.

deben justificar, de manera simple, las observaciones y medidas realizadas sobre el “sistema” modelado, ya sea un objeto o un fenómeno. Pero además, y más importante aún, deben conducir a informaciones complementarias prediciendo posibles comportamientos del sistema.

Las importantes limitaciones a la hora de encontrar soluciones explícitas a las ecuaciones de los modelos han estado presentes en las mentes de los matemáticos desde antes de Newton. Una de las principales razones de esas limitaciones, aunque no la única, radica en el carácter *no lineal* de la inmensa mayoría de los modelos relevantes en las aplicaciones.

Relaciones no lineales, en las que *la regla de tres* no es aplicable, aparecen ya en las *leyes de Kepler* sobre el movimiento de los planetas. No lineal es la *ley de gravitación universal* de Newton que conduce a la modelización del movimiento de esos planetas. No lineales son las ecuaciones de Euler o de Navier-Stokes que rigen los movimientos de un fluido. No lineal era la primitiva ecuación de Laplace para encontrar una *superficie de área mínima* o la sometida a una cierta *tensión superficial* o la de la *capilaridad* para la superficie de un fluido en contacto con el aire y las paredes de la vasija que lo contiene. Éste es el caso también de las ecuaciones de Boltzman (1844-1906) y de un incontable número de ecuaciones que brillan con luz propia en *las matemáticas del mundo*.

Tampoco era muy extraño para ellos el hecho de que si las variaciones de las magnitudes modeladas eran pequeñas se podía reemplazar los términos no lineales por otros lineales, obteniéndose respuestas satisfactorias. El *proceso de linealización* es bien antiguo en la historia de las matemáticas.

Hoy día es bien conocido que la estructura lineal de las ecuaciones puede conducir a su resolución mediante fórmulas explícitas de las soluciones. Sin embargo conviene dar el peso que se merece a esta afirmación. En primer lugar, tal afirmación se suele limitar al caso de coeficientes constantes y así existen numerosos casos de ecuaciones lineales aparentemente “sencillas”, con coeficientes dados por funciones muy regulares y que no admiten, no ya soluciones explícitas, sino solución alguna.

Otra limitación para encontrar esas fórmulas deseadas aparece en el caso de las ecuaciones en derivadas parciales lineales. Los casos de soluciones explícitas se suelen limitar a cuando están planteadas sobre dominios espaciales muy particulares con propiedades geométricas muy favorables tales como, por ejemplo, simetría esférica o cilíndrica. La estructura particular de las soluciones explícitas suele conducir a ecuaciones diferenciales ordinarias que llevan los nombres de los importantes matemáticos que las estudiaron. Y así las ecuaciones de Euler,

Bernoulli, Lagrange, Legendre, Bessel, Hermite, Darboux, entre otros, configuran un importante muestrario de los resultados de una época.

El comienzo de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias estuvo unido a la búsqueda de la “solución general por cuadraturas”, de lo que se ocuparon Euler, Ricatti, Lagrange, d’Alembert y muchos otros. El desarrollo de la teoría de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes tuvo una gran influencia en el del álgebra lineal. Un resultado que contenía un importante mensaje premonitorio sobre las limitaciones de ese modo de enfrentarse a las ecuaciones vino de Liouville, quien, en 1841, mostró que mediante un sencillo cambio de variable las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (las más relevantes en las aplicaciones) se transformaban en otras no lineales, denominadas de Ricatti, que, en general, no podían ser resueltas por “cuadraturas”.

El caso de ecuaciones en derivadas parciales se presentaba aún más enrevesado. Limitándonos al caso de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, las pocas soluciones exactas encontradas sólo respondían a situaciones muy específicas: condiciones de contorno con datos constantes, datos iniciales con simetría esférica o cilíndrica, etc.

El sentimiento de incapacidad con el que se enfrentaban los científicos a la resolución de los modelos queda muy bien descrito en un pasaje de una obra que Maxwell catalogó de gran “poema matemático”. Me refiero a la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier ²³. En 1822 Fourier escribía:

Las ecuaciones generales de la propagación del calor están escritas en diferenciales parciales y aunque su forma sea muy simple los métodos conocidos no suministran ningún medio general para integrarlas; no se podrá deducir, pues, los valores de las temperaturas después de un tiempo determinado. Esta interpretación numérica de los resultados de cálculo es sin embargo necesaria; es un grado de perfección que sería muy importante alcanzar en todas las aplicaciones del análisis a las ciencias naturales. Se puede decir que, en tanto no se haya obtenido las soluciones, éstas permanecen incompletas o inútiles y que la verdad que se intenta descubrir no está menos oculta en las fórmulas del análisis de lo que lo está la propia cuestión física.

Una de las grandes aportaciones de Fourier fue renunciar a la búsqueda de soluciones explícitas y dirigir sus pasos hacia caminos entonces poco menos que

²³Tomado de Liouville [35].

inexplorados. La expresión de la solución como una serie infinita de términos, dados por soluciones exactas correspondientes a otros datos que aproximaban a los considerados, abrió una multitud de cuestiones que configuran, hoy día, una buena parte de la matemática de más alta calidad y que son el fundamento de la aproximación numérica imprescindible para que los potentes ordenadores arrojen respuestas cuantitativas. Entre otros aspectos, Fourier otorgó gran protagonismo al estudio de las autofunciones (*los armónicos*) del problema: era el punto de partida del *análisis espectral* y de sus innumerables aplicaciones en la ciencia y en la tecnología ²⁴.

El mundo de las ecuaciones no lineales era apenas abordado por aterrador. En el campo de la ecuaciones en derivadas parciales sólo un genio de la talla de Euler se había atrevido a enfrentarse a ese tipo de dificultades. Sus estudios, sobre la ecuación de los fluidos no viscosos que lleva su nombre, son de un valor inigualable y más propio de un científico de nuestros días transportado, mediante alguna “máquina del tiempo” más de doscientos años atrás.

La entrada en escena, a mediados de este siglo, de los potentes ordenadores abre unas posibilidades impensables para aquellos matemáticos gloriosos. Las informaciones cuantitativas, tan soñadas por Fourier, ya están al alcance de nuestra mano. Hasta incluso para modelos no lineales sofisticados, para dominios espaciales prácticamente arbitrarios y para datos bien lejos de necesitar las hipótesis requeridas hasta hace poco tiempo. Pero todo esto no se obtiene gratis. Hacen falta algoritmos que guíen al ordenador, y esos algoritmos son sólo ilusiones, “castillos en el aire”, si no se tiene la certeza de que nuestro modelo admite solución.

