

Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada SĒMA

Grupo Editor

J.J. Valdés García (U. de Oviedo) E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
B. Dugnot Álvarez (U. de Oviedo) M. Mateos Alberdi (U. de Oviedo)
C.O. Menéndez Pérez (U. de Oviedo) P. Pérez Riera (U. de Oviedo)

Comité Científico

E. Fernández Cara (U. de Sevilla) A. Bermúdez de Castro (U. de Santiago)
E. Casas Rentería (U. de Cantabria) J.L. Cruz Soto (U. de Córdoba)
J.M. Mazón Ruiz (U. de Valencia) I. Peral Alonso (U. Aut. de Madrid)
J.J. Valdés García (U. de Oviedo) J.L. Vázquez Suárez (U. Aut. de Madrid)
L. Vega González (U. del País Vasco) E. Zuazua Iriondo (U. Comp. de Madrid)

Responsables de secciones

Artículos: E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
Resúmenes de libros: F.J. Sayas González (U. de Zaragoza)
Noticias de SĒMA: R. Pardo San Gil (Secretaria de SĒMA)
Congresos y Seminarios: J. Mazón Ruiz (U. de Valencia)
Matemáticas e Industria: M. Lezaun Iturralde (U. del País Vasco)
Educación Matemática: R. Rodríguez del Río (U. Comp. de Madrid)

Página web de SĒMA

<http://www.uca.es/sema/>

Dirección Editorial: Boletín de SĒMA. Dpto. de Matemáticas. Universidad de Oviedo. Avda. de Calvo Sotelo, s/n. 33007-Oviedo. boletin_sema@orion.ciencias.uniovi.es

ISSN 1575-9822

Depósito Legal: AS-1442-2002

Imprime: Grupo Bitácora. C/ Instituto, 17, Entresuelo. 33201 Gijón (Asturias)

Diseño de portada: Ana Cernea

Estimados amigos:

Tenéis en vuestras manos el número 27 del Boletín SEMA. Con éste, son ya nueve los volúmenes conseguidos (que empezaron con el Anuario de 2002) desde que nos hicimos cargo, en abril de ese año, de la edición del mismo. No nos cansaremos de decir que estamos a vuestra disposición para cualquier sugerencia que permita mejorar el resultado.

En el presente volumen queda en nuestra opinión muy clara la importancia del avance que se ha conseguido en nuestro país en el ámbito de las aplicaciones de las Matemáticas. En efecto, hemos conseguido reunir tres artículos que nos hablan respectivamente de la simulación numérica de incendios forestales, de técnicas de codificación de la información y de la descripción matemática del fenómeno de “El Niño”. Por si fuera poco, a estos artículos les sigue, en la sección de Matemáticas e Industria, un interesante trabajo sobre las relaciones de nuestro ámbito con la empresa.

Los contenidos de este número han sido completados con otros dos artículos (en los que respectivamente se habla de la experiencia “Curso 0” en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla y de la historia de la Unión Matemática Intenacional) y con nuestras secciones habituales de noticias y resúmenes de libros y Tesis Doctorales.

En nuestro nombre y (nos atrevemos a decir) en del colectivo de socios, agradecemos a todos los autores la amable colaboración que han prestado con estas aportaciones.

Como siempre, ha sido para nosotros un placer elaborar este volumen.

Un cordial saludo,

Grupo Editor
boletin_sema@orion.ciencias.uniovi.es

Simulación de incendios forestales

L. FERRAGUT Y M.I. ASENSIO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca

ferragut@usal.es, mas@usal.es

Resumen

En este artículo se resume parte del trabajo realizado en los últimos años por los autores en el campo de la simulación de incendios forestales. A partir de un modelo general presentamos diversos modelos de predicción de la propagación de un incendio a corto plazo y sus correspondientes ejemplos numéricos. Son modelos bidimensionales que permiten una resolución numérica en pequeños ordenadores y moderados tiempos de cálculo.

Palabras clave: *Simulación de incendios forestales, elementos finitos.*

Clasificación por materias AMS: *80A20, 80A25, 80M10*

1 Introducción

Considerables esfuerzos y un gran número de medios materiales se dedican a la prevención, control y extinción de incendios forestales. Aún así, las pérdidas económicas, ecológicas e incluso humanas siguen siendo enormes. Según los datos facilitados por la Dirección General de Conservación de la Naturaleza [8], la evolución de la superficie quemada en las últimas dos décadas es muy similar y está muy relacionada con las variaciones del clima, pero aunque los valores de la superficie quemada en la década de los 90 es inferior a la de la década de los 80, el número de incendios sigue aumentando, ver Figuras 1 y 2. Es evidente pues que sobran justificaciones para cualquier tipo de esfuerzos con el objetivo de luchar contra este grave problema.

Uno de los aspectos que se destacan como prioritarios en la investigación en este campo es el desarrollo de métodos de predicción del comportamiento del fuego. La capacidad de predecir el comportamiento de un incendio es una valiosa herramienta en la lucha contra incendios y a la vez útil en la formación de personal especializado mediante simulaciones. Se comprende que, si somos capaces de estimar el comportamiento más probable del incendio en una zona,

Fecha de recepción: 17 de julio de 2003

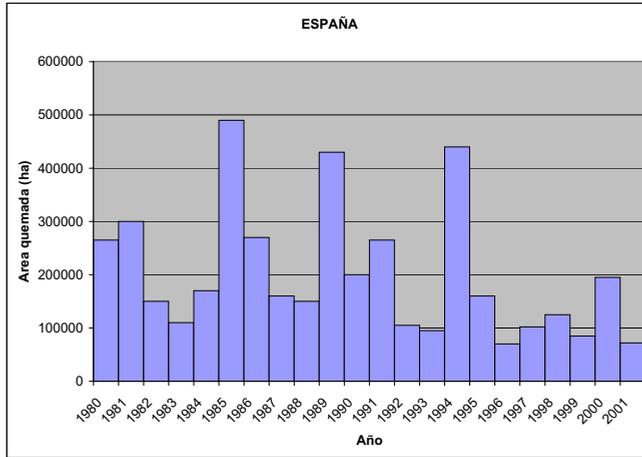


Figura 1: Hectáreas quemadas en España en las dos últimas décadas.

dispondremos de un criterio sólido para catalogar zonas según niveles de riesgo, planificar actuaciones de ordenación del combustible, distribuir medios directos de apoyo a la extinción, etc.

La simulación de la propagación de un incendio forestal se puede realizar a diferentes escalas, véase [1]. Los modelos a corto plazo predicen la propagación de un incendio en una escala de horas, midiendo la velocidad de avance en m/s . Son modelos deterministas ya que suponen que los datos meteorológicos son realistas. Los modelos a medio plazo predicen la propagación de un incendio en una escala de varios días. Este tipo de modelos son similares a los anteriores salvo que los datos meteorológicos son en realidad predicciones probabilistas basadas en las predicciones diarias de temperatura, humedad y viento (se suponen datos constantes para cada día). Los modelos a largo plazo son modelos probabilistas que predicen la propagación de un incendio en una escala de semanas. Estos modelos se basan en la probabilidad de que el fuego avance una distancia determinada antes de que tenga lugar algún fenómeno que lo detenga.

Todos los modelos presentados en este trabajo son modelos a corto plazo. Tratamos de estimar la velocidad y dirección de avance del frente de fuego basándonos en las leyes físicas de conservación que lo describen, lo cual proporciona además otros datos del proceso (temperatura, combustible, etc.) Quizá sea este el enfoque más olvidado en cuanto al modelado de incendios, a pesar de que en los últimos años se han hecho grandes avances en el campo de la simulación numérica de procesos de combustión, principalmente orientados a los procesos de combustión controlada para aplicaciones industriales, ver [6].

Los factores que influyen en la propagación de un incendio, en la velocidad de avance y forma del frente de fuego son muchos y muy variados, véase [16]. Las condiciones meteorológicas, viento, humedad, temperatura, son factores determinantes tanto en el riesgo de aparición de incendios como en su evolución.

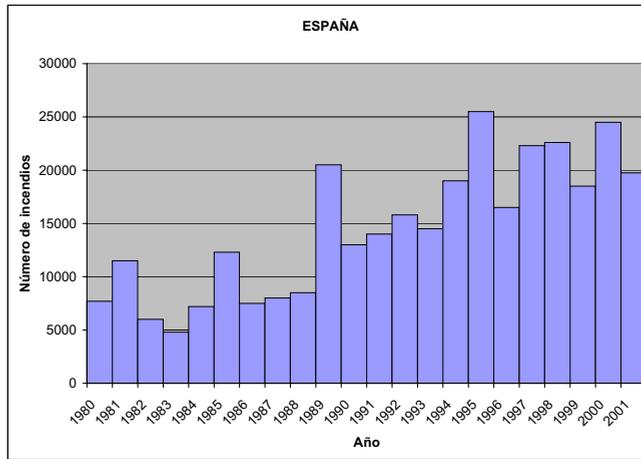


Figura 2: Número de incendios en España en las dos últimas décadas.

La topografía de la zona también es fundamental a la hora de determinar en qué dirección se propagará el incendio prioritariamente. El tipo de combustible y su contenido de humedad es otro de los factores clave en la evolución de un incendio y quizá el más complicado de calibrar debido a su diversidad. Otro de los factores de gran influencia en la evolución de un incendio es el mecanismo de propagación del mismo, es decir, si el incendio se transmite de forma continua a través del lecho de combustible (incendios de superficie), o lo hace por las copas de los árboles, si las llamas se propagan por contacto o el viento arrastra material ardiendo llevando el fuego incluso al otro lado de una zona sin combustible.

La formulación de modelos basados en las leyes de conservación, si no se realizan muchas simplificaciones, es complicada por la diversidad de factores que influyen en el proceso. El problema se complica más aún debido a los diferentes mecanismos de transmisión del fuego: convección, radiación, contacto de la llama, y también debido a que el efecto dominante varía mucho de unos casos a otros.

Comenzamos presentando un modelo físico general que nos permita entender cómo podemos reducir el problema a dimensión dos. Así, las ecuaciones generales descritas en esta primera sección sirven de punto de partida para cualquiera de los modelos que se analizan a lo largo del trabajo. El primer modelo que estudiamos nos permite ver el tipo de soluciones con frente de onda que aparecen en este tipo de problemas. Continuamos con un modelo en dimensión dos, en el que distinguimos fase sólida y fase gaseosa, tenemos en cuenta la radiación local, la convección natural y el efecto de la pendiente y el viento a través del término convectivo. En este modelo, el viento se toma como dato aunque también se puede calcular como se describe en el texto. Por último, presentamos un modelo en el que se tiene en cuenta el efecto de la radiación no local y de la humedad, factores de gran influencia en la evolución de un incendio.

2 Modelo físico

El punto de partida para modelar un fenómeno físico-químico como el de la combustión son las leyes de conservación. Estas leyes se pueden escribir de forma general como ecuaciones que tienen la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_\phi \nabla \phi) = \mathbf{S}_\phi, \quad (1)$$

donde ϕ es una variable genérica, ρ representa la densidad, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es la velocidad, K_ϕ es el coeficiente de difusión y S_ϕ es el término fuente. Aquí $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, es decir, estamos considerando un fenómeno tridimensional en espacio.

En los procesos de combustión naturales, como sistemas de realimentación positiva que son, podemos distinguir dos fases, una fase sólida o endotérmica en la que el calor se utiliza para liberar volátiles, y otra fase gaseosa o exotérmica en la que los volátiles mezclados con el oxígeno reaccionan produciendo más calor. Teniendo esto en cuenta y distinguiendo las dos fases con subíndices s y g respectivamente, la siguiente Tabla recoge las magnitudes, coeficientes y términos fuente de la ecuación genérica (1) en cada fase.

Fase	ϕ	K_ϕ	S_ϕ
Sólida	$C_s T_s$	K_s / C_s	$S_s + H(T_g - T_s)$
$\rho = \rho_s, \mathbf{v} = \mathbf{0}$	1	0	$\rho_s A e^{-E_A/RT_s}$
Gaseosa	$C_g T_g$	K_g / C_g	$S_g - H(T_g - T_s)$
$\rho = \rho_g$	Y_o	$\rho_g D_o$	R_o
	Y_g	$\rho_g D_g$	R_g
	Y_p	$\rho_g D_p$	R_p

De esta forma resumimos el sistema de ecuaciones que describe la evolución de la temperatura de las fases sólida y gaseosa, T_s y T_g respectivamente, la conservación de la masa del combustible sólido y la evolución del oxígeno Y_o , del combustible gaseoso Y_g y de los productos de combustión Y_p .

2.1 Reducción a un modelo bidimensional

Las ecuaciones anteriores describen la evolución de las magnitudes consideradas en un dominio tridimensional como el de la Figura 3, que representa un lecho de combustible de espesor τ . Sobre la frontera lateral podemos imponer condiciones de tipo Dirichlet homogéneas, sobre la frontera inferior, es decir, para $z = 0$, consideramos condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas, y sobre la frontera superior, es decir, para $z = \tau$, consideramos condiciones de Neumann no homogéneas

$$K_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_{z=\tau}} = G_\phi. \quad (2)$$

Denotando

$$\bar{\phi}(x, y) = \int_0^\tau \phi(x, y, z) dz \quad (3)$$

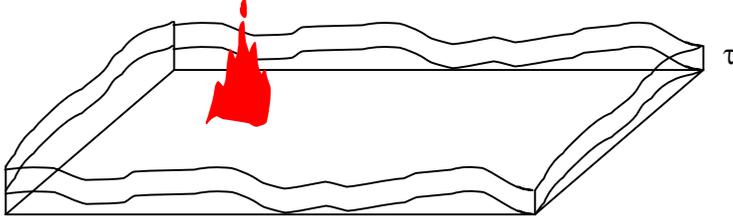


Figura 3: Dominio tridimensional.

e integrando la ecuación (1) respecto a la variable z , podemos reducir el problema a dimensión dos en espacio. Teniendo en cuenta que $v_z = 0$ lejos de la llama, aceptando que cerca de la llama la variación en la vertical de la magnitud en cuestión es nula y suponiendo que K_ϕ es independiente de z , la correspondiente ecuación genérica bidimensional tendrá, haciendo uso de las condiciones de contorno anteriores, la siguiente expresión,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{\phi}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\phi}\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_\phi \nabla \bar{\phi}) = \bar{\mathbf{S}}_\phi + \mathbf{G}_\phi, \quad (4)$$

donde ahora $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ y $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Si el espesor τ es pequeño podemos aproximar \bar{S}_ϕ por $S_{\bar{\phi}}$.

3 Modelo de una fase

Comencemos analizando un modelo de una fase que es sencillo pero que nos aporta datos significativos sobre la forma y comportamiento de la solución. Es conocido que las ecuaciones de reacción-difusión admiten soluciones con frente de onda que se pueden interpretar como ondas de combustión. La velocidad de estas ondas y su dependencia respecto a los parámetros es de interés considerable tanto como problema matemático de combustión como para poder comparar los resultados numéricos obtenidos con datos experimentales.

3.1 Las ecuaciones

Siguiendo la notación utilizada en las ecuaciones de conservación descritas en la sección anterior, considerando un modelo de una sola fase en el que modelamos la fracción másica de combustible sólido no consumida Y y la temperatura media T , y considerando un proceso de combustión exotérmica gobernado por la ley de Arrhenius, las ecuaciones son esencialmente

$$\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) - \nabla \cdot \left(\frac{16}{3} (\sigma \delta T^3 + k) \nabla T \right) = s(T)^+ \rho Q A Y e^{-\frac{E_A}{RT}} - \bar{h}(T - T_\infty), \quad (5)$$

$$\rho C \frac{\partial Y}{\partial t} = -s(T)^+ AY e^{-\frac{E_A}{RT}}, \quad (6)$$

donde \bar{x} y \bar{t} son las variables espacial y temporal respectivamente, R es la constante universal de los gases, ρ es la densidad del combustible, C es el calor específico, k es la conductividad térmica, Q es el calor de combustión, A es el factor pre-exponencial (que suponemos constante) y E_A es la energía de activación.

Siendo T_∞ la temperatura ambiente, la pérdida de calor en la dirección vertical debida a la convección natural, es decir, el término G_ϕ en la ecuación de la temperatura de la fase sólida, es igual a $\bar{h}(T - T_\infty)$, donde \bar{h} es el coeficiente de convección natural. Éste depende, entre otras cosas, de la pendiente del terreno.

El principal efecto de la pendiente y del viento es transportar la energía en la dirección indicada por el sentido del viento y la pendiente positiva del terreno. Este hecho queda reflejado en el término convectivo $\mathbf{v} \cdot \nabla T$, donde se considera que \mathbf{v} es un dato conocido. En este modelo simplificado no tenemos en cuenta el carácter turbulento del proceso.

El mecanismo de transmisión dominante en la proximidad del foco de un fuego es casi siempre la radiación, véase [7]. Generalmente, es la radiación lo que proporciona el calor de gasificación necesario para liberar los volátiles del combustible sólido para mezclarse con el oxígeno y liberar a su vez más calor. Cuando un medio es ópticamente denso, la radiación sólo puede atravesar una pequeña distancia antes de ser absorbida. Considerando una situación en la que la distancia recorrida por la radiación es pequeña comparada con la distancia en la que hay cambios significativos de temperatura, la influencia de la radiación se puede representar mediante su aproximación por difusión, véase en [17] una deducción, que da lugar a la siguiente expresión del flujo de calor debido a la radiación:

$$-\frac{16}{3} \sigma \delta T^3 \nabla T, \quad (7)$$

donde δ es la longitud media recorrida por la radiación y σ es la constante de Stefan-Boltzman. De esta forma, podemos incorporar la radiación local como un término difusivo más de la ecuación de conservación de la energía.

Para simplificar el modelo, hemos incorporado las dos fases, sólida y gaseosa, en un único sistema de ecuaciones que representa un medio poroso cuya temperatura media es T . Las variables que queremos conocer son la fracción de combustible sólido no consumida y la temperatura media. El combustible sólido se consume a partir de una cierta temperatura de pirólisis T_p . Por tanto, multiplicando los correspondientes términos de ambas ecuaciones por la siguiente función, podemos modelar el proceso mediante un único sistema de ecuaciones:

$$s(T)^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } T \geq T_p, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones (5)-(6) en el que hemos incorporado todos estos términos, aunque no representa ningún modelo particular de reacción, es indicativo del comportamiento general de una reacción de combustión, ver [12] y [18].

3.2 Adimensionalización

Adimensionalizamos estas ecuaciones usando el cambio de variables de Frank-Kamenetskii [4] de manera que podamos establecer los parámetros más significativos. Fijamos como valores de referencia para la temperatura y el combustible los valores iniciales de equilibrio antes de iniciarse el fuego, es decir, la temperatura ambiente $T_0 = T_\infty$ y el combustible inicial $Y_0 = Y(0)$. Fijamos también unas magnitudes características para las variables temporal y espacial,

$$t_0 = \frac{\epsilon}{q} \frac{1}{A} e^{1/\epsilon}, \quad l_0 = \sqrt{\frac{t_0 k}{\rho C}}, \quad (8)$$

donde ϵ es el inverso adimensional de la energía de activación, q es el calor de reacción adimensional y h es el coeficiente de convección natural adimensional:

$$\epsilon = \frac{RT_\infty}{E_A}, \quad q = \frac{QY_0}{CT_\infty}, \quad h = \frac{\bar{h}t_0}{\rho C}. \quad (9)$$

Con el cambio de variables,

$$x = \frac{\bar{x}}{l_0}, \quad t = \frac{\bar{t}}{t_0}, \quad u = \frac{T - T_\infty}{\epsilon T_\infty}, \quad y = \frac{Y}{Y_0}, \quad (10)$$

las ecuaciones adimensionales obtenidas son,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla u - \nabla \cdot (K(u) \nabla u) = s(u)^+ y e^{u/(1+\epsilon u)} - hu, \quad (11)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -s(u)^+ \frac{\epsilon}{q} y e^{u/(1+\epsilon u)}, \quad (12)$$

donde $K(u) = \kappa_u (1 + \epsilon u)^3 + 1$ y $\kappa_u = \frac{16\sigma\delta}{3k} T_\infty^3$.

3.3 Solución de tipo frente de onda en el caso unidimensional

Para analizar el comportamiento de la solución de este tipo de problemas centrémonos en la siguiente ecuación clásica de reacción-difusión limitándonos al caso de una dimensión espacial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha e^{u/(1+\epsilon u)} - u. \quad (13)$$

Aquí no estamos teniendo en cuenta el consumo de combustible ni el término convectivo (este último supone una traslación de la solución). La ecuación (13) admitirá soluciones en frente de onda si la función $F(u) = \alpha e^{u/(1+\epsilon u)} - u$ se anula en al menos un punto (los puntos en los que la función F se anula se llaman puntos de equilibrio) y éste es estable. Es bien conocida en la literatura sobre combustión la curva en forma de "S" que, para cada valor fijo de ϵ , representa las soluciones de equilibrio para u en función de α , ver [11]. De estas soluciones de equilibrio, al menos dos son estables. En el caso de funciones de

reacción biestables en una ecuación de reacción-difusión, las ondas físicamente significativas pueden cambiar de una solución estable a otra. Suponiendo que la velocidad de una de estas ondas solución es c , haciendo el cambio de variable $u(x, t) = u(\zeta)$, donde $\zeta = x - ct$, la ecuación (13) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria,

$$u'' + cu' + F(u) = 0. \quad (14)$$

A partir de aquí, podemos calcular el signo de c y conocer la dirección de la onda, aunque no su valor numérico, como en [11]. Se puede sin embargo calcular el mencionado valor de la velocidad c utilizando la adimensionalización $u = RT/E_A$, véase por ejemplo [18].

3.4 Solución numérica en el caso bidimensional

El modelo unidimensional nos proporciona información muy útil sobre la forma con frentes de onda de la solución. Pero cuando el viento y la pendiente, reflejados en el término convectivo, son variables a lo largo del dominio, como ocurre en un caso real, no podemos reducir el problema a dimensión uno. En [2] se presenta un método numérico para resolver estas ecuaciones en el caso bidimensional.

Usando la transformación de Kirchoff, las ecuaciones (11) y (12) se pueden escribir de la siguiente forma general,

$$u_t - \mathbf{w} \cdot \nabla u - \Delta H(u) = f(u, y), \quad (15)$$

$$y_t = g(u, y), \quad (16)$$

para las que fijamos las siguientes condiciones iniciales y de frontera,

$$H(u)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad y|_{t=0} = y^0. \quad (17)$$

Resolvemos el problema utilizando un método de elementos finitos mixto para la discretización espacial, con elementos de Raviart-Thomas de orden mínimo, véase [15]. Un método mixto permite discontinuidad en la temperatura preservando la continuidad del flujo entre los elementos del mallado. El término convectivo se aproxima y calcula con una técnica de “splitting” usando el método de Godunov, véase [9]. Para la discretización temporal del sistema no lineal de ecuaciones diferenciales obtenido, utilizamos un método de Euler explícito con paso de tiempo variable, tratando de forma implícita los términos lineales.

Como aplicación, presentamos los resultados numéricos de una combustión simulada de un cuadrado de lado 90 m, distribución uniforme de combustible inicial, término convectivo uniforme en la dirección nordeste y un foco de fuego inicial.

En la Figura 4 podemos comparar la solución aproximada de la temperatura adimensional en la diagonal $x_1 = x_2$ y en el instante $t = 0.1625$ para diferentes mallados rectangulares de tamaños: $\Delta x = \Delta y = 7.5$ con paso de tiempo entre 10^{-6} y 10^{-5} , $\Delta x = \Delta y = 1.875$ con paso de tiempo entre 2.5×10^{-7} y 2.5×10^{-7}

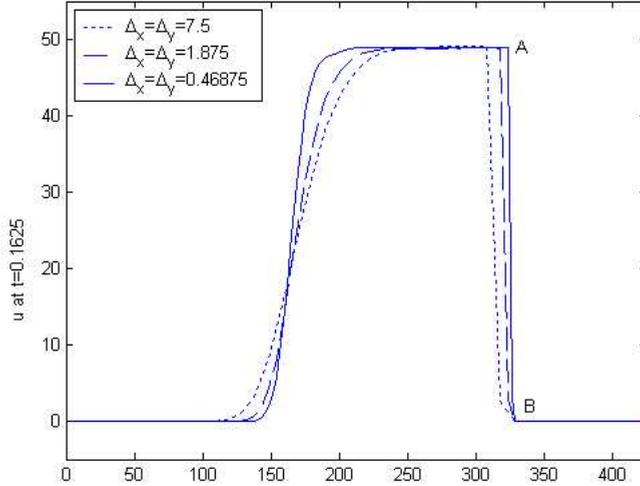


Figura 4: Temperatura para diferentes mallas.

y finalmente $\Delta x = \Delta y = 0.46875$ con paso de tiempo entre 6.25×10^{-8} y 6.25×10^{-7} . En la Tabla I se detalla la posición del valor máximo de la temperatura en el frente de fuego para los tres mallas indicados en la Figura 4. Podemos observar la convergencia del método numérico.

TABLA I Posición y valor del frente de fuego para diferentes mallas.

A	Malla gruesa	Malla media	Malla fina
posición	307.5910	318.1981	323.5014
valor de u	49.069	48.856	49.011

B	Malla gruesa	Malla media	Malla fina
posición	328.8047	328.8047	328.8047
valor de u	0	0	0

En la Figura 5 podemos observar la evolución de la temperatura adimensional para la malla más fina. Las temperaturas más altas alcanzadas durante los pasos iniciales no superan el máximo correspondiente a las condiciones iniciales elegidas, calculado en un caso sin difusión.

4 Modelo de dos fases

En este nuevo modelo más elaborado, aunque seguimos considerando una temperatura media para las dos fases, distinguimos combustible sólido, combustible gaseoso y oxígeno.

Suponemos que el viento adimensionalizado $\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j}$ es variable a lo largo del dominio espacial $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$, así como el coeficiente de

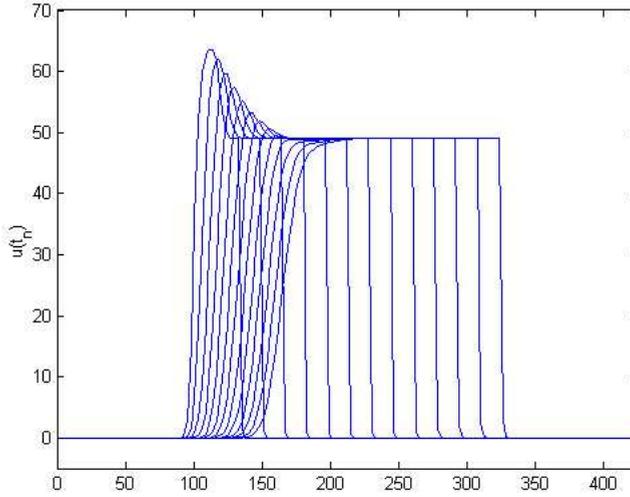


Figura 5: Evolución de la temperatura para el mallado más fino.

convección natural h que se ve afectado por la pendiente del terreno. La ecuación adimensional para la temperatura u es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla u - \nabla \cdot (K(u) \nabla u) = \mu y_f y_o e^{u/(1+\epsilon u)} - hu, \quad (18)$$

las correspondientes ecuaciones adimensionales para el combustible sólido y_s , el combustible gaseoso y_f y el oxígeno y_o son

$$\frac{\partial y_s}{\partial t} = -\alpha_s y_s e^{u/(1+\epsilon u)}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial y_f}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla y_f - \kappa_f \Delta y_f = -\alpha_f y_f y_o e^{u/(1+\epsilon u)} + \alpha_s y_s e^{u/(1+\epsilon u)}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial y_o}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla y_o - \kappa_o \Delta y_o = -\alpha_o y_f y_o e^{u/(1+\epsilon u)}, \quad (21)$$

véase [3].

Para simplificar, hemos representado todos los parámetros que aparecen tras la adimensionalización (la misma que en el ejemplo del apartado anterior) con letras griegas con los correspondientes subíndices. Estas letras griegas son coeficientes positivos constantes. κ se usa para designar los coeficientes adimensionales de difusión, α para los factores adimensionales de producción o consumo de cada especie y μ para el factor adimensional de producción de calor de la combustión.

Completamos estas ecuaciones con las siguientes condiciones iniciales,

$$y_s|_{t=0} = y_s^0, \quad y_f|_{t=0} = 0, \quad y_o|_{t=0} = y_o^0, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad (22)$$

donde y_s^0 es la cantidad inicial de combustible sólido y u^0 es la temperatura inicial, que suponemos conocidas. y_o^0 es la cantidad inicial de oxígeno, que suponemos constante.

Podemos imponer condiciones de contorno tanto de tipo Dirichlet como Neumann suponiendo que el dominio es lo suficientemente grande. En el ejemplo aquí presentado hemos tomado las siguientes condiciones de contorno,

$$y_f|_{\partial\Omega} = 0, \quad y_o|_{\partial\Omega} = y_o^0, \quad u|_{\partial\Omega} = u^0|_{\partial\Omega}. \quad (23)$$

Podemos tomar el viento como dato o podemos considerarlo como una incógnita más del sistema, puesto que el propio fuego lo modifica. El modelo desarrollado por los autores y J. Simon en [3] permite el cálculo del viento, en la capa de aire sobre la superficie donde se simula el fuego, a partir de cálculos bidimensionales. Este modelo tiene en cuenta la influencia del propio fuego, así como de la pendiente, en la evolución del viento. Para un instante t y una temperatura u definida en el dominio bidimensional Ω , el campo de viento \mathbf{w} viene dado por

$$\mathbf{w} = \frac{\xi}{c_3} (\nabla^\perp f + c_4 \nabla \hat{u} + \mathbf{w}_m^*), \quad (24)$$

donde f es la única solución de

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{c_1} \nabla f \right) = \nabla^\perp \cdot \frac{c_2 \nabla \hat{u} + \mathbf{w}_m^*}{c_1}, \quad (25)$$

$$f|_{\partial\Omega} = 0. \quad (26)$$

Aquí \hat{u} es una función proporcional en cada punto a la temperatura, dependiendo el factor de proporcionalidad de la altura del terreno en ese punto. Los coeficientes c_1, c_2, c_3 y c_4 son funciones conocidas de las variables espaciales x_1, x_2 y tienen en cuenta la forma de la superficie. La influencia del viento meteorológico se incorpora a través del término \mathbf{w}_m^* . El factor ξ es el inverso del coeficiente de rozamiento del aire sobre la superficie del terreno.

4.1 Método numérico

El método numérico empleado para este modelo es un método de elementos finitos adaptativo combinado con una técnica de “splitting”. Cada paso de tiempo se divide en tres pasos correspondientes a la parte reactiva, convectiva y difusiva de cada una de las ecuaciones (18)-(21). La parte reactiva se resuelve con un método de Euler implícito, la parte convectiva por el método de las características, y la parte difusiva usando una aproximación mediante elementos finitos de Lagrange de tipo P_1 . Previamente, se calcula la velocidad \mathbf{w} resolviendo (25). En cada paso se adapta el mallado. El algoritmo ha sido programado utilizando FreeFEM+, una librería de elementos finitos creada por O. Pironneau y F. Hecht [13].

4.2 Ejemplo numérico

Como aplicación, presentamos los resultados numéricos de una combustión simulada en un rectángulo adimensional de tamaño 2×1 , para un foco de fuego inicial dado por,

$$u^0(x, y) = 30e^{-200((x-0,25)^2+(y-0,5)^2)}. \quad (27)$$

La superficie tiene una elevación en el centro del rectángulo. Consideramos velocidad del viento en la frontera $\mathbf{w}_m^* = (220, 0)$, que equivale a una velocidad entre 2 y 5 m/s.

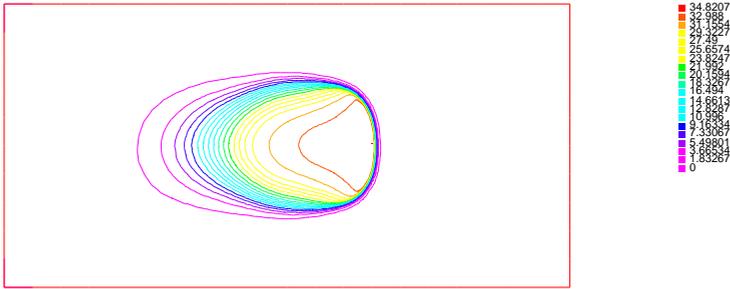


Figura 6: Temperatura.

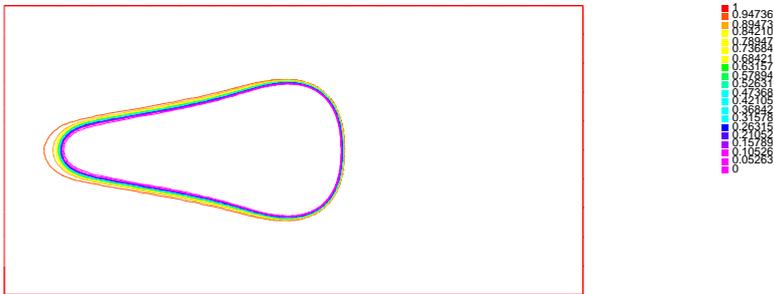


Figura 7: Combustible sólido.