El capítulo de la existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales no posee una sana reputación entre los ingenieros o los científicos que cultivan otras disciplinas. En honor a la verdad, es algo bien ganado a pulso, pues numerosos especialistas de épocas pasadas, e incluso recientes, han visto en este tipo de resultados un mundo sin fin en el que ninguna otra respuesta matemática podía hacerle sombra. Esto obviamente no es así si lo que uno tiene en mente es *una matemática del mundo* en conexión con el exterior al *mundo de las matemáticas*. En todo caso, es justo “dar al César lo que es del César”. Si bien los teoremas de existencia de soluciones no son más que la primera de las muchas etapas que debe acarrear el tratamiento matemático de un modelo, es también obvio que un teorema demostrando la no existencia de soluciones para una ecuación representa su “lápida mortuoria”, al menos para el rango de valores de los

²⁴Véase, por ejemplo, Guzmán [27].

parámetros y exponentes de los términos no lineales para el que no hay existencia de soluciones. Lo que quizás ignoren muchos de los ingenieros y científicos a los que me he referido anteriormente, aunque me consta que no todos, es que existen muchas ecuaciones, con apariencia inocente, para las que se conoce que no admiten solución. Una gran parte de esas ecuaciones corresponden a ciertas elecciones particulares de los parámetros, de los exponentes de los términos no lineales, de las condiciones de contorno o de las condiciones iniciales, en las ecuaciones genéricas que aparecen en problemas relevantes en las aplicaciones tales como combustión o fusión nuclear, por sólo citar dos de ellas.

Pero, ¿hay un único sentido para asignar la palabra solución a una ecuación? Es muy indicativo que habiendo comenzado esta vieja polémica a mediados del siglo XVIII tenga aún una vibrante actualidad. En 1747, d'Alembert había deducido la *ecuación de la cuerda vibrante*: la que hoy día es considerada como la ecuación lineal hiperbólica por excelencia. Aunque también obtuvo una fórmula que representaba su solución general, sería Euler quien hallase la que da la solución en términos de la configuración y la velocidad inicial²⁵. La fórmula tenía validez incluso para datos iniciales que no fueran lo necesariamente regulares como para que la solución tuviera la mínima "decencia" de la época: tantas derivadas continuas como exige la ecuación. La noción de la hoy día llamada *solución clásica* era la única utilizada en aquellas fechas. Euler mantuvo una postura tolerante estimando que la noción de solución debía abarcar también a toda curva dada por esa fórmula con sólo "que pudiese ser trazada". D'Alembert requería que la solución viniese descrita mediante una fórmula analítica. Daniel Bernoulli intervino con un tercer punto de vista con el que discrepaban Euler y d'Alembert: la solución debía ser representable en forma de series trigonométricas. Esta discusión originó el esclarecimiento de la noción de función, de importancia capital en las matemáticas de hoy día, y el estudio de las condiciones que aseguran la representación de una función en términos de una serie trigonométrica. Esto atrajo la atención de Fourier, Dirichlet y otros grandes matemáticos y condujo al nacimiento no sólo del *análisis armónico* sino también de la *teoría de la medida*, la *teoría de funciones* y la *teoría de conjuntos*. Es quizás esto lo que Dieudonné [19] tenía en mente cuando afirmaba:

Se puede decir sin duda que son esas nuevas necesidades de la física las que llevaron a los matemáticos a crear una rama nueva de

²⁵Una vez más los descubrimientos de Euler pasarían a la historia con el nombre de otro matemático y así su fórmula no es otra cosa que la popular fórmula de d'Alembert.

su ciencia, lo que se llama el *análisis funcional*²⁶.

Los trabajos resaltando las limitaciones de la noción de solución clásica han ocupado un lugar central en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales en el presente siglo^{27,28}. Sin pretender entrar en cuestiones de primacía temporal, se puede decir que el primer trabajo en el que una noción debilitada de solución desbloqueaba un problema de gran relevancia fue el de Jean Leray [33] sobre las ecuaciones de Navier-Stokes²⁹. En la escuela soviética, S.L. Sobolev³⁰ sistematizaba la *noción de derivada débil integrable* de una función integrable y los espacios funcionales generados a través de los espacios L^p de Lebesgue y que hoy llevan su nombre³¹. Además Sobolev estableció importantes desigualdades que mostraban resultados de inmersión continua entre distintos espacios. Sus contribuciones son, hoy día, de uso más frecuente, a la hora de resolver ecuaciones en derivadas parciales, que la impresionante sistematización de la *teoría de distribuciones* por medio de *espacios vectoriales topológicos* realizada por Laurent Schwartz [54] en los años cuarenta y cincuenta.

Otro episodio glorioso de la teoría de soluciones débiles corresponde al modelo de *leyes de conservación* que aparece en conexión con la modelización de la dinámica de gases. Se trata de una ecuación hiperbólica no lineal de primer orden en la que las “perturbaciones” se propagan a través de las características. Es fácil construir datos iniciales, todo lo regulares que se quiera, de manera que las características se corten después de un cierto instante. En ese instante se produce un “choque” y toda función candidata a ser denominada solución ha

²⁶Sobre análisis funcional trataron los discursos de Rodríguez-Salinas [49], Valdivia [59] y Jiménez Guerra [30]. Uno de mis textos preferidos sobre esta bella disciplina es el de Brezis [12].

²⁷Una frase atribuida a D. Hilbert ilumina esa filosofía: “Todo problema del Cálculo de Variaciones tiene una solución, supuesto que la palabra *solución* sea entendida adecuadamente” (citada en el libro de Young [60]).

²⁸Philippe Benilan es uno de los matemáticos que más ha contribuido a analizar cómo una adecuada noción debilitada de solución permite la resolución de problemas no lineales que de otra manera no serían resolubles. Entre sus obras se pueden encontrar las nociones de soluciones débiles, integrales, “buenas” y “mild” para el problema abstracto de Cauchy asociado a operadores no lineales sobre espacios de Banach (véase, por ejemplo, Benilan [8]). Él me educó en ese dominio, por lo que le estaré siempre agradecido.

²⁹Leray utilizó la terminología de *soluciones turbulentas*. En la actualidad se les suele denominar *soluciones débiles*.

³⁰Véase, por ejemplo, Sobolev [56], una de sus obras maestras, y el elegante y esclarecedor tratamiento de los espacios de Sobolev realizado en Brezis [12].

³¹Existe una polémica sobre el importante papel, frecuentemente ignorado, desempeñado por Morrey en esos años cruciales del nacimiento de la teoría de soluciones débiles de ecuaciones en derivadas parciales (véase, por ejemplo, [39]). Un estudio cuidadoso de los antecedentes históricos debería remontarse hasta los trabajos de Euler y Lagrange cuando cimentaban el Cálculo de Variaciones (véase, por ejemplo, Lutzen [37]).

de ser necesariamente discontinua ³². Es el “más difícil todavía”: una ecuación formulada en términos de las derivadas de una función desconocida no puede admitir más que soluciones discontinuas y por tanto no derivables (en el sentido habitual que nos enseñaron en nuestra juventud). Además, esa ecuación presenta otras “pesadillas” a las que me referiré más tarde.