Después de 100 pasos de tiempo obtenemos las isolíneas de temperatura que se muestran en la Figura 6. Después de este tiempo, se llega a un frente de fuego estable. Podemos apreciar el área quemada en las isolíneas correspondientes al combustible sólido de la Figura 7. Las Figuras 8 y 9 muestran las isolíneas del combustible gaseoso y el oxígeno respectivamente. La Figura 10 muestra un mallado adaptado.

en la zona del fuego. Una evaluación correcta de estos términos nos llevaría a introducir modelos más elaborados de turbulencia, por ejemplo el modelo $k - \varepsilon$, lo que lleva a sistemas mucho más complejos (tridimensionales) de propagación de incendios, como el desarrollado en Los Alamos [10].

Podemos mejorar el modelo de una fase de la Sección 3 incorporando el efecto de algunos fenómenos que afectan de manera importante a la forma y a la velocidad de avance del frente de fuego como son el contenido de humedad del combustible o la radiación no local. El efecto de la humedad del combustible, así como el efecto endotérmico del proceso de pirólisis, se incorporan mediante una función multívoca que representa la entalpía. En este modelo mejorado, también tenemos en cuenta la influencia de la tercera dimensión sobre el modelo bidimensional no sólo con la pérdida de calor en la dirección vertical como en el modelo anterior, sino que además ahora tenemos en cuenta la radiación no local desde la llama al lecho de combustible, que depende de la inclinación de la llama, y esta a su vez de la pendiente del terreno y el viento.

5.1 Las ecuaciones

Las ecuaciones adimensionales que gobiernan este nuevo modelo son,

$$\partial_t e + \mathbf{w} \cdot \nabla e - \kappa \Delta u + hu = \mathfrak{R}(u, y), \quad (28)$$

$$e \in G(u), \quad (29)$$

$$\partial_t y = -g(u)y, \quad (30)$$

donde $g(u) = \beta s^+(u, y)$. La función s^+ viene dada por,

$$s^+(u, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq u_p \text{ ó } y > y_e \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

siendo y_e la fracción másica de extinción. Esto quiere decir que, por debajo de este valor, el fuego se apaga.

Las condiciones iniciales y de contorno son,

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad y|_{t=0} = y^0. \quad (31)$$

Las incógnitas son la entalpía e , la temperatura adimensional $u = \frac{T - T_\infty}{T_\infty}$ y la fracción másica de combustible sólido y .

La entalpía adimensional e es un elemento del operador multívoco G definido por

$$G(u) = \begin{cases} u & si & u < u_v \\ [u_v, u_v + \lambda_v] & si & u = u_v \\ u + \lambda_v & si & u_v < u < u_p \\ [u_p + \lambda_v, u_p + \lambda_v + \lambda_p] & si & u = u_p \\ u + \lambda_v + \lambda_p & si & u > u_p \end{cases}$$

donde u_v y u_p son, respectivamente, la temperatura adimensional de evaporación del agua y la temperatura adimensional de pirólisis del combustible

sólido. Los parámetros λ_v y λ_p son los calores adimensionales de evaporación y de pirólisis respectivamente. En la zona quemada, el operador G se modifica tomando $\lambda_v = \lambda_p = 0$.

Como en los modelos anteriores, $\kappa\Delta u$ representa la difusión térmica, hu la pérdida de energía por convección en la dirección vertical, y el término convectivo $\mathbf{w}\cdot\nabla e$ tiene en cuenta la energía transportada por convección en el gas pirolizado.

El término \mathfrak{R} describe la radiación térmica desde la llama al lecho de combustible. Este término es un operador de convolución dado por

$$\mathfrak{R}(x, u, y) = C \int_{\Omega_f(u, y)} f(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{\mathbf{x}}, \quad (32)$$

donde $\Omega_f(u, y) = \{\mathbf{x} \in \Omega; u(\mathbf{x}) > u_p, y(\mathbf{x}) > y_e\}$ es el dominio del fuego en la superficie.

En un medio no dispersivo y para un gas gris, la intensidad de radiación incidente en un punto dado de la superficie para una dirección fija viene dada, integrando para todas las longitudes de onda, como sigue (ver [17] y Figura 11):

$$i(\mu) = i(0)e^{-\mu} + \int_0^\mu i_b(\mu^*)e^{-(\mu-\mu^*)} d\mu^*, \quad (33)$$

donde a es el coeficiente de absorción, $\mu(s) = \int_0^s a(s^*) ds^*$ es el grosor óptico de un camino de longitud s e i_b es la intensidad de radiación del cuerpo negro.

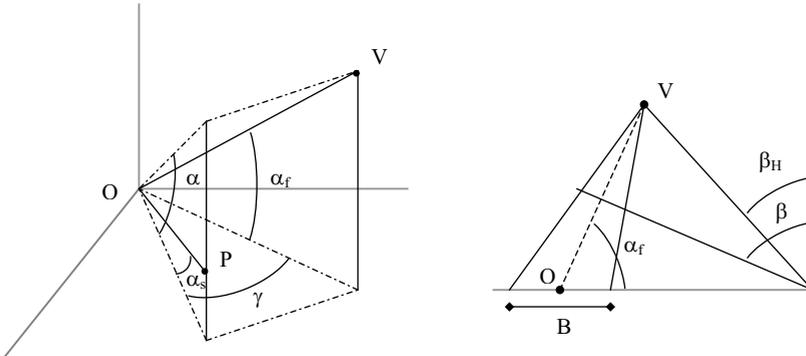


Figura 11: Cálculo de la radiación no local.

Suponiendo que el gas fuera de la llama es un medio transparente, entonces $i(0) = 0$, teniendo en cuenta que en el interior de la llama

$$i_b(\mu) = \frac{\sigma T_f^4(\mu)}{\pi},$$

donde T_f es la temperatura de la llama y σ es la constante de Stefan-Boltzman y suponiendo que el espesor óptico de la llama es pequeño, obtenemos:

$$i(\mu(s)) = \frac{\sigma T_f^4}{\pi} (1 - e^{-a(s_2 - s_1)}) \approx \frac{a\sigma T_f^4}{\pi} (s_2 - s_1),$$

donde $s_2 - s_1$ es la longitud del camino dentro de la llama.

El flujo de energía q en el punto $P = (\mathbf{x}, z)$ se obtiene integrando para todas las direcciones:

$$q = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\beta=\beta_H}^{\beta=\pi/2} i(\beta, \theta) \cos(\beta) \sin(\beta) d\beta d\theta.$$

Para una llama de sección triangular, siendo α_f el ángulo que forma la llama con el plano horizontal, γ el ángulo que forma la proyección horizontal de la llama con el vector posición del punto \mathbf{x} con respecto al centro de la base de la llama, $\text{tg } \alpha_s$ la pendiente del terreno en la dirección determinada por el punto \mathbf{x} y el centro de la base de la llama y, por último, siendo B la anchura de la base de la llama (ver Figura 11), tenemos:

$$q(\mathbf{x}) = \frac{a\sigma T_f^4}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\beta_H}^{\pi/2} \frac{B \sin \beta (\text{tg } \beta - \text{tg } \beta_H)}{(\frac{\cos \gamma + \text{tg } \alpha_f \text{tg } \alpha_s}{\text{tg } \alpha_f - \cos \gamma \text{tg } \alpha_s} + \text{tg } \beta)^2 - (\frac{B}{2H})^2} d\beta d\theta. \quad (34)$$

Usando la regla de Simpson para integrar respecto a β , despreciando $(\frac{B}{2H})^2$ y observando que $d\theta = \frac{d\tilde{A}}{B\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}$, obtenemos:

$$q(\mathbf{x}) = \frac{a\sigma T_f^4}{\pi} \int_{\Omega_f} \frac{g(\alpha_f, \gamma, \alpha_s, \beta_H)}{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|} d\tilde{A}, \quad (35)$$

donde

$$g(\alpha_f, \gamma, \alpha_s, \beta_H) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \beta_H \right) \frac{\text{sen}(\frac{\beta_H + \frac{\pi}{2}}{2}) (\text{tg}(\frac{\beta_H + \frac{\pi}{2}}{2}) - \text{tg } \beta_H)}{(\frac{\cos \gamma + \text{tg } \alpha_f \text{tg } \alpha_s}{\text{tg } \alpha_f - \cos \gamma \text{tg } \alpha_s} + \text{tg}(\frac{\beta_H + \frac{\pi}{2}}{2}))^2}$$

y

$$\beta_H = \arg \text{tg} \left(\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{H} - \frac{\cos \gamma + \text{tg } \alpha_f \text{tg } \alpha_s}{\text{tg } \alpha_f - \cos \gamma \text{tg } \alpha_s} \right).$$

Finalmente, la expresión de \Re en (32) se obtiene adimensionalizando, siendo C la constante correspondiente y

$$f(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{g(\alpha_f, \gamma, \alpha_s, \beta_H)}{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|},$$

donde aquí \mathbf{x} y $\tilde{\mathbf{x}}$ representan coordenadas adimensionales.

$$J_\lambda^\omega = (I + \lambda G^\omega)^{-1} = ((1 - \lambda\omega)I + \lambda G)^{-1}$$

es un operador unívoco bien definido y la aproximación de Yosida de G^ω viene dada por

$$G_\lambda^\omega = \frac{I - J_\lambda^\omega}{\lambda}.$$

Es fácil comprobar que la inclusión (39) es equivalente a la ecuación

$$z^{n+1} = G_\lambda^\omega(u^{n+1} + \lambda z^{n+1}).$$

Esto sugiere el siguiente algoritmo para resolver (36)-(38):

Para u^n , y^n y z^n dados, y un valor de tolerancia de error ε fijado,

1. Tomamos $u^{n+1,0} = u^n$, $z^{n+1,0} = z^n$.

2. Calculamos

$$y^{n+1,i+1} = \frac{y^n}{1 + \Delta t g(u^{n+1,i})}.$$

3. Calculamos $u^{n+1,i+1}$ resolviendo

$$(h\Delta t + \omega)u^{n+1,i+1} - \Delta t \kappa \Delta u^{n+1,i+1} = \bar{e}^n - z^{n+1,i} + \Delta t R^n.$$

4. Calculamos $z^{n+1,i+1} = G_\lambda^\omega(u^{n+1,i+1} + \lambda z^{n+1,i})$.

5. Si $\|z^{n+1,i+1} - z^{n+1,i}\| > \varepsilon$, actualizamos $i \leftarrow i + 1$ y volvemos al paso 2. En caso contrario, terminamos el bucle.

Para $\lambda\omega \leq 1/2$, la aproximación de Yosida G_λ^ω es un operador de Lipschitz con constante $1/\lambda$ y se puede probar la convergencia del algoritmo, véase [5].

5.3 Ejemplo numérico

Como aplicación, presentamos los resultados numéricos de una combustión simulada en un lecho de combustible cuadrado de lado 3 m con una densidad de *Pinus Pinaster* de 1 kg/m². Valores realistas de los parámetros físicos corresponden a los siguientes valores de los parámetros adimensionales,

$$\kappa = 1.3 \times 10^{-4}, \quad h = 0.02.$$

Hemos estudiado la propagación del frente de fuego para los siguientes valores del calor adimensional de evaporación $\lambda_v = 0.6, 0.9, 1.2$, que corresponden a un contenido de humedad de 0.1, 0.15 y 0.2 (kg agua/kg combustible seco), respectivamente. En primer lugar consideramos un calor de pirólisis nulo, es decir, $\lambda_p = 0$. El fuego se inicia en el centro del cuadrado, y obtenemos un frente de fuego circular como se puede ver en la Figura 13, en la que representamos la sección en la línea $x_1 = x_2$ de la temperatura adimensional para diferentes instantes de tiempo y contenido de humedad $\lambda_v = 0.6$. El efecto de la humedad se puede apreciar claramente en la zona plana antes del frente de fuego.

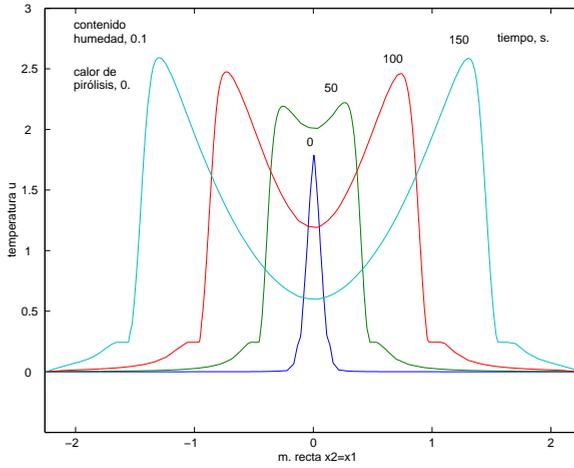


Figura 13: Temperatura en diferentes instantes de tiempo y $\lambda_v = 0.6$.

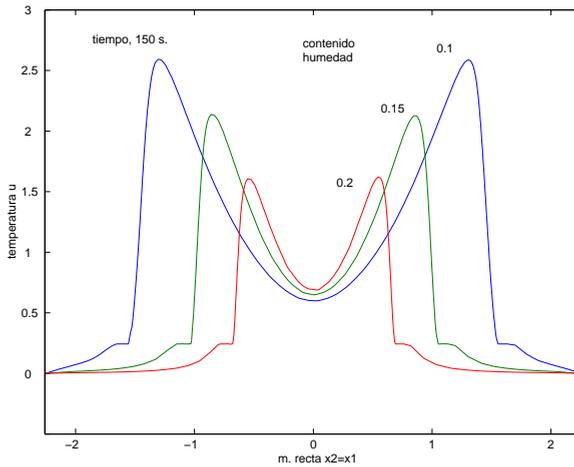


Figura 14: Temperatura en el instante $t = 150s$ y diferentes contenidos de humedad.

En la Figura 14 representamos el perfil de la temperatura al cabo de $150 s$ para los distintos contenidos de humedad mencionados, a los que corresponden las siguientes velocidades de avance del frente de fuego: 1.07 cm/s , 0.76 cm/s y 0.49 cm/s . Para una cantidad de combustible dada existe un valor máximo del contenido de humedad por encima del cual el fuego no se propaga, en este ejemplo, este valor crítico es $\lambda_v = 1.32$.

El calor absorbido por la pirólisis es generalmente mucho menor que el

calor absorbido por la evaporación del agua y algunas veces se desprecia, es decir, se toma $\lambda_p = 0$. Para ver el efecto del calor de pirólisis, en la Figura 15 representamos el perfil de la temperatura adimensional en los instantes $t = 50$ s y $t = 100$ s para $\lambda_v = 0.3$ y $\lambda_p = 0$ y $\lambda_p = 0.09$, que corresponden a un valor de calor absorbido por pirólisis de 0 y 30 kJ/kg respectivamente.

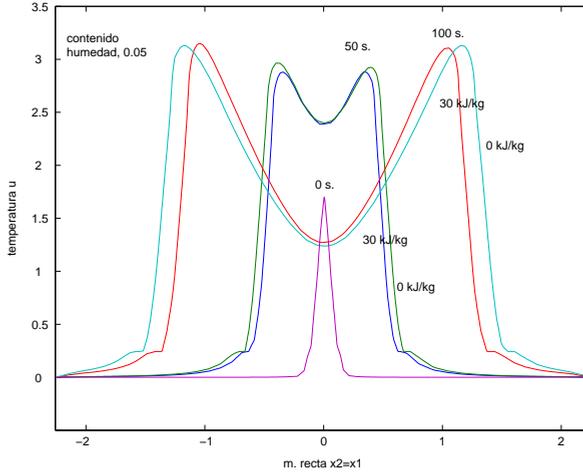


Figura 15: Temperatura en los instantes $t = 50$ s y $t = 100$ s y diferentes calores de pirólisis.

En la Figura 16 se representa el flujo de calor debido a la radiación no local en el caso de una superficie inclinada y con viento en la dirección perpendicular a la dirección de máxima pendiente de la superficie.

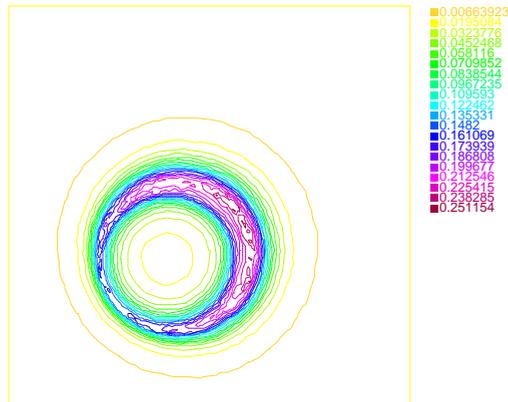


Figura 16: Término de radiación para un caso con viento e inclinación del terreno.

6 Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con financiación de la Junta de Castilla y León mediante los proyectos SA50/95 y SA089/01 y del Ministerio de Ciencia y Tecnología mediante el proyecto REN2001-0925-03-03.

Referencias

- [1] K.R. Anderson. *Fire growth modelling at multiple scales*. Proceedings of Forest Fire Research and Wildland Fire Safety, Millpress, 2002.
- [2] M.I. Asensio and L. Ferragut. *On a wildland fire model with radiation*. Int. J. Numer. Meth. Engng, **54**, pp. 137-157, 2002.
- [3] M.I. Asensio, L. Ferragut and J. Simon. *Modelling of convective phenomena in forest fire*. Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat., **96**(3), pp. 299-313, 2002.
- [4] J. Bebernes and D. Eberly. *Mathematical problems for combustion theory*. Applied Mathematical Science, **83**, Springer-Verlag, 1989.
- [5] A. Bermúdez and C. Moreno. Duality methods for solving variational inequalities, *Comp. and Math. Appl.*, **7**, 43-58 (1981).
- [6] S. Candel. *Problems and perspectives in numerical combustion*. Computational Methods in Applied Sciences'96, Edited by John Wiley and Sons Ltd, 1996.
- [7] G. Cox. *Combustion fundamentals of fires*. Academic Press, 1995.
- [8] European Communities *Forest Fires in Europe - 2001 fire campaign*. S.P.I.02.72 EN ©European Communities 2002.
- [9] S. Godunov *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*. Ed. Mir, 1979.
- [10] R.R. Linn. *Transport model for prediction of wildland behaviour*. Los Alamos National Laboratory, Scientific Report, LA1334-T, 1997.
- [11] G.N. Mercer and R.O. Weber *Combustion wave speed*. Proc. R. Soc. Lond. A, **450**, pp. 193-196, 1995.
- [12] G.N. Mercer, R.O. Weber and H.S. Sidhu *An oscillatory route to extinction for solid fuel combustion waves due to heat losses*. Proc. R. Soc. Lond. A, **454**, pp. 2015-2022, 1998.
- [13] O. Pironneau and F. Hecht. *FreeFEM (software file)* En internet: <http://www.freefem.org>
- [14] O. Pironneau. On the Transport-Difussion Algorithm and its applications to the Navier-Stokes Equations, *Numer. Math.*, **38**, pp. 309-332, 1982.

- [15] J.E. Roberts and J.M. Thomas. *Mixed and hybrid methods. Handbook of Numerical Analysis, vol. II. Finite Element Methods (Part I)*. Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [16] R.C. Rothermel. *BEHAVE: Fire Behavior Prediction and Fuel Modeling System-Fuel Subsystem*. Technical Report INT-167. USDA Forest Service, Intermountain Research Station, Odgen, Utah, 1984.
- [17] R. Siegel and J.R. Howell. *Thermal radiation heat transfer*. McGraw-Hill, 1972.
- [18] R.O. Weber, G.N. Mercer, H.S. Sidhu and B.F. Gray. *Combustion waves for gases ($Le = 1$) and solids ($Le \rightarrow \infty$)*. Proc. R. Soc. Lond. A, **453**, pp. 1105-1118, 1997.

Codificación de información mediante códigos de barras*

L. HERNÁNDEZ¹ Y A. MARTÍN²

¹Departamento de Tratamiento de la Información y Codificación,
Instituto de Física Aplicada,
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

²Departamento de Matemática Aplicada,
Universidad de Salamanca

`luis@iec.csic.es, delrey@usal.es`

Resumen

Se presentan en este artículo varios sistemas de codificación de información mediante códigos de barras. En particular se detalla la forma de elaborar el código de barras EAN13, posiblemente el más utilizado en la actualidad, y su relación con otro de los códigos más empleados: el ISBN para la catalogación de libros. Se incluyen y comentan los procesos matemáticos empleados para elaborar tales códigos.

Palabras clave: *Codificación de la información, códigos de barras, códigos detectores de errores, EAN13, ISBN.*

Clasificación por materias AMS: *94A15, 94B05, 94B60*

1 Introducción

El desarrollo tecnológico actual, la proliferación de los ordenadores y periféricos, así como la facilidad para el establecimiento de redes locales y su rapidez de acceso, ha permitido el desarrollo de nuevas aplicaciones matemáticas e informáticas a diferentes campos de la vida cotidiana. Una de ellas es la codificación de objetos de toda índole; en la que además de las herramientas informáticas que agilizan el tratamiento de la información, intervienen diferentes aspectos matemáticos, como son los algoritmos utilizados en la elaboración de los códigos y la verificación de que éstos son leídos correctamente.

* Parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, TIC2001–0586.
Fecha de recepción: 23 de julio de 2003

Se denomina *código* a todo sistema de signos o señales y reglas que cambia la forma de un mensaje. Esta codificación se lleva a cabo de forma estándar y no secreta, es decir, su finalidad es la de resumir determinados datos y permitir una manipulación electrónica de los mismos. Desde este punto de vista, no es objetivo de un código impedir que la información que contiene sea accesible a personas diferentes de quienes elaboraron dicho código. No se trata pues de códigos secretos, que entran en el campo de la criptografía (para temas criptográficos véanse, por ejemplo, [10, 14]).

En particular, los códigos de barras que se presentan en este artículo son *no significativos* en el sentido de que no proporcionan más información que la contenida en el propio código, es decir, no permiten ocultar información, dado que su finalidad no es otra que la de transformar la información constituida por caracteres en una información gráfica, que puede ser tratada por medios informáticos. Por este motivo, no es conveniente que información confidencial se codifique por medio de códigos de barras.

Hoy en día, la mayor parte de los productos manufacturados, desde libros a latas de tomate, pasando por prendas de vestir, medicamentos, o paquetes de envío urgente, llevan una etiqueta con determinados símbolos o barras, que codifican información relativa a dicho artículo y que permiten identificarlo de forma unívoca. Así, se entiende por *código de barras* a un conjunto de líneas y números asociados a ellas, que va impreso en los productos de consumo y que se utiliza para su gestión informática. La información contenida en el código de barras hace referencia a datos relevantes del artículo, como el país de fabricación, su tamaño, propiedades, precio, etc. Estos datos son accesibles por medio de un lector óptico que “lee” el contenido del código mediante un rayo láser. La “lectura” es transformada por el software correspondiente y manipulada conforme a determinados requerimientos informáticos. El código leído es enviado a una base de datos que responde con el nombre del artículo, su precio y otros datos. En el caso de una venta, el artículo es dado de baja en el almacén, con lo que es posible gestionar las ventas diarias, el stock, etc.

En el presente trabajo se comentan diferentes métodos de codificación mediante códigos de barras. En §2 se presentan algunas definiciones básicas sobre códigos en su sentido matemático. En la sección 3 se hace un breve repaso a los códigos de barras más empleados. El caso particular del código de barras EAN13 se comenta con detalle en la sección 4. Finalmente, en §5 se presenta el código ISBN, su relación con el EAN13 y algunas de sus propiedades para detectar determinados tipos de errores.

2 Definiciones y Notación

Se llama *alfabeto* a un conjunto finito de q símbolos, $\Sigma_q = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$. Los elementos (vectores) de Σ_q^n se denominan *palabras de longitud n* , y se llama *código de longitud n* a todo subconjunto $\mathcal{C} \subset \Sigma_q^n$. Los elementos de \mathcal{C} se conocen como *codewords* o *palabras codificadas* (para un estudio más detallado véanse, por ejemplo, [5, 9, 15]). Si $q = 2$, los códigos se llaman *códigos binarios*.

La *distancia de Hamming* entre dos vectores $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ de Σ_q^n se define como el número de posiciones en las que difieren dichos vectores y viene dada por:

$$d(x, y) = |\{i: 1 \leq i \leq n \text{ y } x_i \neq y_i\}|.$$

Dado un código \mathcal{C} , se define su *distancia mínima*, d , por la expresión

$$d = \min\{d(x, y): x, y \in \mathcal{C} \text{ y } x \neq y\}.$$

Si \mathcal{C} tiene k elementos, $|\mathcal{C}| = k$, el código \mathcal{C} suele llamarse un (n, k, d) -código. Los códigos con distancia mínima $d \geq 2$ pueden ser empleados para detectar $d - 1$ errores (*códigos detectores de errores*). Sea $d = 2e + 1 \geq 3$, entonces \mathcal{C} puede utilizarse para corregir errores (*código corrector de errores*), de modo que puede corregir $e = (d - 1)/2$ errores. Si $d = 2e \geq 4$, el código podrá corregir $e - 1 = (d - 2)/2$ errores. La capacidad de detectar y de corregir errores depende del valor de d y del algoritmo que se utilice. Así, un código con distancia $d = 5$, por ejemplo, puede utilizarse para detectar 4 errores, para corregir 2 errores, o para detectar 3 y corregir 1, etc.

Se define la *tasa de información* de un código \mathcal{C} como la razón entre la cantidad de información significativa de cada palabra y la longitud de cada palabra. Esta tasa puede determinarse mediante la expresión:

$$R = \log_q |\mathcal{C}|/n. \quad (1)$$

El concepto de tasa de información es natural en el sentido de que para codificar 4 palabras usando un alfabeto binario, bastaría con emplear las palabras 00, 01, 10 y 11; pero si se emplea un código de 4 palabras de longitud 3, entonces, por la expresión (1), su tasa de información sería $2/3$. Se llama *peso de Hamming* de un vector $x \in \Sigma_q^n$, y se representa por $w(x)$, al número de elementos no nulos que contiene, es decir, a la distancia de x al vector 0. Dado que la distancia entre dos vectores, x, y , es el número de posiciones en las que difieren, se tiene $d(x, y) = w(x - y)$. El *peso mínimo* de un código es el mínimo de los pesos de Hamming de las palabras no nulas de dicho código.

Los ejemplos más útiles de alfabetos son $\Sigma_q = \mathbb{Z}_q$ y, si q es la potencia de un número primo, el cuerpo $\Sigma_q = \mathbb{F}_q$ (recuérdese que \mathbb{Z}_q es un cuerpo si y sólo si q es primo). Un código \mathcal{C} es un *código lineal* sobre \mathbb{F}_q si es un subespacio vectorial de \mathbb{F}_q^n , y se dice que es un $[n, k]$ -código si dicho código tiene dimensión k . Si, además, su mínima distancia es d , entonces se llama un $[n, k, d]$ -código. Es claro que la tasa de información de un $[n, k, d]$ -código es $R = k/n$. Además como los códigos lineales son subespacios vectoriales, este peso mínimo coincide con la distancia mínima del código.

Para ilustrar las anteriores definiciones, en el Cuadro 1 se presentan dos ejemplos de códigos binarios.

\mathcal{C}_1 es un código binario de longitud 5 y se forma añadiendo un bit de paridad al final de cada una de las palabras de \mathbb{F}_2^4 ; es decir, al final de cada palabra se añade el bit 0 si la suma de sus bits es par, y el 1 en caso contrario. Claramente

Palabra	Código \mathcal{C}_1	Código \mathcal{C}_2
0000	00000	0000000
0001	00011	1010101
0010	00101	0110011
0011	00110	1100110
0100	01001	0001111
0101	01010	1011010
0110	01100	0111100
0111	01111	1101001
1000	10001	1111111
1001	10010	0101010
1010	10100	1001100
1011	10111	0011001
1100	11000	1110000
1101	11011	0100101
1110	11101	1000011
1111	11110	0010110

Cuadro 1: Ejemplos de dos códigos lineales binarios

este código puede detectar hasta un bit de error, pero no puede corregir errores dado que su distancia mínima es 2. \mathcal{C}_1 es un $[5, 4, 2]$ -código binario. Por su parte, el código \mathcal{C}_2 es de longitud 7 y distancia mínima 3. Dado que es un $[7, 4, 3]$ -código, es capaz de corregir hasta un bit de error.

Esta ganancia a la hora de corregir errores y no sólo de detectarlos tiene un precio. En este caso, según la expresión (1), la tasa de información de \mathcal{C}_2 es $4/7$; mientras que la tasa correspondiente a \mathcal{C}_1 es $4/5$. Como es de suponer, los códigos que atraen más atención son aquellos que poseen una alta tasa de información y proporcionan, además, una alta capacidad para corregir errores.

Los códigos de barras que se presentarán de forma detallada en este artículo son códigos detectores de errores puesto que en su elaboración se incluye un dígito de control que permite llevar a cabo tal detección; pero no permiten corregir errores y no son códigos lineales.

La combinación de dos códigos con distancia $d = 2$ permite obtener códigos con distancia mayor; por lo que pueden corregir errores. Es el caso del código binario del Servicio Postal americano utilizado para indicar el código postal en las cartas, llamado *código Postnet*. El hecho de que permita corregir errores se debe a que se puede determinar la posición en la que se ha producido el error. El código Postnet está formado por dos códigos de distancia $d = 2$: uno decimal de longitud 10 y otro binario de longitud 5 (que permite escribir cada dígito mediante barras). Este segundo código se muestra en el Cuadro 2, donde los ceros se representan por medio de barras cortas y los unos mediante barras largas. Ambos códigos se combinan para obtener un código binario de longitud 50 y distancia $d = 4$.

por un láser lineal, y basta con leer cualquier línea transversal al código, dado que todas ellas son iguales. No obstante, existen diferentes formas de llevar a cabo esta codificación. En general, la elección de un determinado tipo de código de barras depende de la aplicación para la que se desee utilizar.

Los códigos de barras suelen tener dos representaciones: una determinada cantidad de dígitos o caracteres en su parte inferior (no siempre presente) y una parte gráfica formada por unas barras verticales de diferente grosor y separadas por unos espacios paralelos. Los códigos codifican determinado *juego de caracteres*, es decir, un conjunto específico de letras, números y símbolos. Todo código de barras posee unos elementos característicos. Así, los *separadores de inicio y de fin* de cada código son combinaciones específicas de barras y espacios que indican al lector óptico dónde empieza y dónde termina el código a leer. Los códigos se llaman *bidireccionales* si pueden ser leídos tanto de derecha a izquierda como de izquierda a derecha. A continuación se presentan los códigos de barras lineales más utilizados en la actualidad, así como una breve descripción de cada uno de ellos (para más detalles ver [2, 3, 16]).

El *Código 39* (Código 3 de 9) es un código de longitud variable, adecuado para codificar datos alfanuméricos de carácter general. Cada carácter se representa mediante cinco barras y cuatro espacios, con sólo dos anchuras posibles: gruesa y fina (ver Figura 1(a)). El *Código 2 de 5* (Intercalado 2 de 5, ITF ó I-2/5) es un sistema de codificación (véase la Figura 1(b)) de propósito general para datos numéricos.

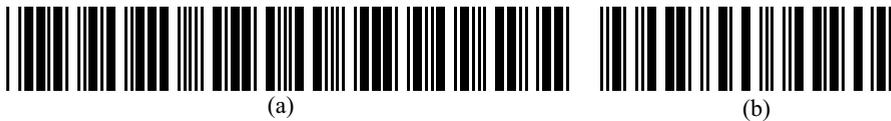


Figura 1: Ejemplos de Código 39 y Código 2 de 5

Codabar es un código para la codificación de números que incluye algunos caracteres especiales (ver Figura 2(a)). Dispone de 4 separadores de inicio/fin, que pueden llevar información adicional. El *Código 128*, más condensado que el Código 39, permite codificar 128 caracteres ASCII (se pueden utilizar diferentes juegos de caracteres para codificar caracteres extendidos que no pertenezcan al inglés). Cada carácter se representa mediante 3 barras y 3 espacios, que pueden tener cuatro anchuras diferentes (ver Figura 2(b)).

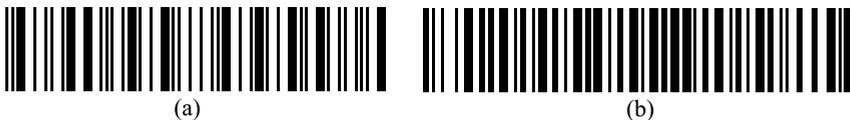


Figura 2: Ejemplos de Codabar y de Código 128

Existen otros códigos, como el *Código 93* que ofrece una densidad de información alfanumérica mayor que la que ofrecen los Códigos 39 y 128, incluyendo el código ASCII completo. Por su parte, el *Código de canal* es una familia de símbolos de barras unidimensionales diseñada para codificar cadenas de entre 2 y 7 dígitos con la menor longitud de símbolo posible.