No me es posible ni siquiera pergeñar un esbozo de los muchos métodos desarrollados para abordar la existencia de soluciones. Una idea de la enorme variedad de técnicas y resultados lo da el que un objetivo como ese haya ocupado varios volúmenes de obras enciclopédicas como las de Courant y Hilbert [14], Dautray y Lions [17] y Zeidler [61]. Pese a esa multitud de páginas, el campo dista de estar cerrado. En primer lugar, porque aún se carece de respuesta para viejos y muy relevantes modelos como es el caso de sistemas de más de dos ecuaciones de leyes de conservación, sistema compresible de Navier-Stokes³³, etc. Además, la modelización siempre será una fuente inagotable de ecuaciones para las que haya que desarrollar nuevas herramientas.

Una vez mostrado que existe al menos una función que verifica nuestro modelo, al menos en algún sentido adecuado, cabe preguntarse cuántos de esos objetos existen. En realidad, el estudio de la unicidad o multiplicidad de soluciones es un capítulo independiente del de la existencia, pues las técnicas involucradas son de diferente naturaleza. De hecho, en el ámbito de las ecuaciones no lineales, este último estudio no suele admitir métodos generales, siendo necesario analizar las peculiaridades que se presentan en cada ecuación. Esto le da un cierto aire “artesanal” a este capítulo, lo que unido a la frecuente dificultad de la empresa, le convierte en una parcela en la que se han producido valiosas contribuciones matemáticas.

En los problemas de evolución, la unicidad de soluciones suele obedecer a la propia presencia del término de la derivada temporal. Sin embargo hay muchas y notables excepciones. Una de ellas aparece en el caso de la citada ecuación hiperbólica de leyes de conservación. Es fácil observar que si el dato inicial conduce a características que “se abren”, los huecos que dejan pueden ser cubiertos de diferentes maneras conduciendo a una infinidad de soluciones débiles. Como el fenómeno físico está bien determinado, es claro que debemos seleccionar entre esa infinidad de soluciones una sólo que responda a la realidad. Surge así la noción de *solución de entropía*, aquella en la que los choques se producen hacia el futuro y que puede ser caracterizada matemáticamente

³²Véase, por ejemplo, Lax [32].

³³Resultados importantes en esta dirección han sido anunciados recientemente por Pietro-Louis Lions. Véanse las referencias detalladas en la monografía [36].

de diversas maneras equivalentes. El trabajo de demostrar que esa noción de solución es la adecuada, cuando los datos iniciales y los términos no lineales de la ecuación son genéricos, ha sido una ardua tarea emprendida por prestigiosos matemáticos y que fue culminada, en 1970, por el recientemente fallecido S.N. Kruzhkov [31] con quien años más tarde tuve el privilegio de colaborar. El proceso de seleccionar una adecuada solución débil para el caso de la importante clase de ecuaciones de Hamilton-Jacobi, en cierta forma duales de las leyes de conservación, se debe a Michael G. Crandall y Pierre-Louis Lions [15]. Las soluciones unívocamente determinadas fueron denominadas por ellos *soluciones de viscosidad* por provenir del conocido método de viscosidad evanescente. Su programa es aún más difícil, pues las ecuaciones no están en forma de divergencia y no se puede acudir a la *fórmula de integración por partes* para definir la noción debilitada de solución.

En el caso de ecuaciones de tipo parabólico son pocos los ejemplos de multiplicidad de soluciones. La presencia de términos no lineales sin un mínimo de regularidad en ciertos modelos de combustión y de climatología puede ser responsable de esa carencia de unicidad. La respuesta a la cuestión de la unicidad de soluciones para el caso fundamental del sistema tridimensional de Navier-Stokes para un fluido incompresible no es conocida más que bajo hipótesis muy particulares. Una respuesta general es desconocida aún en nuestros días después de haber sido un problema central durante el presente siglo.

La multiplicidad de soluciones para ecuaciones de tipo elíptico es un fenómeno mucho menos extraño. Ya los problemas lineales de autovalores conducen a una infinidad de soluciones. En problemas no lineales la multiplicidad suele aparecer para ciertos valores de los parámetros aunque la misma ecuación para otros parámetros admita una única solución. Es la *teoría de la bifurcación* que engloba muy bellos resultados matemáticos con numerosas aplicaciones. Por citar tan sólo una de ellas me referiré a la formación de celdas convectivas hexagonales observada por Bénard [7] en 1901 debido a la variación de la tensión superficial con la temperatura ³⁴.

El estudio de la existencia y unicidad (o multiplicidad) de las soluciones de un modelo dista mucho de agotar su tratamiento matemático. Así, por ejemplo, si el modelo es evolutivo es de gran importancia analizar el paso a régimen permanente o estacionario. Esta es una investigación capital en la moderna teoría de los *sistemas dinámicos*, desarrollada a partir de los trabajos

³⁴Otros muchos ejemplos y multitud de referencias se pueden encontrar, por ejemplo, en Zeidler [61].

de Poincaré y que ha cobrado una gran actualidad con el estudio de la formación de *caos*.

Muchas otras propiedades cualitativas son también objeto del análisis matemático del modelo. Entre ellas se pueden citar el estudio de la regularidad de soluciones débiles, de las singularidades, de la propagación de perturbaciones y fronteras libres, propiedades de simetría y otras propiedades geométricas, etc.

Referencias

- [1] Al-Farabi, 1953, *Catálogo de las ciencias*, Edición y traducción castellana de la obra original de (cotejada con la traducción al latín de Gerardo de Cremona en Toledo) por Angel Gonzalez Palencia. C. S. I. C., Madrid.
- [2] Alario, M. A., 1993, *De superconductores y otros materiales*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [3] Aristóteles, 1974, *Poética*, Edición trilingüe de Valentín García Yebra, Gredos, Madrid.
- [4] Aris, R., 1978, *Mathematical modelling techniques*, Pitman, Londres.
- [5] Auslander, L. y Tolimieri, R., 1979, Is computing with the finite Fourier transform pure or applied mathematics?, *Bull. AMS*, **1**, p. 847.
- [6] Barenblatt, G., 1996, *Scaling, Self Similarity and Intermediate Asymptotics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] Bénard, M., 1901, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur convection en régime permanent. *Ann. Chem. Ser.*, **7**, pp. 62-144.
- [8] Benilan, Ph., 1972, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Tesis Doctoral. Université d'Orsay, París.
- [9] Bensoussan, A. y Lions, J.L., 1978, *Temps d'arrêt et contrôle impulsif*, Dunod, París.
- [10] Bensoussan, A., Lions, J.L. y Papanicolau, G., 1978, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam.
- [11] Brezis, H., 1973, *Opérateurs Maximaux Monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam.
- [12] Brezis, H., 1983, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson. París. (Versión castellana: *Análisis Funcional*, Alianza Universidad, Madrid, 1984).
- [13] Costa Novella, E., 1974, *Adsorción*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [14] Courant, R. y Hilbert, D., 1953, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 y 2. Interscience, Nueva York.
- [15] Crandall, M.G. y Lions, P.L., 1983, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277**, pp. 1-42.
- [16] Crank, J., 1984, *Free and moving boundary problems*, Clarendon Press, Oxford.