Hay muchas aplicaciones en las que no se pueden emplear los códigos de barras presentados hasta ahora. Es el caso, por ejemplo, de la codificación que precise de los 256 caracteres ASCII de forma simultánea. Por este motivo se ha desarrollado la denominada *simbología 93i*, que codifica bytes y permite, por tanto, codificar todos los caracteres pertenecientes al código ASCII completo. La simbología 93i ([2]) extiende la del Código 39, incorpora los 65536 caracteres Unicode, su longitud es variable y utiliza 2 caracteres para comprobar los símbolos ó 6 códigos Reed-Solomon correctores de errores ([15]).

Dado que en ocasiones se requiere que el código de barras no supere determinada superficie, se ha desarrollado otra simbología que permite llevar a cabo este objetivo y se conoce como *Simbología para reducir espacio* o RSS (Reduced Space Symbology). Esta simbología consta de tres familias diferentes: *RSS-14*, *RSS Limitada* y *RSS Expandida*, que pueden ser utilizadas por el sistema EAN.UCC (European Article Numbering [7] y Uniform Code Council [17], respectivamente). Existe otra versión de esta simbología, conocida como *RSS-14 Apilada*, que corta un RSS-14 demasiado ancho y lo apila en dos filas.

4 El código de barras EAN13

Sin duda, el código de barras más extendido en el mundo es el llamado *EAN13* (existe una versión reducida y menos utilizada llamada *EAN8*). Este código data de 1977 y es para Europa el análogo al código UPC de Estados Unidos (Universal Product Code, [17]) o al código JAN de Japón (Japanese Article Number [13]). El EAN13 es una extensión del UPC, por lo que ha heredado algunas de sus características y arbitrariedades, como se mencionará más adelante. El nombre del código, EAN, procede de las iniciales de European Article Numbering ([7]), mientras que el 13 hace referencia al número de dígitos que van impresos en la parte inferior del código, de los que las barras son su representación gráfica. Como ya se mencionó, el EAN13 es *no significativo*, es decir, no proporciona ninguna información adicional que no esté contenida en los 13 dígitos que lo acompañan.

4.1 Determinación de los dígitos

Los 13 dígitos del código EAN13, c_1, \dots, c_{13} , se calculan como sigue:

1. *Código del país*: Son los dos primeros dígitos (algunos países utilizan 3), c_1 y c_2 , y son asignados por la organización nacional del sistema EAN a la que se ha adscrito la empresa que elabora el producto (ver [1]). Por ejemplo, los dos dígitos para España son 84, para el Reino Unido, 50, mientras que Alemania usa del 400 al 440.

2. *Código de la empresa*: Los siguientes 5 u 8 dígitos, c_3, \dots, c_{10} , se reservan para las diferentes empresas registradas en cada país.
3. *Código del producto*: Son los dígitos que restan hasta 12 (entre 2 y 5), c_8, \dots, c_{12} , y están a disposición del propietario de la marca.
4. *Dígito de control*: El último dígito, c_{13} , se calcula a partir de los 12 dígitos anteriores y permite decidir si el código de barras se ha leído correctamente. Su expresión simplificada es:

$$c_{13} = - \sum_{j=1}^6 (c_{2j-1} + 3c_{2j}) \pmod{10}. \quad (2)$$

Una vez que los 13 dígitos han sido determinados, cada uno de ellos es representado mediante una colección de barras y espacios verticales, y todo ello constituye el código EAN13.

4.2 Fundamentos matemáticos

Antes de proceder a la determinación de las barras y espacios del código, se justificarán las razones matemáticas de la elección del dígito de control dado en la expresión (2).

En general, el cálculo de un dígito de control, a_n , para una colección de $n-1$ dígitos dados: a_1, \dots, a_{n-1} , se lleva a cabo de manera que una operación sobre todos los dígitos de identificación: a_1, \dots, a_{n-1}, a_n , permita decidir si el código ha sido leído correctamente. Para ello se considera el conjunto de los enteros módulo k , \mathbb{Z}_k , y n aplicaciones $\sigma_i: \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_k$, y se supone que el código se ha leído correctamente si y sólo si se verifica la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i(a_i) \equiv 0 \pmod{k}.$$

(Nótese que la elección del 0 en la congruencia anterior es arbitraria, es decir, no hay ninguna razón que impida elegir cualquier otro entero de \mathbb{Z}_k). La secuencia $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ se denomina *esquema de control de dígitos*. Normalmente, las aplicaciones σ_i se definen por $\sigma_i(a_i) = \omega_i \cdot a_i$, con $\omega_i \in \mathbb{Z}_k$. Un *error de un único dígito* (ED para abreviar), es decir, confundir el dígito a_i con a'_i ; es detectable si y sólo si se verifica que $\sigma_i(a_i) \not\equiv \sigma_i(a'_i) \pmod{k}$. Por otra parte, un *error de transposición* (ET para abreviar), esto es, intercambiar el dígito a_i por el a_j ; es detectable si y sólo si $\sigma_i(a_i) + \sigma_j(a_j) \not\equiv \sigma_i(a_j) + \sigma_j(a_i) \pmod{k}$. En el caso en que se considere $k > 10$, se deben introducir caracteres extra que sustituyan a los valores $10, \dots, k-1$. El principal resultado sobre la detección de errores se basa en el siguiente

Teorema 1 *Si los números de identificación a_1, \dots, a_n , verifican*

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot a_i \equiv 0 \pmod{k}, \quad (3)$$

entonces, un error de un único dígito es indetectable si y sólo si $\omega_i (a_i - a'_i) \equiv 0 \pmod k$; mientras que un error de transposición que intercambia los elementos de las posiciones i y j es indetectable si y sólo si $(\omega_i - \omega_j) (a_i - a_j) \equiv 0 \pmod k$.

La demostración de este Teorema es inmediata, basta tener en cuenta que cuando se comete un ED, la diferencia entre el valor correcto (esto es, cuando se utiliza a_i) para la expresión (3) y el valor incorrecto (cuando se emplea a'_i) es precisamente $\omega_i (a_i - a'_i)$. Por otra parte, la diferencia entre el valor correcto y el incorrecto para (3) cuando se lleva a cabo un ET es $(\omega_i - \omega_j) (a_i - a_j)$.

A partir del Teorema 1 si un dígito de control, a_n , verifica la condición (3) (en realidad esta condición puede ser contrastada si se consideran varios dígitos de control y no sólo uno), entonces, es inmediato determinar las condiciones de los pesos w_i de cada a_i , de modo que se pueda asegurar qué errores son detectables (ver Cuadro 3). Nótese que las unidades de \mathbb{Z}_k son los elementos $z \in \mathbb{Z}_k$ tales que $\text{mcd}(z, k) = 1$.

Error	Forma	Condición sobre el módulo k
ED	$a_i \rightarrow a'_i$	$\text{mcd}(w_i, k) = 1$
ET 1	$a_i \dots a_j \rightarrow a_j \dots a_i$	$\text{mcd}(w_j - w_i, k) = 1$
ET 2	$a_{i-1} a_i a_{i+1} \rightarrow a_{i+1} a_i a_{i-1}$	$\text{mcd}(w_{i+1} - w_{i-1}, k) = 1$
Gemelos 1	$\begin{matrix} a & a & \rightarrow & b & b \\ & i+1 & & i+1 \end{matrix}$	$\text{mcd}(w_i + w_{i+1}, k) = 1$
Fonética	$a_i 0 \leftrightarrow 1 a_i$	$j w_{i+1} \not\equiv (j-1) w_i \pmod k, 0 \leq j \leq k-1$
Gemelos 2	$\begin{matrix} a & c & a & \rightarrow & b & c & b \\ & i-1 & i+1 & & i-1 & i+1 \end{matrix}$	$\text{mcd}(w_{i-1} + w_{i+1}, k) = 1$

Cuadro 3: Condiciones del módulo k sobre diferentes errores

Si por ejemplo, $k = 10$ y los w_j son impares, y por tanto $w_i - w_j$ es par, las condiciones presentadas en la última columna del Cuadro 3 son incompatibles, es decir, no pueden verificarse todas simultáneamente. Así pues, no se pueden detectar, en el 100% de los casos, los errores mencionados anteriormente para el caso $k = 10$. De forma más general se verifica el siguiente

Teorema 2 *Si un esquema de detección de errores con un módulo par detecta los errores de un único dígito, entonces para cualesquiera i y j , existe un error de transposición que afecta a las posiciones i y j , que no puede ser detectado.*

También en este caso la demostración es inmediata puesto que si el esquema detecta todos los errores de tipo ED, entonces las aplicaciones σ_i son permutaciones de \mathbb{Z}_{2m} . Además, para detectar todos los errores ET que involucran a las posiciones i y j , es necesario que $\sigma_i(a) + \sigma_j(b) \neq \sigma_i(b) + \sigma_j(a)$, para todos los $a \neq b \in \mathbb{Z}_{2m}$. De donde se tiene que $\sigma(z) = \sigma_i(z) - \sigma_j(z)$ es una permutación de \mathbb{Z}_{2m} . Sumando los elementos de \mathbb{Z}_{2m} , módulo $2m$, se tiene que

$$m = m + 0 + 1 + (2m - 1) + 2 + (2m - 2) + \dots + (m - 1) + (m - 1),$$

y además

$$m = \sum z = \sum \sigma(z) = \sum \sigma_i(z) - \sum \sigma_j(z) = m - m = 0,$$

lo que es una contradicción.

De lo dicho anteriormente se puede afirmar que el dígito de control, c_{13} , dado por (2) para el código EAN13 está bien definido puesto que verifica

$$\sum_{j=0}^6 c_{2j+1} + 3 \sum_{j=1}^6 c_{2j} \equiv 0 \pmod{10}. \quad (4)$$

Nótese que para el EAN13, $w_j = 1$ si j es impar y $w_j = 3$ si j es par. El hecho de asignar diferentes pesos a las posiciones pares e impares hace que se puedan detectar (ver Teorema 1 y Cuadro 3) el 100% de los errores de un único dígito dado que $\text{mcd}(w_j, 10) = 1$, aunque no se puedan corregir. Además, no detecta la totalidad de los errores de transposición, tal y como se desprende del Teorema 2. En efecto, si se transponen los dígitos a_i y a_j , con i y j de diferente paridad, se tiene que la diferencia de las sumas dadas por (4) para cada uno de los dos casos es $(3a_i + a_j) - (3a_j + a_i) = 2(a_i - a_j)$, y el error es indetectable si $|a_i - a_j| = 5$.

Por ejemplo, si se tienen los 13 dígitos siguientes para un código EAN13: 8412345678905, es inmediato comprobar que tal código es correcto. En efecto, basta con verificar que se cumple la congruencia dada en (4):

$$(8 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 5) + 3(4 + 2 + 4 + 6 + 8 + 0) \pmod{10} = 110 \pmod{10} \equiv 0.$$

Ahora bien, si en lugar de considerar el código anterior, se ha cometido un ED al considerar el código 8412395678905, se puede detectar que éste es erróneo puesto que se tiene

$$(8 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 5) + 3(4 + 2 + 9 + 6 + 8 + 0) \pmod{10} \equiv 5 \pmod{10},$$

pero no hay forma de saber dónde se cometió el error, y éste no puede corregirse. El código original podría haber sido 3412395678905 ó 8412895678905, etc.

Por otra parte, si se ha producido un ET entre las posiciones sexta y décimo primera y los 13 dígitos considerados fueran 8412395678405, éste código se daría por correcto, a pesar de haberse producido un error, dado que también se verifica que

$$(8 + 1 + 3 + 5 + 7 + 4 + 5) + 3(4 + 2 + 9 + 6 + 8 + 0) \pmod{10} \equiv 0 \pmod{10}.$$

Para determinar el porcentaje de errores de transposición de dos dígitos consecutivos que son detectados por el EAN13, basta tener en cuenta que de los 90 posibles ET de esta forma, todos se pueden detectar salvo que se tengan los siguientes pares de dígitos consecutivos: 05, 16, 27, 38, 49 y sus inversos, es decir, se puede detectar el $80/90 = 89,89\%$ de estos errores. Razonando de forma análoga se obtiene el mismo valor para todos los ET.

Sin embargo, si los pesos dados a las posiciones fueran $w_j = 1$ si j es impar y $w_j = 2$ si j es par, éste esquema detectaría el 100% de los ET, dado que en este caso si se transponen, por ejemplo, los dígitos consecutivos a y b , se tiene que el error sólo es indetectable si $(2a + b) - (2b + a) = a - b \equiv 0 \pmod{10}$ (ver [11] para esquemas con tres pesos diferentes). Sin embargo, en este caso no se detectarían todos los ED.

4.3 Determinación de las barras y espacios

Para determinar el código de barras bajo el que se escribirán los 13 dígitos de que consta, se utiliza el *módulo* como unidad básica de representación y corresponde a la mínima anchura que puede tener una barra ($\langle 1 \rangle$) o un espacio ($\langle 0 \rangle$). De esta forma la codificación $\langle 000 \rangle$ hace referencia a un espacio de módulo 3, mientras que la codificación $\langle 11 \rangle$ se refiere a una barra de módulo 2. Además, cada código tiene siempre tres separadores (ver Figura 3), que son los mismos para todos los códigos EAN13, y que indican dónde comienza el código (*separador izquierdo* o de inicio), dónde termina (*separador derecho* o de fin) y cuál es su centro (*separador central*). Los separadores derecho e izquierdo son siempre $\langle 101 \rangle$ mientras que el separador central es $\langle 01010 \rangle$. Estos valores permiten al escáner que lee las barras determinar la anchura utilizada por cada módulo del código, lo que posibilita que un mismo escáner sea capaz de leer códigos de barras de diferentes tamaños. Las barras de dichos separadores son ligeramente más largas que las restantes del código.

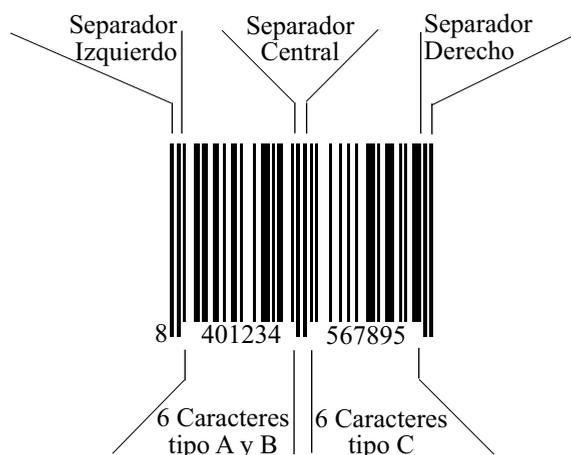


Figura 3: Descripción de las partes de un código EAN13

El primer dígito de los 13 del EAN13 se coloca en la parte exterior izquierda del código, es decir, antes del separador izquierdo y no se representa gráficamente, aunque influye en la representación gráfica de los dígitos que ocupan las posiciones #2 a #7, como se verá posteriormente. Los restantes 12 dígitos se separan en dos grupos de 6 dígitos cada uno, de modo que el primer grupo se coloca y codifica entre el separador izquierdo y el central; mientras que el segundo grupo queda situado entre el separador central y el derecho.

La representación gráfica de cada dígito está formada por dos barras y dos espacios y ocupa siempre 7 módulos, es decir, cada carácter está codificado por un vector binario de longitud 7 y peso de Hamming variable —el número de 1's que contiene—. Así, el vector $\langle 0111001 \rangle$ correspondería a un espacio de módulo

1, una barra de módulo 3, un espacio de módulo 2 y una barra de módulo 1. La codificación anterior también podría haberse llevado a cabo mediante los cuatro dígitos que indican los módulos de cada espacio y barra: 1321.

El número total de módulos de un código EAN13 es, por tanto, de $2 \cdot 3 + 12 \cdot 7 + 5 = 95$, si bien se acostumbra a dejar zonas mudas alrededor del mismo para facilitar su lectura por el escáner. Por otra parte, como la anchura estándar de cada módulo es de $0,33 \text{ mm.}$ y su altura estándar de $22,85 \text{ mm.}$, resulta que el tamaño estándar para un código de este tipo, incluidas las zonas mudas, es de $37,29 \times 26,26 \text{ mm.}$ (se permite un escalado entre 0,8 y 2 veces el valor estándar anterior).