- [17] Dautray, D. y Lions, J.L., 1990, *Mathematical Analysis and Numerical Methods in Technology*, Vol. 4, Springer-Verlag, Nueva York.
- [18] Denn, M. M., 1986, *Process Modeling*, Longman, Harlow, Inglaterra.
- [19] Dieudonné, J., 1987, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, París. (Versión castellana: *En honor del espíritu humano*, Alianza, Madrid, 1989).
- [20] Dou MasdeXexàs, A., 1963, *Relaciones entre las ecuaciones en derivadas parciales y la física*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [21] Duvaut, G. y Lions, J.L., 1972, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, París.
- [22] Euler, L., *Opera Omnia*, 72 Vols., Berna, 1911-1975.
- [23] Euler, L., 1993, *Método de máximos y mínimos*, Publ. de la Univ. Autónoma de Barcelona. Selección del *Methodus* (1744), con introducción, notas y apéndices a cargo de A. Dou.
- [24] Fleming, W.H. y Rishel, R.W., 1975, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, Berlín.
- [25] Galindo, A., 1980, *No-linealidad en las ciencias de la naturaleza*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [26] García Velarde, M., 1995, Por los fluidos y sus corrientes, número a número, *Revista Española de Física*, vol. 9, pp. 12-19.
- [27] Guzmán, M. de, 1983, *Impactos del Análisis Armónico*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [28] Halmos, P. R., 1981, Applied Mathematics is Bad Mathematics, en *Mathematics Tomorrow*, ed. L. A. Steen, Springer, Nueva York, pp. 8-14.
- [29] Henderson-Sellers, A. y McGuffie, K., 1987, *A Climate Modelling Primer*, John Wiley&Sons, Chichester, Gran Bretaña. (Versión castellana: *Introducción a los modelos climáticos*, Omega, Barcelona, 1996).
- [30] Jiménez Guerra, P., 1991, *Origen y evolución de la integración vectorial*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [31] Kruzhkov, S.N., 1970, Quasilinear equations of first order with several independent variables, *Mat. Sbornik*, 81, pp. 228-255.
- [32] Lax, P., 1973, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. SIAM. Philadelphia.
- [33] Leray, J., 1932, Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 12, pp. 1-82.
- [34] Liñán, A., 1991, *El papel de la mecánica de fluidos en los procesos de combustión*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [35] Lions, J. -L., 1994, *Ricerca pura e ricerca applicata. La modellistica matematica*. En prensa.

- [36] Lions, P. L., 1996, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume1. Incompressible Models*. Clarendon Press, Oxford.
- [37] Lutzen, J., 1982, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer-Verlag, Berlín.
- [38] Millán Barbany, G., 1975, *Problemas matemáticos de la mecánica de fluidos. Estructura de las ondas de choque y combustión*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [39] Morrey, S.B. Jr., 1966, *Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin.
- [40] Navarro Borrás, J.M., 1942, *Estudio de algunos tipos de ecuaciones integrales singulares*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [41] Neumann, J. von, 1956, The Mathematician, en *The World of Mathematics*, ed. J. R. Newman, Simon and Schuster, Nueva York, IV, 2053-2063. (Versión castellana: El Matemático, en *Sigma: El mundo de las matemáticas*, ed. J. R. Newman, IV, Grijalbo, Barcelona).
- [42] Oleinik, O.A., Shamaev, A.S. y Yosifian, G.A., 1994, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, Springer-Verlag, Berlín.
- [43] Ortega, J. y Rheinboldt, W., 1970, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, Nueva York.
- [44] Palacios, J., 1956, *Análisis Dimensional*, Espasa-Calpe, Madrid. (Trad. francesa *Analyse Dimensionnelle*, Gauthier-Vilars, Paris, 1960; Trad. inglesa *Dimensional Analysis*, McMillan, Nueva York, 1964)
- [45] Perrier, P., 1994, Quelques problèmes posés à l'homme mathématicien et modélisateur des grands systèmes. En *Les grandes systèmes des sciences et de la technologie*, Ed. J. Horowitz y J.L. Lions, Masson, París, pp. 649-664.
- [46] Pollard, H., 1972, *Applied Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley, Reading, Mas.
- [47] Puig Adam, P., 1952, *Matemática y Cibernética*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [48] Ríos, S., 1995, *Modelización*, Alianza, Madrid.
- [49] Rodríguez-Salinas, B., 1976, *Medidas en espacios topológicos*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [50] Saari, D. G., Review to the book "Introduction to Applicable Mathematics, Part I, by F.A. Hinchey", *Mathematical Intelligencer*, pp. 88-90.
- [51] Sánchez Ron, J.M., 1997, *Falsos mitos: Ciencia vs. tecnología. Reflexiones sobre política científica*. Fundación Repsol, Madrid. En prensa.
- [52] Sánchez-Palencia, E., 1980, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, Berlín.
- [53] Schlichting, H., 1951, *Boundary-layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (Versión castellana: *Teoría de la capa límite*, Ediciones Urmo, Bilbao, 1972).
- [54] Schwartz, L., 1950, *Théorie des distributions*, Hermann, París.

- [55] Serrin, J., 1984, Applied Mathematics and Scientific Thought, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlín, pp. 19-27.
- [56] Sobolev, S.L., 1991, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Tercera Edición. Revisada y aumentada por O. A. Oleinik, A. M. S., Providence, Rhode Island.
- [57] Terradas, E., 1933, *Programa de un curso sobre ecuaciones diferenciales*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [58] Torres Quevedo, L., 1901, *Máquinas Algébricas*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [59] Valdivia, M., 1977, *Recientes aspectos del Análisis Funcional*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [60] Young, L., 1969, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Saunders, Philadelphia.
- [61] Zeidler, E., 1988, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*. Volúmenes I-V. Springer-Verlag, Berlín.

INFORME DEL PRESIDENTE

Queridos amigos,

Nos acercamos al verano y me veo en el agradable deber de rendiros cuentas de los desvelos del Comité y de su presidente por la marcha de la sociedad y, lo que es más importante, de cómo anda ésta. Recordando los hechos más sobresalientes del año pasado, se acaban de recibir los dos volúmenes de *Actas del Congreso de Vigo*, más de 1100 páginas de matemática enxebre que harán la delicia de vuestro veraneo. Gracias de nuevo al Grupo de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico



del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Vigo. Como sabéis, la próxima **Asamblea anual** tendrá lugar en el marco de la VIII Escuela de Otoño Hispano Francesa sobre Simulación Numérica en Física e Ingeniería, que se celebrará en Córdoba del 21 al 25 Septiembre de 1998

<http://www.uco.es/ehf98/>

La sociedad también presta su apoyo (moral sobre todo, pero también en forma de becas) a los cursos de Verano de Laredo, dirigidos por nuestro compañero Eduardo Casas, cuyos contenidos figuran anunciados en nuestra hoja WEB.