Las representaciones gráficas de los 6 primeros dígitos siempre empiezan por un espacio (es decir, por uno o varios 0's) y terminan por una barra (esto es, por uno o varios 1's); mientras que para el segundo grupo es al revés: empiezan por una barra y terminan por un espacio. Nótese que esta distribución es compatible con la codificación de los separadores izquierdo, derecho y central. El primer grupo utiliza dos patrones diferentes (tipos *A* y *B*) para codificar cada dígito, mientras que el segundo grupo utiliza un tercer patrón (tipo *C*). La codificación del primer grupo (posiciones #2 a #7) se hace utilizando el Cuadro 4, según el valor del primer dígito del código. Por esta razón no es necesario representar el primer dígito del código mediante barras, sin que se pierda por ello la información que el mismo proporciona.

Primer dígito	#2	#3	#4	#5	#6	#7
0	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
1	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
2	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
3	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
4	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
5	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
6	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
7	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
8	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
9	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>

Cuadro 4: Patrones de codificación para las posiciones #2 a #7

Así por ejemplo, si el primer dígito es 3, los dígitos de las posiciones #2, #3 y #7 se codifican según el patrón *A*, mientras que los de las posiciones #4, #5 y #6 utilizan el patrón *B*. Finalmente, es necesario conocer cómo se codifica cada dígito para cada uno de los patrones. Esta codificación se presenta en el Cuadro 5, de modo que las dos barras (*b*) y los dos espacios (*e*) de cada patrón están caracterizados como sigue:

- Patrón *A*. Su secuencia es *ebeb* y los vectores binarios de este tipo son de longitud 7 y peso impar, esto es, 3 ó 5.

- Patrón *B*. Su secuencia es *ebeb* y los vectores binarios pertenecientes a este tipo son de longitud 7 y peso par, es decir, 2 ó 4.
- Patrón *C*. Su secuencia es *bebe* y sus vectores binarios son de longitud 7 y peso par: 2 ó 4 (al ser su paridad diferente de la de *A*, que es el patrón con el que siempre empieza el código, éste puede leerse bidireccionalmente).

Dígito	Patrón <i>A</i>	Patrón <i>B</i>	Patrón <i>C</i>
0	3211 → ⟨0001101⟩	1123 → ⟨0100111⟩	3211 → ⟨1110010⟩
1	2221 → ⟨0011001⟩	1222 → ⟨0110011⟩	2221 → ⟨1100110⟩
2	2122 → ⟨0010011⟩	2212 → ⟨0011011⟩	2122 → ⟨1101100⟩
3	1411 → ⟨0111101⟩	1141 → ⟨0100001⟩	1411 → ⟨1000010⟩
4	1132 → ⟨0100011⟩	2311 → ⟨0011101⟩	1132 → ⟨1011100⟩
5	1231 → ⟨0110001⟩	1321 → ⟨0111001⟩	1231 → ⟨1001110⟩
6	1114 → ⟨0101111⟩	4111 → ⟨0000101⟩	1114 → ⟨1010000⟩
7	1312 → ⟨0111011⟩	2131 → ⟨0010001⟩	1312 → ⟨1000100⟩
8	1213 → ⟨0110111⟩	3121 → ⟨0001001⟩	1212 → ⟨1001000⟩
9	3112 → ⟨0001011⟩	2113 → ⟨0010111⟩	3112 → ⟨1110100⟩

Cuadro 5: Asignación de los patrones de codificación

Es claro que si se elige otra codificación diferente a la presentada en los Cuadros 4 y 5, es decir, otra reordenación en los patrones para cada dígito inicial, o las asignaciones a dígitos dentro de cada patrón de codificación, se obtendrán diferentes códigos de barras. En este caso no se estaría utilizando el estándar EAN13, sino otra codificación diferente.

4.4 EAN13 y códigos binarios

Después de lo mencionado acerca de la representación mediante espacios y barras (alternados) los dígitos 0–9 en un código EAN13, parece necesario dar una justificación matemática a dicho proceso, aunque el inventor del código UPC, precursor del EAN13, no se basara en conceptos matemáticos.

En primer lugar, es claro que la representación de cada dígito necesita, al menos, de 2 espacios y 2 barras, puesto que como el final de la representación de un dígito debe servir para marcar el inicio de la representación del dígito siguiente, no pueden emplearse 2 espacios y 1 barra (o viceversa). Por tanto, el código binario a emplear debe ser de longitud mayor o igual que 4.

Por otra parte, se ha de garantizar, también, que cada dígito pueda ser codificado de dos maneras diferentes: una para el patrón *A* (vectores de peso impar) y otra para el *B* (vectores de peso par), por lo que hace falta un mínimo de 20 codewords. Además, todas las representaciones de los dígitos deben empezar por ⟨0⟩ (espacio) y terminar por ⟨1⟩ (barra). Dado que sólo existen $2^4 = 16$, codewords de longitud 6 de la forma

$$\langle 0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ 1 \rangle, \quad x_i \in \mathbb{F}_2,$$

es necesario utilizar codewords de longitud, al menos, 7. Supongamos entonces que los codewords son de longitud 7 y que de los $2^7 = 128$ posibles codewords sólo se consideran los $2^5 = 32$ de la forma preestablecida, es decir,

$$\langle 0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ 1 \rangle, \quad x_i \in \mathbb{F}_2.$$

De estos 32 codewords se deben eliminar todos aquellos para los que no haya exactamente 3 cambios de la forma 01 ó 10, dado que los 2 espacios y las 2 barras de que consta cada representación (*ebeb*) deben estar alternados. Una vez eliminados los que no verifican esta condición, quedan los siguientes posibles codewords:

$$\begin{array}{lllll} 0000101, & 0001001, & 0001011, & 0001101, & 0010001, \\ 0010011, & 0010111, & 0011001, & 0011011, & 0011101, \\ 0100001, & 0100011, & 0100111, & 0101111, & 0110001, \\ 0110011, & 0110111, & 0111001, & 0111011, & 0111101. \end{array}$$

Como se puede observar, la mitad de los codewords anteriores son de peso impar (3 ó 5) y la otra mitad son de peso par (2 ó 4), por lo que dicha división puede utilizarse como criterio para separar los dos patrones y obtener dos códigos binarios de longitud 7, diferentes:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_A &= \{0001101, 0011001, 0010011, 0111101, 0100011, \\ &\quad 0110001, 0101111, 0111011, 0110111, 0001011\}, \\ \mathcal{C}_B &= \{0100111, 0110011, 0011011, 0100001, 0011101, \\ &\quad 0111001, 0000101, 0010001, 0001001, 0010111\}. \end{aligned}$$

La ordenación de los codewords (que corresponde a la presentada en el Cuadro 5) es la misma que la empleada en el código UPC americano, inventado en 1973 por George J. Laurer —4 años antes que el EAN13—, quien, en comunicación personal, nos ha asegurado que la ordenación del patrón *A* (y por tanto la asignación de los dígitos 0–9 para el primer grupo de 6 caracteres) la llevó a cabo de forma completamente arbitraria (lo mismo que la ordenación de los patrones *A* y *B* del Cuadro 4). Por otra parte, la ordenación del patrón *B* la tomó, de alguna manera, como imagen especular del patrón *A*. A partir de las asignaciones mencionadas, la correspondiente al patrón *C* es inmediata de modo que permita decidir al escáner si la lectura del código se lleva a cabo de derecha a izquierda o al revés.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_C &= \{1110010, 1100110, 1101100, 1000010, 1011100, \\ &\quad 1001110, 1010000, 1000100, 1001000, 1110100\}. \end{aligned}$$

Así pues, los códigos \mathcal{C}_A , \mathcal{C}_B y \mathcal{C}_C son códigos binarios de longitud 7 y distancia mínima 2, es decir son (7, 10, 2)-códigos, pero no son códigos lineales, dado que no son subespacios vectoriales de \mathbb{F}_2^7 . Su tasa de información es:

$$R = \frac{\log_2 10}{7} = 0,475.$$

El hecho de añadir barras al código EAN13 para representar dígitos, dota a este de cierta capacidad para corregir errores, de manera análoga a como lo hace el código Postnet, ya comentado, aunque esta posibilidad no se utiliza habitualmente. Por ejemplo, si se pierde un dígito del código o es leído erróneamente —ya sea porque hay manchas o roturas o porque la paridad no es la adecuada—, el error es detectado porque el EAN13 puede detectar un error al ser su distancia mínima $d = 2$. Además, se puede saber la posición del error a partir de la lectura de las barras. Conocida ésta, el dígito puede ser recuperado sin más que utilizar la expresión (4). Por otra parte, si el error se comete en la lectura del primer dígito, que no está representado mediante barras, también puede ser corregido debido a la paridad de los 6 dígitos siguientes: basta con observar la asignación de los patrones del Cuadro 4.

4.5 Ejemplo de código

Para determinar el código EAN13 de un producto ficticio se calculan los 13 dígitos de que consta y se determina el código de barras correspondiente.

Si la empresa utiliza el sistema EAN de la organización AECOC (Asociación Española de Codificación Comercial [1]) de España, los dos primeros dígitos serán 84, es decir, $c_1 = 8$, $c_2 = 4$. Si la AECOC ha asignado a esta empresa los dígitos 765432, éstos serán los siguientes, es decir, $c_3 = 7$, $c_4 = 6$, $c_5 = 5$, $c_6 = 4$, $c_7 = 3$ y $c_8 = 2$. Si 0209 son los 4 dígitos que el propietario de la marca asigna al artículo ficticio, entonces $c_9 = 0$, $c_{10} = 2$, $c_{11} = 0$ y $c_{12} = 9$. Según esto, los dígitos para el código de barras son: 847654320209 c_{13} . Para calcular el dígito de control se procede como se indica en la expresión (2):

$$c_{13} = -(23 + 3 \cdot 27) \pmod{10} = -104 \pmod{10} = 6.$$

Por lo que los dígitos para el código de barras son: 8476543202096.

A continuación, se determinará la forma en que los dígitos calculados se representan mediante barras y espacios verticales para dar lugar al código de barras EAN13.

Como el primer dígito del código es 8, la secuencia de los patrones A y B es A, B, A, B, B, A (ver Cuadro 4). Dado que los 6 primeros dígitos son 476543, su codificación, según el Cuadro 5, es la siguiente:

$$\begin{aligned} 4 &\rightarrow \langle 0100011 \rangle, & 7 &\rightarrow \langle 0010001 \rangle, & 6 &\rightarrow \langle 0101111 \rangle, \\ 5 &\rightarrow \langle 0111001 \rangle, & 4 &\rightarrow \langle 0011101 \rangle, & 3 &\rightarrow \langle 0111101 \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Procediendo de forma análoga para el segundo grupo de 6 dígitos, para los que se utiliza el patrón C , se obtiene su codificación:

$$2 \rightarrow \langle 1101100 \rangle, \quad 0 \rightarrow \langle 1110010 \rangle, \quad 9 \rightarrow \langle 1110100 \rangle, \quad 6 \rightarrow \langle 1010000 \rangle. \quad (6)$$

Finalmente, la representación del código de barras EAN13 para el artículo que se está considerando es la que se muestra en la Figura 4. Dicha figura se ha elaborado colocando en primer lugar el separador izquierdo $\langle 101 \rangle$, a continuación

los vectores binarios del primer grupo presentado en (5), luego el separador central $\langle 01010 \rangle$, a continuación los vectores binarios del segundo grupo mostrado en (6), y finalmente, el separador derecho $\langle 101 \rangle$.

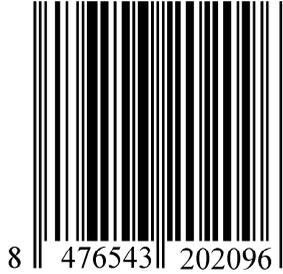


Figura 4: Ejemplo de Código EAN13

Con relación a la posibilidad de corregir errores del EAN13, si en el código anterior se hubiera perdido el primer dígito, observando que los pesos de los 6 dígitos siguientes son; 3, 2, 5, 4, 4, 5, se deduce que el orden de los patrones es: A, B, A, B, B, A , por lo que a partir del Cuadro 4 se tiene que dicho dígito es 8 y el error se habría corregido. Por otra parte, si, por ejemplo, el dígito que ocupa la sexta posición (el 4), no pudiera leerse o fuera leído como $\langle 0111101 \rangle$, se tendría que, o bien no se conoce su valor o se sabría que es erróneo puesto que su peso es impar, cuando debería ser par. En cualquiera de los dos casos su valor real se podría conocer sin más que utilizar la expresión (4). En efecto, si se denota por x al valor desconocido o erróneo, se tendría que

$$(8 + 7 + 5 + 3 + 0 + 0 + 6) + 3(4 + 6 + x + 2 + 2 + 9) \equiv 0 \pmod{10},$$

es decir,

$$\begin{aligned} 3x &\equiv -29 - 69 \pmod{10} \equiv -98 \pmod{10} = 2, \\ x &\equiv 2 \cdot 3^{-1} \pmod{10} \equiv 2 \cdot 7 \pmod{10} = 4. \end{aligned}$$

4.6 EAN13 y las particiones de 7

Para concluir esta sección se presentará otra explicación a la señalada anteriormente para la elaboración de las barras y espacios que forman parte de un código EAN13, que tiene como base las particiones de un entero.

Dado que cada dígito del EAN13 ocupa un módulo de 7 unidades —suma de las anchuras de 2 barras y 2 espacios—, el problema consiste en escribir el número 7 como suma de 4 dígitos de diferentes formas. La descomposición de un número entero como suma de dígitos se conoce como *particiones de un entero*, y es un tema ampliamente estudiado en Combinatoria (ver, por ejemplo, [4, Capítulo 5.3] y [6, Capítulo 2.7]). En particular, las particiones de 7 como suma

de dígitos son las siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 7 & = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 & = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \\
 & = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 & = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 \\
 & = 1 + 2 + 2 + 2 & = 1 + 1 + 2 + 3 \\
 & = 1 + 1 + 1 + 4 & = 1 + 3 + 3 \\
 & = 1 + 2 + 4 & = 1 + 1 + 5 \\
 & = 2 + 2 + 3 & = 3 + 4 \\
 & = 2 + 5 & = 1 + 6.
 \end{array}$$

De todas ellas, sólo son interesantes para el EAN13 las que contienen exactamente 4 dígitos: (1, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 3) y (1, 1, 1, 4). Por otra parte, dado que el orden de colocación de las barras y espacios hace que el código sea visualmente diferente, se deben considerar todas las formas de escribir los tres grupos de cuatro dígitos anteriores, es decir, sus permutaciones:

$$\begin{array}{llllll}
 [1, 2, 2, 2], & [2, 1, 2, 2], & [2, 2, 1, 2], & [2, 2, 2, 1], & & \\
 [1, 1, 2, 3], & [1, 1, 3, 2], & [1, 2, 1, 3], & [1, 2, 3, 1], & [1, 3, 1, 2], & [1, 3, 2, 1], \\
 [2, 1, 1, 3], & [2, 1, 3, 1], & [2, 3, 1, 1], & [3, 1, 1, 2], & [3, 1, 2, 1], & [3, 2, 1, 1], \\
 [1, 1, 1, 4], & [1, 1, 4, 1], & [1, 4, 1, 1], & [4, 1, 1, 1]. & &
 \end{array}$$

Se observa que la mitad de las 20 permutaciones obtenidas son simétricas respecto de las restantes. Por ejemplo, si se consideran los 10 grupos:

$$\begin{array}{llllll}
 [2, 1, 2, 2], & [2, 2, 2, 1], & [1, 1, 3, 2], & [1, 2, 1, 3], & [1, 2, 3, 1], \\
 [1, 3, 1, 2], & [3, 1, 1, 2], & [3, 2, 1, 1], & [1, 1, 1, 4], & [1, 4, 1, 1], &
 \end{array} \quad (7)$$

los restantes 10 son su simétricos. Por tanto, se puede considerar como patrón *A* al determinado por la codificación de las 10 permutaciones dadas en (7), y como patrón *B* a las restantes 10 permutaciones. Además, como el patrón *A* comienza por barra y termina por espacio, se puede utilizar el mismo conjunto de permutaciones para el patrón *C*, dado que éste empieza por espacio y concluye con barra. Así pues, asignando una permutación de las dadas en (7) a cada uno de los 10 dígitos, se llega a la codificación de cada patrón dada en el Cuadro 5.

Nótese que si las 10 permutaciones que definen el patrón *A* o si su orden fuera diferente del mostrado en el Cuadro 5, se obtendrían códigos de barras diferentes para una misma cadena de dígitos y, consecuentemente, no pertenecerían al estándar EAN13.

5 Los códigos ISBN y EAN13

Como es sabido, el código ISBN (International Standar Book Number, [12]) es un sistema internacional de numeración e identificación de libros surgido en 1965, y aunque no sea un código de barras propiamente dicho, se incluye en este artículo porque es posible elaborar un código EAN13 para cada código ISBN, de modo que pueda ser tratado informáticamente.

El código ISBN contiene 10 dígitos divididos en cuatro grupos por tres guiones. Dado que las posiciones de los guiones son irrelevantes para el código, se hará caso omiso de las mismas. El último dígito es el de control (la letra X si su valor es 10) y se calcula mediante la siguiente expresión:

$$b_{10} = - \sum_{i=1}^9 p_i \cdot b_i \pmod{11}, \quad (8)$$

donde $p_i = 11 - i$ es el peso de cada posición. La verificación de la lectura del código se lleva a cabo de forma análoga a como se hizo con el código EAN13, es decir, se comprueba si se verifica la siguiente congruencia:

$$\sum_{i=1}^{10} p_i \cdot b_i = 10b_1 + 9b_2 + \dots + 2b_9 + b_{10} \equiv 0 \pmod{11}. \quad (9)$$

Es fácil probar que el código ISBN detecta el 100% de los ED's. En efecto, si al cambiar el dígito b_i por b'_i el error no fuera detectable, los valores de las dos sumas de comprobación dadas por (9) serían múltiplos de 11, por lo que también lo sería su diferencia: $(11-i)(b_i - b'_i)$, lo cual es imposible puesto que 11 es primo y $|b_i - b'_i| < 11$. Este código también detecta el 100% de los ET's. En efecto, razonando como antes, la diferencia de las sumas dadas por (9) sería múltiplo de 11, pero esta diferencia es $(p_i b_i + p_j b_j) - (p_j b_i + p_i b_j) = (j - i)(b_i - b_j)$, que tampoco puede ser múltiplo de 11. De forma similar se puede probar que es capaz de detectar el 100% de los errores Gemelos 2 dados en el Cuadro 3, aunque no detecta todos los errores Gemelos 1 ni Fonéticos. Así pues, desde el punto de vista de la detección de errores, puede afirmarse que el código ISBN es preferible al EAN13 (véase [8] para un estudio sobre la detección de errores dobles en ISBN). Para esta mejora es básico que se utilice el número 11, que es primo, y, por tanto, \mathbb{Z}_{11} es un cuerpo.

Para determinar el código de barras EAN13 a partir de un código ISBN dado $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 b_{10}$, basta con calcular los 13 dígitos que le corresponden en formato EAN13. En primer lugar se eliminan los guiones y el dígito de control: $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9$. A continuación se añaden los dígitos 978 al inicio del código ISBN de modo que $c_1 = 9$, $c_2 = 7$, $c_3 = 8$, $c_i = b_{i-3}$, para $4 \leq i \leq 12$. Finalmente se determina el dígito de control como se señaló en (2):

$$c_{13} = - \sum_{j=1}^6 (c_{2j-1} + 3c_{2j}) \pmod{10} = - \left(8 + \sum_{j=2}^4 b_{2j} + 3 \sum_{j=1}^5 b_{2j-1} \right) \pmod{10}.$$

Si, por ejemplo, el código ISBN fuera 84-7897-421-0, bastará con escribir 978847897421 y calcular su dígito de control según (2) o (5):

$$c_{13} = -(8 + 21 + 3 \cdot 29) \pmod{10} = -116 \pmod{10} = 4.$$

Por lo que su código de barras EAN13 sería: 9788478974214.

Recíprocamente, para convertir un código EAN13, $987c_4, \dots, c_{13}$, en formato ISBN, se eliminan los tres primeros dígitos, 978, y el dígito de control, c_{13} ; y a continuación se determina el dígito de control ISBN según la expresión (8).

Como ejemplo, se puede tomar como código EAN13 el calculado anteriormente: 9788478974214, y proceder como se ha indicado: se eliminan los tres primeros dígitos y el último: 847897421, y se calcula el dígito de comprobación según la expresión (8):

$$-(80 + 36 + 56 + 56 + 54 + 35 + 16 + 6 + 2) \pmod{11} = -341 \pmod{11} = 0.$$

Con lo que el código ISBN es: 8478974210.

Hay otro código basado en la aritmética módulo 11, al igual que el ISBN, que sí puede detectar el 100 % de los errores señalados en el Cuadro 3; aunque no otros errores, como errores dobles de transposición o de dos dígitos. Es el código utilizado por Bancos y Cajas de Ahorros en los números de las cuentas bancarias. El código asigna pesos geométricos con base 2 a las posiciones de los dígitos, en lugar de pesos aritméticos:

$$(2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}) \pmod{11} = (2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1).$$

Las cuentas bancarias se identifican por 20 dígitos: los 4 primeros corresponden a la entidad bancaria, b_1, b_2, b_3, b_4 ; los 4 siguientes a la sucursal, s_1, s_2, s_3, s_4 ; el noveno dígito, c_1 , es el de control de los 8 primeros; mientras que el décimo, c_2 , es el de control de los 10 últimos, d_1, d_2, \dots, d_{10} , que constituyen el número de la cuenta. Los valores de c_1 y c_2 se determinan como sigue:

$$c_1 \equiv -(4b_1 + 8b_2 + 5b_3 + 10b_4 + 9s_1 + 7s_2 + 3s_3 + 6s_4) \pmod{11},$$

$$c_2 \equiv -(d_1 + 2d_2 + 4d_3 + 8d_4 + 5d_5 + 10d_6 + 9d_7 + 7d_8 + 3d_9 + 6d_{10}) \pmod{11}.$$

Sin embargo, si el dígito de control es 10, en lugar de cambiarlo por la letra X, se sustituye por el número 1, lo que supone una ambigüedad y, por tanto, disminuye la capacidad de este código para detectar errores.

Existen otros esquemas basados en la aritmética modular que, sorprendentemente, son bastante utilizados a pesar de que ni siquiera son capaces de detectar el 100 % de los errores de un único dígito. Son sistemas que utilizan los 10 dígitos en su código, pero hacen módulo 7 ó 9 para determinar el dígito de control. Es el caso de los cheques del Servicio Postal de Estados Unidos, los cheques de viaje de American Express, los servicios de mensajería de Federal Express y United Parcel Service, o los billetes de las compañías aéreas. Por ejemplo, el dígito de control de los cheques de viaje de American Express se determina de modo que sumado a los anteriores sea divisible por 9. Esto significa que un ED que involucre a los números 0 y 9 no será detectado. Por su parte, cuando se hace módulo 7 la efectividad para detectar ED's es ligeramente menor dado que no se detectan errores en los que intervengan los pares 0, 7; 1, 8 y 0, 9; aunque aumente la efectividad para detectar los ET's, que en ningún caso llega al 100 %.

Agradecimientos. Los autores agradecen al evaluador anónimo sus sugerencias para la mejora en la versión final de este artículo.

Referencias

- [1] Asociación Española de Codificación Comercial (AECOC). <http://www.aecoc.es/>
- [2] Association for Automatic Identification and Data Capture Technologies (AIM Global Network). <http://www.aimglobal.org/sitemap/>
- [3] American National Standard Institute (ANSI). <http://www.ansi.org/>
- [4] C. Chuan Chong and K. Khee Meng. *Principles and techniques in combinatorics*. World Scientific, Singapore, 1992.
- [5] G.C. Clark, Jr. and J.B. Cain. *Error-correction coding for digital communications*. Plenum Press, New York, 1981.
- [6] G.M. Constantine. *Combinatorial theory and statistical design*. John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [7] European Article Numbering (EAN). <http://www.ean-int.org/index800.html>
- [8] L. Egghe and R. Rousseau. *The detection of double errors in ISBN- and ISSN-like codes*. Math. Comput. Modelling 33:943–955, 2001.
- [9] D. Hankerson, D.R. Hoffman, D.A. Leonard, C.C. Lindner, K.T. Phelps, C.A. Rodger and J.R. Wall. *Coding theory and cryptography, The essentials*. Marcel Dekker, Pure and Applied Mathematics, 234, 2nd edition, 2000.
- [10] A. Fúster Sabater, D. de la Guía Martínez, L. Hernández Encinas, F. Montoya Vitini y J. Muñoz Masqué. *Técnicas criptográficas de protección de datos*. RA-MA, Madrid, 2ª edición, 2000.
- [11] J.A. Gallian. *Error detecting methods*. ACM Computing Surveys 28(3):504–517, September 1996.
- [12] The International ISBN Agency. <http://www.isbn-international.org/>
- [13] Japanese Article Number (JAN). <http://www.n-barcode.com/shurui-en/jan.html>
- [14] A. Menezes, P. van Oorschot, and S. Vanstone. *Handbook of applied cryptography*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.
- [15] W.W. Peterson and E.J. Weldon, Jr. *Error-correcting codes*. The MIT Press, Cambridge, 2nd edition, 1972.
- [16] L. Steen (Ed.). *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley Iberoamericana España, S.A., Madrid, 3ª edición, 1999.
- [17] Uniform Code Council (UCC). <http://www.uc-council.org/>

“Los Niños de los Trópicos”: qué son, sus modelos y su predicción

J. MACÍAS

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Málaga

`macias@anamat.cie.uma.es`

Resumen

El objetivo de estas líneas será, en primer lugar, el de intentar explicar de manera sencilla en qué consiste el fenómeno natural de “El Niño”. Este es siempre el paso previo, necesario e ineludible en la tarea de modelado matemático y la simulación numérica: la comprensión del fenómeno que se desea estudiar. Una vez que se conocen los mecanismos clave que rigen la evolución del fenómeno natural se tratará de elegir la herramienta matemática más adecuada para su simulación: de entre la multitud de modelos matemáticos a nuestra disposición parece que los modelos acoplados de océano-atmósfera son los candidatos idóneos para abordar con éxito esta tarea. Debido al tono esencialmente divulgativo de este texto, no entraremos en los detalles más técnicos ni del modelo matemático que se presenta ni sobre su resolución numérica, tampoco abordaremos el análisis de los resultados, cuestión esta última de gran interés práctico.

Una vez conozcamos algo más acerca del fenómeno natural que queremos estudiar y predecir con esa herramienta matemática que son los modelos, pasaremos a describir de forma breve y sólo muy superficial en qué consiste uno de esos modelos acoplados de océano-atmósfera que hoy en día se utilizan de manera rutinaria para el estudio y simulación de “El Niño”. En la actualidad contamos, además de con los resultados de los modelos, con unas observaciones de las condiciones atmosféricas y oceánicas en el Océano Pacífico Tropical en tiempo real de una calidad sin precedentes. En nuestro repaso haremos también referencia a ellas. Será obligatorio concluir mostrando cuáles son las predicciones acerca de la evolución, en los próximos meses, del sistema acoplado océano-atmósfera proporcionada por alguno de estos modelos de “El Niño”.

Fecha de recepción: 8 de julio de 2003

Palabras clave: ENSO, fenómeno “El Niño”, modelos acoplados de océano-atmósfera, simulación numérica, Oceanografía.

Clasificación por materias AMS: 86-01, 86A05, 76B99, 35Q35,65Z05.

1 “Los Niños de los Trópicos”

En primer lugar nos gustaría realizar un breve recorrido histórico acerca del conocimiento que el hombre ha tenido sobre el fenómeno “El Niño” a través de los siglos: cuándo se le prestó atención por primera vez y cómo ha evolucionado el concepto que de él hemos tenido. Para ello volveremos nuestra mirada al pasado y comenzaremos por hacer un poco de historia... Debemos situarnos inicialmente en las costas del norte de Perú donde sus gentes y pescadores conocen desde hace muchos siglos la existencia de un fenómeno característico de las aguas que bañan sus costas (*Philander, 1990*). Esta región tropical pero a su vez de aguas relativamente frías, acoge una de las zonas pesqueras más productivas del mundo y con una población de aves muy importante. Todos los años, al inicio de la primavera, una corriente cálida, que fluye hacia el sur, modifica las aguas frías elevando su temperatura. Ocurre que, cada cierto tiempo, este aumento de la temperatura comienza antes (en diciembre), es mucho más importante y puede durar entre uno y dos años. Cuando esto ocurre, caen lluvias torrenciales en regiones (normalmente áridas) de esta parte de Sudamérica: “el desierto se convierte en un jardín”¹. Por ello, a estos años, se les llamó *años de abundancia*. Sin embargo, esta misma corriente también impide el afloramiento (upwelling) de las aguas más profundas, frías y ricas en nutrientes, que son cruciales para el desarrollo de la vida marina en esta región. Esto tiene unas consecuencias desastrosas en la fauna marina, que queda prácticamente esquilada, en la población de distintas especies de aves y a su vez en la economía local basada fundamentalmente en la pesca y en la recolección de guano.

Este fenómeno fue bautizado con el nombre de “**El Niño**” por las gentes del lugar, debido a su usual ocurrencia a finales de diciembre. En un tiempo se pensó que este fenómeno afectaba solamente a una estrecha franja costera de Perú, más tarde se extendió su influencia a todo el Océano Pacífico, relacionando su aparición con un aumento de la temperatura oceánica a gran escala en la mayor parte del Océano Pacífico tropical. En la actualidad se reconocen sus repercusiones, y las del fenómeno opuesto, “**La Niña**” (temperaturas anormalmente frías de la superficie del mar), en las condiciones climáticas de todo el planeta.

El Niño está normalmente acompañado de un cambio a escala global en la circulación atmosférica conocido como **la Oscilación Austral** (Southern Oscillation, según la terminología anglosajona). Ambos fenómenos de manera conjunta, El Niño y la Oscilación Austral, son conocidos bajo las siglas de **ENSO** (El Niño/Southern Oscillation²) y constituyen unas de las mayores

¹Mr. S.M. Scott de Florencia en 1925 describiendo las condiciones observadas en Perú en 1891.

²No se trata de una errata, el término anglosajón es, en efecto, El Niño/Southern

fuentes de variabilidad interanual en el tiempo atmosférico y en el clima de la Tierra. Desde que *Bjerknes* en 1969 revelara que la componente oceánica y atmosférica del ENSO podían estar estrechamente ligadas, los científicos han avanzado de manera sustancial hacia un conocimiento más profundo del fenómeno ENSO. La comunidad climática ha comenzado a dar los primeros pasos hacia una predicción de los inicios de estos episodios climáticos con unos meses de antelación. Sin embargo, queda aún todavía mucho por comprender sobre estos “Niños de los Trópicos”.

2 El océano y la atmósfera en armonía

“El Niño” es, como veremos, un fenómeno de naturaleza acoplada. Con este adjetivo queremos significar que es el resultado de la interacción (acoplamiento) entre la componente oceánica y la componente atmosférica del sistema global océano-atmósfera. Para la comunidad científica las siglas de ENSO denotan este fenómeno acoplado en su conjunto. En estas siglas la EN (“El Niño”) hacen referencia a la componente oceánica del fenómeno y la SO (“Southern Oscillation”) a la componente atmosférica. En principio cada una de estas siglas (EN y SO) denotan los fenómenos (oceánicos y atmosféricos, respectivamente) que tienen lugar en el complejo sistema acoplado que las siglas ENSO quieren describir pero, por razones obvias a nivel mediático, el gran público no ha oído nunca hablar del ENSO y sí, sin embargo, de “El Niño”; es por ello que “El Niño” ha acabado por ser el término que se utiliza para referirnos al ENSO en su conjunto: “El Niño” ha pasado a serlo todo. Pasaremos a continuación a describir los mecanismos que tienen lugar en cada una de las componentes del sistema océano-atmósfera y comprobaremos efectivamente la naturaleza acoplada del ENSO a la que acabamos de hacer referencia.

2.1 La componente oceánica: “El Niño”, algo más que una corriente costera

¿Qué es “El Niño”? ¿qué relación tiene con la corriente de “El Niño” de la que hemos hablado?, ¿cómo se produce?, ¿cuáles son sus efectos?, ¿es posible su predicción? Podemos plantearnos éstas y muchas otras cuestiones acerca de este fenómeno natural. Intentaremos aquí dar respuesta a algunas de ellas.