Un aspecto de la actividad de la sociedad que como sabéis siempre nos ha preocupado es el de la relación con otras sociedades nacionales o extranjeras. En lo que va de año todo han sido buenas noticias en este frente. No sólo hemos firmado el acuerdo de reciprocidad con la AMS y la RSME, que ya están vigentes y permiten ser socio múltiple en condiciones económicas muy ventajosas, sino que hemos sido admitidos en la **European Mathematical Society**. Nuestra petición de ingreso fue presentada por el Presidente, Prof.

TRES PREMIOS

PREMIO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS PARA ALFREDO BERMÚDEZ DE CASTRO

El pasado 22 de octubre de 1998, le fue entregado el Premio de Matemáticas de la Real Academia de Ciencia Exactas, Físicas y Naturales a nuestro compañero Alfredo Bermúdez de Castro. El premio fue concedido en la sesión del 8 de octubre tras un largo proceso de selección que involucró a más de quince candidatos y le fue entregado en la sesión de apertura de la Real Academia del presente curso académico. En la exposición de razones por las que se le otorgó esta distinción se hizo alusión a *su excepcional trayectoria profesional, tanto investigadora como docente, en la que ha abordado una gran variedad de problemas de interés industrial y medioambiental con un enfoque interdisciplinar y ha aglutinado a una activa escuela de brillantes especialistas*. Alfredo Bermúdez de Castro formó parte del Comité Gestor de SEMA y fue elegido como miembro del Primer Comité Ejecutivo de esta Sociedad. Es de resaltar que este Premio fue también otorgado, el año 1995, a nuestro compañero Jesús Sanz Serna.

ILDEFONSO DÍAZ

PREMIO DE INVESTIGACIÓN DE LA XUNTA DE GALICIA PARA JUAN M. VIAÑO

El pasado 26 de febrero el Profesor Juan M. Viaño Rey recibió, en una ceremonia presidida por el Presidente de la Xunta de Galicia, el Premio de Investigación 1996 en el apartado de mejor trabajo publicado en revista científica o capítulo de libro en el Área de Ciencias Experimentales. Este premio de Investigación es un justo reconocimiento a su artículo *Mathematical Modelling of Rods*, realizado en colaboración con el Profesor L. Trabucho, y que se recoge en el *Handbook of Numerical Analysis* publicado por North Holland Elsevier y editado por P. G. Ciarlet y J. L. Lions. En este artículo, se realiza un compendio de los trabajos más importantes de los autores y sus colaboradores en los últimos doce años, en el campo de la modelización de estructuras elásticas tipo viga por

métodos asintóticos, en combinación con técnicas de análisis funcional y análisis numérico. El trabajo constituye una contribución relevante en este campo de la Matemática Aplicada. En sus 487 páginas y 10 capítulos se abordan la obtención y justificación de modelos de flexión, de torsión, de Timoshenko, lineales y no lineales, con efectos termoelásticos, etc. en vigas isotrópicas y anisótropas, de sección constante y variable, de sección llena o de pared delgada, simplemente conexa o no. Se obtienen así generalizaciones de los modelos clásicos más conocidos que incluyen efectos hasta ahora no contemplados y se justifican, desde el punto de vista matemático, mostrando que se obtienen como límite del modelo tridimensional de elasticidad cuando el área de la sección transversal tiende a cero.

PEREGRINA QUINTELA

**JESÚS MARÍA SANZ SERNA,
PREMIO CASTILLA Y LEÓN
DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TÉCNICA 1997**

El pasado 6 de marzo, en la sede de la Consejería de Educación y Cultura de la Comunidad de Castilla y León, el Jurado del Premio Castilla y León de Investigación Científica y Técnica 1997 acordó, por unanimidad, otorgar el citado Premio a nuestro colega el profesor D. Jesús María Sanz Serna. En palabras del Jurado, leídas en la entrega del Premio en un acto institucional celebrado el día 23 de abril, día de la Comunidad de Castilla y León, en el Monasterio de Nuestra Señora del Prado de Valladolid,

El profesor D. Jesús María Sanz Serna ha llevado a cabo su investigación en el Área de Matemática Aplicada y más concretamente en Análisis Numérico. La excelencia de los trabajos del galardonado, de primera línea a nivel internacional, y su contribución al progreso de la Ciencia, así como a la proyección de la actividad científica de la Comunidad de Castilla y León, le hacen merecedor de este Premio.

La Sociedad Española de Matemática Aplicada felicita al profesor Sanz Serna y se congratula con la distinción científica que la concesión de este Premio supone para uno de sus miembros más acreditados.

LUIS M. ABIA LLERA

RECEPCIÓN EN LA ACADEMIA DE JESÚS ILDEFONSO DÍAZ

El pasado 19 de noviembre, tuvo lugar la recepción como nuevo miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales del Prof. **Jesús Ildefonso Díaz Díaz**, que fue segundo Presidente de nuestra Sociedad, en justo reconocimiento a su labor docente, investigadora y organizativa de la matemática aplicada en España.

El Profesor Díaz Díaz nació en Toledo el 11 de Diciembre de 1950. Cursó los estudios de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad Complutense, doctorándose por la misma en 1976. Discípulo y continuador de la labor del Profesor Alberto Dou, es catedrático de esa universidad desde 1986, habiendo sido propulsor de la creación del Departamento de Matemática Aplicada y director del mismo durante bastantes años. Se ha distinguido en la profesión por su intensa actividad investigadora, contribuyendo de forma notable al desarrollo de la investigación en las ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones. En el ámbito de la matemática aplicada es una de las personas más representativas de la enorme actividad desarrollada en nuestro país los últimos veinte años, en particular en las universidades madrileñas. Su participación ha tenido lugar en la gran mayoría de eventos, habiendo tomado parte en numerosos comités científicos y organizadores de congresos, seminarios, escuelas, etc. En particular, fue coorganizador del primero de los congresos *C.E.D.Y.A.* celebrado en El Escorial en 1979 y participó activamente en la creación de la Sociedad Española de Matemática Aplicada. Actualmente, colabora activamente en la refundación de la Real Sociedad Matemática Española, que felizmente está teniendo lugar.

Entre sus muchas actividades científicas, el profesor Díaz ha sido pionero en el estudio de los problemas de frontera libre en España. En 1993 organizó en su ciudad natal, a la que gusta llamar la ciudad de las tres culturas, y junto con otros profesores de las universidades madrileñas, el *Congreso Internacional de Fronteras Libres y sus Aplicaciones*, que reúne cada tres años a los mejores especialistas del mundo. Es actualmente representante español en el "Steering Committee" del *Proyecto Europeo de Fronteras Libres*. En la actualidad, uno de sus temas preferidos de investigación es la Climatología; estos días pasados (diciembre de 1997) se celebró en Madrid un congreso internacional sobre las Matemáticas del Medio Ambiente auspiciado por la Sociedad Matemática Europea. El nuevo académico es Doctor Honoris Causa por la Universidad de Pau, Francia, galardón que fue reseñado en el Boletín número 8 de nuestra Sociedad.

A pesar del espectacular crecimiento de estos últimos años, el futuro de la investigación matemática en nuestro país es aún inseguro y la responsabilidad de sus figuras destacadas es muy grande. Dada la dilatada trayectoria profesional y la intensa actividad presente del nuevo académico, formulamos desde estas líneas el deseo y la esperanza de un fructífero desarrollo de los lazos de amistad y colaboración entre la Academia y nuestra Sociedad y todas las sociedades afines. Junto con nuestra más sincera enhorabuena, queremos desear a nuestro compañero Ildefonso muchos éxitos en el seno de su nueva institución.

JUAN LUIS VÁZQUEZ, PRESIDENTE DE SEMA

ALBERTO P. CALDERÓN (1920-1998)

La mañana del pasado 16 de abril murió en Chicago, U.S.A., el Profesor Alberto Calderón. El Análisis Matemático pierde con él uno de los más grandes creadores del Siglo XX.

Alberto Calderón nació el 14 de septiembre de 1920 en la ciudad de Mendoza (República Argentina). Desde la infancia había mostrado su natural talento para las Matemáticas pero sus estudios iniciales fueron de Ingeniería Civil, en los que se graduó en la Universidad de Buenos Aires en 1947. De hecho, su primer empleo fue en una empresa pública argentina dedicada al estudio de yacimientos petrolíferos.

La decisión de Calderón de dirigir sus pasos hacia las Matemáticas se produce al final de los cuarenta tras su contacto con el Profesor Antoni Zygmund, eminente matemático polaco a la sazón profesor en la Universidad de Chicago, que visitó la Universidad de Buenos Aires por aquellas fechas.

Con la dirección de Zygmund, Calderón obtenía su grado de Doctor por la Universidad de Chicago en 1950.

La obra de Calderón, de una gran profundidad, es de una elegancia y originalidad extraordinarias. Sus aportaciones han sido el inicio de nuevas teorías, revolucionarias por la sencillez de sus ideas básicas, que han abierto fructíferos caminos a la investigación en el Análisis de Fourier y las Ecuaciones en Derivadas Parciales de la última mitad del Siglo. Basta señalar las siguientes contribuciones de Calderón para saber que fue uno de los grandes.

- La Teoría de Operadores Integrales Singulares, también llamados de Calderón-Zygmund.

- El Teorema de Unicidad para el problema de Cauchy en Ecuaciones en Derivadas Parciales Hiperbólicas.
- La Teoría de Interpolación Compleja.
- La acotación del operador integral de Cauchy.
- Teoría de Transferencia.

Calderón era miembro de las más importantes Academias y obtuvo diversas distinciones a lo largo de su carrera.

La relación de Calderón con la Matemática Española se ha producido de forma múltiple. El Profesor Miguel de Guzmán, de la Universidad Complutense de Madrid fue alumno suyo y a través de él se canalizó inicialmente la influencia de Calderón en el florecimiento del Análisis de Fourier en España. Participó en casi todas las reuniones internacionales de Análisis de Fourier que el Departamento de Matemáticas de la U.A.M. organiza cada cuatro años en El Escorial desde 1979.

El pasado 6 de Junio de 1997 fue investido *Doctor Honoris Causa* por la Universidad Autónoma de Madrid en reconocimiento a sus altísimos méritos científicos. Este ha sido el último de muchos viajes que Alberto Calderón realizó a España.

Sin duda, su talante personal de gran caballero será recordado por los que le conocieron y disfrutaron de su trato. También sin duda, su magnífica obra será aprendida y admirada por las generaciones venideras.

ENRIQUE FERNÁNDEZ-CARA, SECRETARIO DE SEMA

HOMENAJE AL PROFESOR J.-L. LIONS

Los días 26 y 27 de mayo, en la sede central del C.N.R.S. en París, organizado por antiguos alumnos y próximos colaboradores, tuvo lugar una conferencia internacional en honor del Profesor Jacques-Louis Lions, con ocasión de su 70 cumpleaños. Se pronunciaron 11 conferencias, a cargo de especialistas de altísimo nivel, entre otros los Profesores J. Ball, P.L. Lions, A. Majda, Y. Meyer, V. Sverak y A. Quarteroni.

Participaron cerca de 300 congresistas de todo el mundo, representando las distintas parcelas de la matemática aplicada que, de una u otra forma, se ha visto influenciada por la actividad del Profesor Lions. Entre ellos, varios españoles, la

mayoría estrechamente vinculados a nuestra sociedad: A. Bermúdez, T. Chacón, J.I. Díaz y el presidente y secretario actuales, entre otros.

Desde aquí, nuestra más calurosa felicitación al Profesor Lions, sin duda una de las personas más influyentes en el desarrollo científico en nuestro ámbito. Queremos dejar constancia también de nuestro agradecimiento a este Profesor por la enorme labor académica y científica realizada a lo largo de estos años.

ENRIQUE FERNÁNDEZ-CARA, SECRETARIO DE SEMA

PRIMER PREMIO SEMA AL JOVEN INVESTIGADOR

En cumplimiento de las bases de la convocatoria del Primer Premio SEMA al Joven Investigador, cf. <http://www.uam.es/sema/>, el Comité Científico, nombrado por el Comité Ejecutivo de la Sociedad y formado en esta primera edición por

Eduardo Casas, profesor de la Universidad de Santander

Jean Pierre Puel, profesor de l'Ecole Polytechnique de Paris (ex presidente de la SMAI)

Jesús Sanz Serna, profesor de la Universidad de Valladolid

Carles Simó, profesor de la Universidad de Barcelona, y

Juan Luis Vázquez, presidente de SEMA,

ha procedido al estudio de los méritos aducidos en las ocho candidaturas recibidas antes del 1 de mayo de 1998, siguiendo las pautas marcadas en la convocatoria, especialmente como dice la base 3: *“la excelencia en el trabajo matemático original en todas las ramas de la matemática que tienen una componente aplicada. Su objetivo es premiar la contribución personal del candidato. El límite de edad fijado (33 años) pretende señalar candidatos que hayan tenido tiempo de desarrollar su creatividad matemática independiente tras la etapa formativa de la tesis doctoral.”*

Tras largas deliberaciones previas el comité se reunió formalmente en Madrid el sábado 13 de junio y concedió el premio a **Ana Carpio Rodríguez**, doctora por las universidades Complutense de Madrid y Pierre et Marie Curie

de París y profesora titular de la Universidad Complutense. La variedad de sus intereses de investigación, la gran calidad y número de sus publicaciones, la originalidad e independencia de sus escritos y la relevancia de los temas abordados nos llevan a extenderle las más calurosas felicitaciones y a augurarle un brillante futuro, cumpliendo el mandato de que *"el premio tendría así por objetivo abrirles el camino de su período de madurez, dándoles un reconocimiento de sus capacidades demostradas."*

En nombre del comité deliberante he de hacer pública la satisfacción del mismo por haber contado con un grupo de un nivel de progreso matemático tan excelente que no puede sino augurar un brillante futuro a la matemática aplicada en nuestro país. La respuesta a nuestra convocatoria no ha podido ser pues muy positiva, signo de una sociedad optimista y pujante. Felicitaciones a todos y un cierto pesar, pues sólo uno es premiado y desearíamos hacer más extensivo "el reconocimiento de sus capacidades demostradas" que figura en las bases del premio.

De todo ello doy fe como presidente del Comité en Madrid a 18 de junio de 1998.

JUAN LUIS VÁZQUEZ SUÁREZ

Breve perfil humano de la galardonada

Ana Carpio Rodríguez, nacida en 1965 en Baracaldo (Vizcaya), licenciada en matemáticas (especialidad análisis numérico) por la Universidad del País Vasco (Leioa), becada del gobierno vasco para estudiar en París, doctora por la Universidad Complutense de Madrid (marzo 1993) y la Universidad Pierre et Marie Curie de París (octubre 1993). Profesora titular del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid desde julio de 1994. Ha realizado estudios predoctorales en París (Université Paris VI) y postdoctorales en Oxford (OCIAM).



Ha publicado trabajos sobre ecuaciones elípticas no lineales, ecuaciones de ondas, ecuaciones de difusión-convección, ecuaciones de Navier-Stokes, ecuaciones cinéticas y recientemente sobre la modelización y estudio de la dinámica e interacción de dislocaciones en cristales. En todos estos campos tiene publicaciones en revistas de gran prestigio, en su mayoría firmados por ella sola y en casi todos sus contribuciones son sin duda de primera fila. Es actualmente organizadora del seminario semanal de su departamento.

NUEVOS SOCIOS

Socios ordinarios

BALLESTER NICOLAU, Coloma – Dpto. de Matemáticas e Informática – – Univ. de Les Illes Balears – 07071 Plana de Mallorca (Balears). dmicbn0@ps.uib.es

CASTELLO BENAVENT, Joaquín – Dpto. de Matemáticas – E. Superior de Tecnología y CC. Experimentales – Univ. Jaume I – Castellón.
castello@nuvol.uji.es

DIEZ FERNANDEZ, Honorato – Dpto. de Matemáticas y Computación – Escuela Universitaria Politécnica de Burgos – Univ. de Burgos – 09006 Burgos. hdiez@ubu.es

FERNANDEZ PEREZ, José Luis – Dpto. de Matemáticas – Fac. de Ciencias – Univ. Autónoma de Madrid – 28049 Madrid. joseluis.fernandez@uam.es

PALANQUES MESTRE, Augusto – Dpto. de Matemática Aplicada – Fac. de Matemáticas – Univ. de Barcelona – 08007 Barcelona. palanque@cerber.mat.ub.es

SEGURA DE LEON, Sergio – Dpto. de Análisis Matemático – Fac. de Matemáticas – Univ. de Valencia – 46100 Burjassot (Valencia). sergio.segura@uv.es

Socios estudiantes

ALVAREZ TORRES, María Jesús – – – Univ. Illes Balears – .

GOMEZ GANDARILLAS, Delfina – Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación – Fac. de Ciencias – Univ. de Cantabria – 39005 Santander.
gomez@besaya.unican.es

GONZALEZ VIDA, José Manuel – Dpto. de Análisis Matemático – Fac. de Ciencias, Sección Matemáticas – Univ. de Málaga – 29071 Málaga.
vida@anamat.cie.uma.es

MUÑOZ RUIZ, María de la Luz – Dpto. de Análisis Matemático – Fac. de Ciencias – Univ. de Málaga – 29071 Málaga. munoz@anamat.cie.uma.es

PERIAGO ESPARZA, Francisco – Dpto. de Matemática Aplicada – Fac. de Matemáticas – Univ. de Valencia – 46100 Burjassot (Valencia). periago@uv.es

PROBLEMAS DE COMPLETACIÓN DE MATRICES PARCIALES
TRIANGULARES SUPERIORES

Doctorando: Cristina Jordán Lluch.

Director/es: Juan R. Torregrosa y Ana Urbano.

Defensa: 8 de septiembre de 1997, Universidad Politécnica de Valencia.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta memoria se analizan dos problemas de completación de matrices de tamaño $n \times n$, parciales triangulares superiores. El primero de ellos hace referencia a la existencia de completaciones con forma de Jordan prescrita mientras que el segundo está relacionado con diferentes conceptos de la Teoría de Control: índices de controlabilidad, r -números, controlabilidad completa, etc.

En primer lugar se resuelve el siguiente problema abierto planteado por los profesores Rodman y Shalom:

Sea A una matriz parcial triangular superior, irreducible inferior de tamaño $n \times n$ con $\text{traza}(A)=0$. Sea $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p \geq 1$ un conjunto de p enteros positivos tal que $\sum_{i=1}^p n_i = n$. ¿Existe una completación nilpotente A_c de A cuya forma de Jordan asociada tiene p bloques de tamaño n_i , $i = 1, 2, \dots, p$ si y sólo si

$$r(A^k) \leq \sum_{i:n_i \geq k} (n_i - k), \quad k = 1, 2, \dots, n_1?$$

Por otra parte, los profesores mencionados anteriormente plantean una segunda conjetura en la que, dada una matriz parcial triangular superior, se pretende caracterizar la existencia de una completación nilpotente con forma de Jordan prescrita en relación con condiciones de mayorización. Se resuelve el problema para distintos tipos de matrices y se establecen algoritmos que proporcionan la completación deseada en el caso de matrices parciales Jordan y parciales Hessenberg. Así mismo, para ciertas matrices se demuestra la equivalencia entre ambas conjeturas.

Finalmente, en relación con la Teoría de Control se plantea el siguiente problema:

Sea A una matriz $n \times n$ parcial triangular superior y B una matriz $n \times m$. Consideremos $\{k_i\}_{i=1}^p$ una sucesión de enteros no negativos tal que $\sum_{i=1}^p k_i \leq n$. ¿Existe una completación A_c de A tal que el par (A_c, B) tiene $\{k_i\}_{i=1}^p$ como sucesión de r -números o de índices de controlabilidad?

Se resuelve el problema en el caso completamente controlable, estableciendo un algoritmo para la obtención de la mencionada completación. En el caso general se demuestran resultados parciales exigiendo ciertas condiciones a la matriz A , a la matriz B o a la propia sucesión de enteros no negativos.

SOBRE ALGUNAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
CUASILINEALES QUE APARECEN EN GLACIOLOGÍA

Doctorando: Emanuele Schiavi.

Director/es: J.I. Díaz Díaz y J.M. Fraile Pérez.

Defensa: 5 de diciembre de 1997, Universidad Complutense de Madrid.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Esta tesis trata de algunas ecuaciones diferenciales no lineales que surgen en la modelización de la dinámica de los grandes casquetes polares. Se introducen ciertas modificaciones de algunos modelos ya existentes y se proponen otros nuevos físicamente relevantes para el tratamiento del flujo no newtoniano de los glaciares. Se analiza, numéricamente y en el marco del análisis funcional, la existencia de un mecanismo de autorregulación (*positive feedback*) en la respuesta termomecánica de los casquetes polares. El análisis revela que la consideración del flujo de agua producido en la base, y la consecuente formación de un sistema de drenaje basal, son fundamentales para la activación de un régimen rápido de flujo, tal y como se observa en la naturaleza. En lo que concierne al tratamiento matemático del sistema se demuestra, en primer lugar, la existencia de soluciones débiles para el modelo de Fowler y Johnson dado por un sistema fuertemente acoplado de tres ecuaciones, una parabólica y dos hiperbólicas, para la determinación de los campos de velocidad, espesor y flujo de agua. Se obtienen, en segundo lugar, resultados de existencia y unicidad sobre algunas ecuaciones cuasilineales no autónomas con término de reacción de tipo exponencial que aparecen de forma natural en el estudio de la distribución del campo de temperaturas. Además, se analizan propiedades de localización, tiempo de espera, crecimiento inicial y comportamiento singular de la frontera libre asociada al problema no newtoniano isotérmico del flujo del hielo. Las técnicas matemáticas utilizadas varían según los problemas considerados.

POSTPROCESO DE MÉTODOS ESPECTRALES

Doctorando: Julia Novo Martín.

Director/es: Javier de Frutos y Bosco García-Archilla.

Defensa: 19 de Diciembre de 1997, Universidad de Valladolid.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta memoria se estudia la aproximación numérica de ecuaciones en derivadas parciales de evolución disipativas.

Un tipo de discretizaciones para estas ecuaciones que ha despertado mucho interés en los últimos años son los llamados métodos Galerkin no lineales. A pesar de que estos métodos presentan un orden de convergencia mayor que los clásicos, desde el punto de vista práctico no resultan más eficientes debido a su elevado coste computacional.

En la presente memoria se introduce y analiza un nuevo método que se obtiene como resultado de postprocesar la solución obtenida con un método clásico: Galerkin estándar o pseudoespectral. El método postprocesado, que utiliza alguna de las ideas de los métodos Galerkin no lineales, posee el mismo orden de convergencia que estos métodos y es mucho más barato de implementar. Como resultado, se obtiene un método que mejora tanto la eficiencia de los métodos clásicos como la de los métodos Galerkin no lineales.

El análisis y la experimentación numérica se realizan en primer lugar para el caso de

Fourier, es decir cuando la aproximación numérica se busca en un espacio generado por modos de Fourier. A continuación se extiende al caso en que la aproximación pertenece a un espacio de polinomios y finalmente a un método de descomposición de dominios aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes.

ESTUDIO DE ALGUNOS PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO
QUE SURGEN EN DINÁMICA DE POBLACIONES

Doctorando: Juan Aurelio Montero Sánchez.

Director/es: Antonio Cañada Villar y José Luis Gámez Ruiz.

Defensa: 16 de Enero de 1.998, Universidad de Granada.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Esta tesis está dedicada al estudio de algunos problemas de Control Óptimo que surgen en Dinámica de Poblaciones. En el capítulo primero se considera un problema de Control Óptimo cuya ecuación de estado es una ecuación elíptica logística, definida en algún dominio D del espacio euclídeo n -dimensional, con condición en la frontera de tipo Dirichlet. El control que aparece en esta ecuación tiene como objetivo el influir en la razón de crecimiento de la especie, para mejorar la calidad, teniendo por tanto influencia en el beneficio final del proceso. Este beneficio viene dado por un funcional que se obtiene expresando la diferencia entre los ingresos (derivados de la venta de la especie) y el gasto originado por el control. Tomando como espacio de controles el conjunto de funciones reales medibles, definidas en D , acotadas (c.p.d.) y no negativas, se prueba, en primer lugar la existencia de controles óptimos. Al mismo tiempo se obtiene una caracterización, basada en las propiedades espectrales del operador Laplaciano, en el dominio D y en la tasa de natalidad de la especie, para que el beneficio sea positivo, calculándose una cota inferior del mismo. La expresión del control óptimo en función de las soluciones del sistema de optimalidad correspondiente, junto con un estudio detallado de éste, permite probar la unicidad del óptimo en diferentes casos (por ejemplo, esto es así si el ínfimo de la función que modela la autolimitación de la especie es suficientemente grande). Además, usando el método de soluciones superiores e inferiores, para sistemas de ecuaciones, se consigue dar un método de aproximación al único óptimo del problema considerado. El primer capítulo termina con un estudio del caso en que la ecuación de estado tiene asociadas condiciones de contorno tipo Neumann.

En el capítulo segundo se estudia un problema de control, cuyo estado viene descrito por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico, con condiciones en la frontera de tipo Neumann. Este tipo de sistemas aparecen en problemas de piscifactorías, donde las dos incógnitas del sistema representan, respectivamente, las poblaciones de jóvenes y adultos. Como funcional de beneficio se toma una variante bidimensional del funcional considerado en el capítulo I. Se comienza con un estudio sobre la existencia y unicidad de soluciones de sistemas lineales de tipo cooperativo (este estudio es muy útil para el estudio de las derivadas direccionales de las soluciones del sistema de estado, respecto de los controles). A continuación se estudia la existencia y unicidad de los posibles controles óptimos. La tesis termina con unas notas finales donde se exponen diferentes problemas relacionados con la misma, cuya solución no se conoce en la actualidad. Se utilizan básicamente técnicas y resultados de Análisis Funcional, de la teoría de ecuaciones elípticas y de la teoría de Control Óptimo, así como del Cálculo de Variaciones.

ESTUDIO CUALITATIVO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
CON TÉRMINO NO LINEAL SINGULAR

Doctorando: Pedro José Torres Villarroya.

Director/es: Pedro Martínez Amores.

Defensa: 19 de Marzo de 1998, Universidad de Granada.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: La memoria lleva a cabo un estudio de algunos aspectos cualitativos de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias con una clara interpretación física por medio de herramientas de la Topología adaptadas al Análisis No Lineal. El nexo común entre dichas ecuaciones lo constituye la presencia de algún tipo de "singularidad", entendiéndose como tal la existencia de alguna discontinuidad en el término no lineal, ya sea ésta esencial o de salto. Si la discontinuidad es esencial, nuestro estudio viene motivado por modelos de dinámica de partículas con fuerzas de tipo gravitacional o eléctrico. En el caso atractivo se describe la dinámica completa de una ecuación de Liénard. En el caso repulsivo se obtienen resultados de acotación de soluciones y de estabilidad asintótica global. Finalmente, se estudian sistemas de ecuaciones motivados por el movimiento de dos o tres partículas cargadas colineales.

Por otra parte, si la discontinuidad es de salto entonces se hace necesario reformular el problema como una inclusión diferencial. Estudiamos en concreto una ecuación con fricción seca mediante aproximantes de Yosida junto con grado topológico, obteniendo resultados de existencia y unicidad de solución periódica.