En primer lugar veremos cuál ha sido la evolución que con el tiempo ha experimentado el uso que del término “El Niño” hemos hecho. Para ello, como ya indicábamos, debemos remontarnos a varios siglos atrás y situarnos en las costas del norte del Perú donde las gentes del lugar conocían de la existencia de la corriente de “El Niño”, una corriente de agua cálida que fluye de norte a sur, en sentido contrario a la usual corriente fría del sur (corriente de Humboldt). Por tanto “El Niño” es, inicialmente, el nombre que los habitantes de esta región del Perú le dieron a esta corriente costera. Este concepto de “El Niño” se encuentra muy lejos del significado actual del término. ¿Por qué? ¿cuál es, pues, la relación

Oscillation (ENSO).

entre esta corriente y el fenómeno climatológico de gran escala que el término describe hoy en día?

En 1891, el **Dr. Luís Carranza**, Presidente de la Sociedad Oceanográfica de Lima, fue uno de los primeros científicos que prestó una cierta atención a la existencia de esta contra-corriente, que había sido observada entre los puertos de Paita y Pacasmayo, en un pequeño artículo que publicó en el Boletín de esta Sociedad. Cuatro años más tarde, en 1895, **Federico Alonso Pezet**, dirigiéndose a los asistentes al Sexto Congreso Internacional de Geografía que tuvo lugar en Lima en 1895, señaló la concurrencia de esta corriente con lluvias en regiones muy áridas, donde las precipitaciones son realmente escasas, y consideró que este fenómeno (la corriente de “El Niño”) era de una gran importancia e influencia en **esta parte del mundo**:

“Deseo, en esta ocasión, llamar la atención de los distinguidos geógrafos aquí reunidos hacia este fenómeno, (la corriente de “El Niño”) el cual ejerce, indudablemente, una influencia muy grande sobre las condiciones climáticas de esta parte del mundo”.

“*Esta parte del mundo*” es un árido desierto bañado por un océano de frías aguas y rebosante en recursos pesqueros y otras formas de vida marina.

Ésta era la visión que de “El Niño” teníamos a finales del siglo XIX, pero como veremos se trataba de una visión parcial y extremadamente localizada del fenómeno. Ocurre que, cada cierto tiempo, esta corriente es más intensa de lo normal, penetra más al sur, es excepcionalmente cálida y va acompañada de lluvias realmente intensas. Cuando esto ocurre, caen lluvias torrenciales en esta parte de Sudamérica. La vegetación prolifera en regiones normalmente áridas, la vida animal y vegetal surge en lo que antes era un inhóspito desierto. Es por ello que, a estos años, se les llamó *años de abundancia*. Esta descripción choca de nuevo con el concepto que en la actualidad tenemos de “El Niño”, asociado a desastres naturales. ¿Cuál es la razón para esta aparente contradicción? De nuevo la explicación se encuentra en que las condiciones hasta ahora descritas y observadas son sólo una parte de las condiciones y repercusiones climáticas de esta “corriente costera”. Lo que sucede es que, en tales ocasiones, durante estos “años de abundancia” la fauna marina, usualmente abundante en esta región costera, desaparece temporalmente³, junto a las poblaciones de diversas especies de aves que se sustentan de ella. Observamos aquí los primeros efectos negativos de “El Niño” . . .

Continuando con nuestro recorrido histórico sobre el conocimiento y comprensión de “El Niño”, no fue hasta los **años 60** cuando los oceanógrafos observaron que estas temperaturas anormalmente cálidas del agua de la superficie del mar en las costas del Perú durante los “años de abundancia” se extendían miles de kilómetros mar adentro y de que no representaba otra cosa que un aspecto más de unas condiciones inusuales en las aguas de

³Como ya hemos indicado, esta corriente cálida impide el afloramiento (upwelling) de las aguas más profundas, frías y ricas en nutrientes, y que son cruciales para el desarrollo de la vida marina en esta región.

superficie **en todo el Océano Pacífico tropical**. El **Profesor Wyrski** proporcionó, mediante sus investigaciones, una de las primeras indicaciones de que la aparición interanual⁴ de aguas superficiales excepcionalmente cálidas en las costas peruanas era una consecuencia de cambios en la circulación en toda la cuenca oceánica como respuesta a los cambios en los vientos de superficie que mueven las capas superiores del océano. Por tanto, para explicar “El Niño”, es necesario saber cómo el océano se ajusta a cambios en los vientos superficiales. Por otra parte, debemos tener en cuenta, como ya fue señalado por **Sir James Lighthill** en 1960, que el tiempo necesario para que el océano se ajuste a cambios en los vientos decrece con la latitud. “El Niño” es, por tanto, un ejemplo de esta respuesta rápida de las condiciones oceánicas a las variaciones atmosféricas⁵.

Así pues, la pregunta que debemos plantearnos ahora es, ya que “El Niño” es un fenómeno interanual producido por cambios en los vientos de superficie a lo largo de todo el Océano Pacífico Tropical, ¿qué es lo que causa las variaciones interanuales en los vientos que son responsables de “El Niño”? Es, por tanto, el momento de dirigir nuestra mirada hacia arriba, hacia la otra componente del sistema océano-atmósfera (hacia la SO de las siglas ENSO).

2.2 La componente atmosférica: La Oscilación Austral

A lo largo de este último siglo se han realizado numerosos esfuerzos para describir las variaciones interanuales en los vientos a las que acabamos de hacer referencia y para documentar a su vez las variaciones interanuales en la circulación de la atmósfera tropical y global. Como precursor en estas investigaciones tenemos a **Sir Gilbert Walker** (serie de trabajos entre 1923-37). En sus estudios sobre la predictibilidad de los monzones, Sir Gilbert identificó una oscilación de gran escala en la presión a nivel del mar, que denominó la Oscilación Austral. Otros patrones persistentes de altas y bajas presiones habían sido ya observados con anterioridad en el norte de los Océanos Pacífico y Atlántico de aquí el calificativo de “Austral” para esta oscilación.

La señal más clara de la Oscilación Austral es la relación inversa que existe entre las anomalías superficiales de presión en Darwin, Australia, y Papeete, en la isla Tahití en el Pacífico meridional. Como puede observarse en la **Figura 1** la existencia de altas presiones en una de estas localizaciones está fuertemente correlacionada con la presencia de bajas presiones en la otra, y viceversa. El patrón de altas y bajas presiones (veáse la **Figura 2**) se invierte cada cierto tiempo (años) y representa una onda estacionaria, una masa de aire que oscila de un lado al otro del Pacífico a través de la línea internacional del cambio de fecha (180°E) en las zonas tropicales y subtropicales. Esto reforzó la visión de Walker de los monzones como parte de un fenómeno global y se propuso documentar

⁴El término interanual hace referencia a un fenómeno que no ocurre todos los años, al contrario de las estaciones, sino que sucede con una menor frecuencia, cada cierto número de años.

⁵No olvidemos que “El Niño”, entendido como la componente oceánica del fenómeno, tiene lugar en el Océano Pacífico Tropical, es decir, en bajas latitudes.

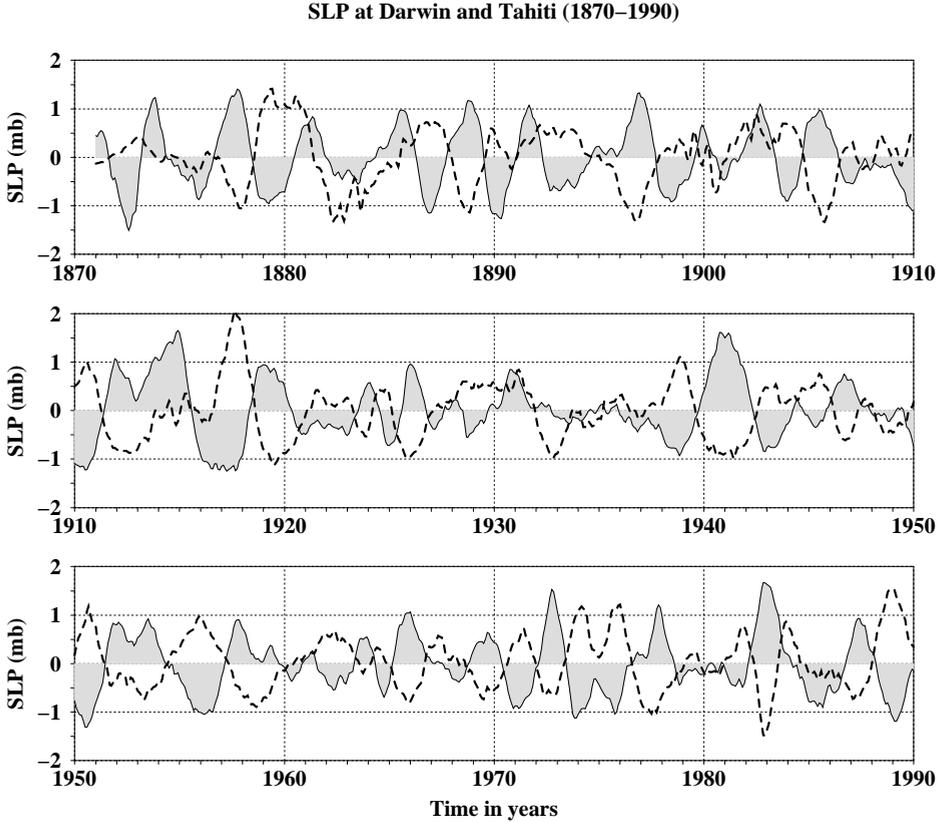


Figura 1: Series temporales de las anomalías de presión superficial en Darwin, Australia (línea continua) y en Tahití (discontinua) desde 1871 hasta 1990.

todo su alcance con la esperanza de que esto le proporcionaría la clave para las predicciones de los monzones. Para ello trató de estudiar las correlaciones entre esta oscilación y muchas otras magnitudes. Sin embargo, los datos de temperatura de superficie del mar (**TSM**) de los que disponía Walker eran inadecuados para determinar si el océano estaba involucrado en la Oscilación Austral.

Un mejor conjunto de observaciones y un “acto” de la naturaleza que coincidió con los dos últimos años de la vida de Walker (1957-59) puso a los científicos en el camino que relacionaba la Oscilación Austral con las variaciones oceanográficas en el Océano Pacífico Tropical. En 1957 y 1958 tanto las condiciones atmosféricas como las condiciones oceanográficas fueron fuertemente anómalas. Las costas del Perú experimentaron un año de abundancia excepcionalmente fuerte (el más intenso desde 1941-42). Se observó como las aguas superficiales excepcionalmente cálidas no quedaban confinadas en la costa de Sudamérica, sino que se extendían hacia el oeste hasta

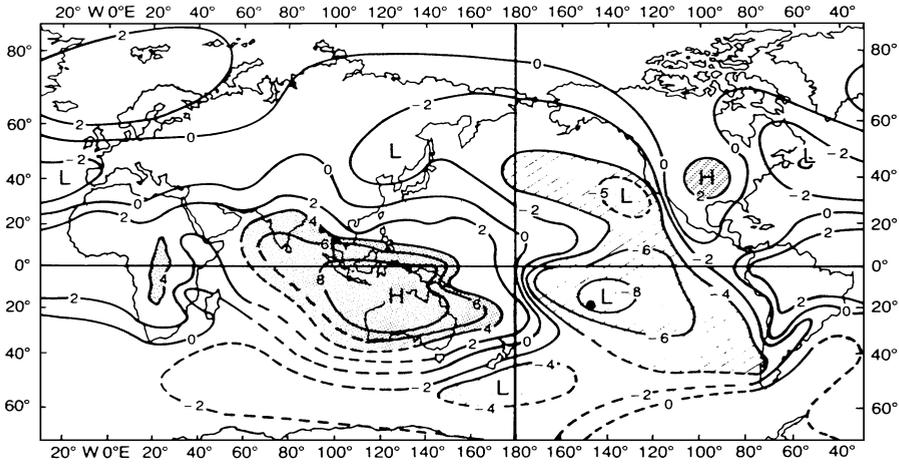


Figura 2: Patrón característico de presiones de superficie representado por la Oscilación Austral, con altas presiones sobre Australia e Indonesia y bajas presiones sobre el Pacífico central y oriental. Más concretamente esta figura, extraída de *Philander (1990)*, representa las correlaciones ($\times 10$) de la presión media a nivel del mar con la presión en Darwin (Australia).

la línea de cambio de fecha. Este fenómeno coincidió con vientos alisios débiles y fuertes lluvias en la parte central del Pacífico ecuatorial, una región normalmente árida. Walker y otros investigadores ya habían previamente documentado una relación entre vientos débiles y fuertes lluvias en esta región, pero la relación con unas TSM inusualmente elevadas no había sido puesta en evidencia con anterioridad.

El **Prof. Bjerknes** propuso que esta coincidencia en el tiempo de las condiciones oceanográficas y meteorológicas anómalas no era exclusiva de aquel año 1957-58: no era una casualidad, sino que ocurría de manera interanual (cada cierto número de años). Bjerknes estaba en lo cierto y en 1969 propuso una relación física entre las variaciones oceanográficas y meteorológicas interanuales en el Pacífico Tropical. Bjerknes explicó cómo el aire seco desciende sobre las aguas frías del Pacífico Tropical Oriental y fluye hacia el oeste como parte de los vientos alisios (ver **Figura 3** para seguir la descripción del proceso). El aire va aumentando su temperatura y humedad progresivamente en su camino hacia el oeste al moverse sobre aguas cada vez más cálidas, hasta que alcanza la parte occidental del Pacífico Tropical donde el aire está ya lo suficientemente cálido y húmedo como para elevarse, produciendo lluvias en esta parte del Pacífico. Para cerrar el ciclo el aire debe fluir de vuelta hacia el este en la alta troposfera. Bjerknes introdujo el término de **circulación de Walker**, en honor de Sir Gilbert, para describir este movimiento ecuatorial de las masas de aire.

La hipótesis planteada por Bjerknes sugiere un mecanismo mediante el cual

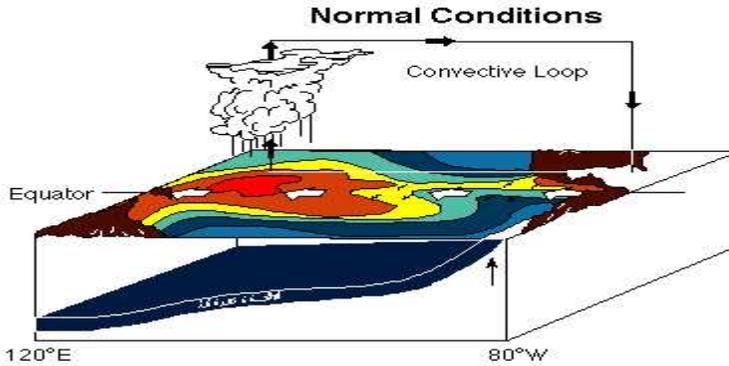


Figura 3: Esquema de las condiciones “normales” en el océano y la atmósfera.

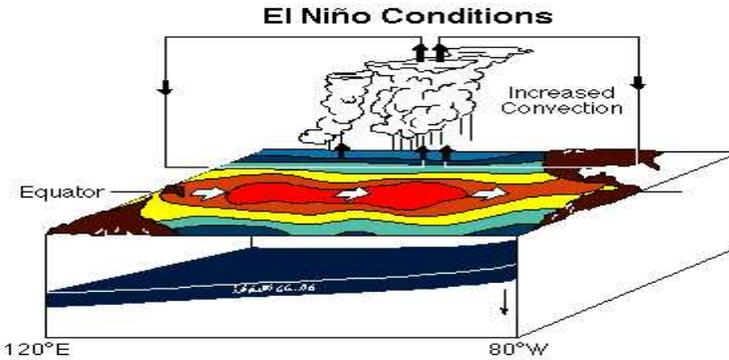


Figura 4: Esquema de las condiciones “El Niño” en el océano y la atmósfera.

los gradientes de TSM (es decir, las diferencias de temperaturas con aguas frías en las costas peruanas y las aguas cálidas en la parte occidental del Pacífico Tropical) son necesarios para mantener los gradientes de presión atmosférica (altas presiones en la parte oriental y bajas presiones en la parte occidental del Océano Pacífico Tropical) que son por su parte los que producen la circulación de Walker. Un calentamiento de las aguas en el Pacífico oriental reduce el gradiente de temperatura y debilita, por tanto, la circulación de Walker, haciendo que la zona convectiva de lluvias intensas se mueva hacia el este desde el Pacífico Occidental hacia el Pacífico central, hasta el Pacífico Oriental. En otras palabras, la Oscilación Austral es producida por las variaciones interanuales de las TSM.

Vemos pues, como las variaciones interanuales de las TSM producen la Oscilación Austral pero, desde un punto de vista oceanográfico, los cambios de las TSM se producen por las fluctuaciones de los vientos asociados a la Oscilación Austral. A partir de este argumento circular Bjerknes dedujo que las

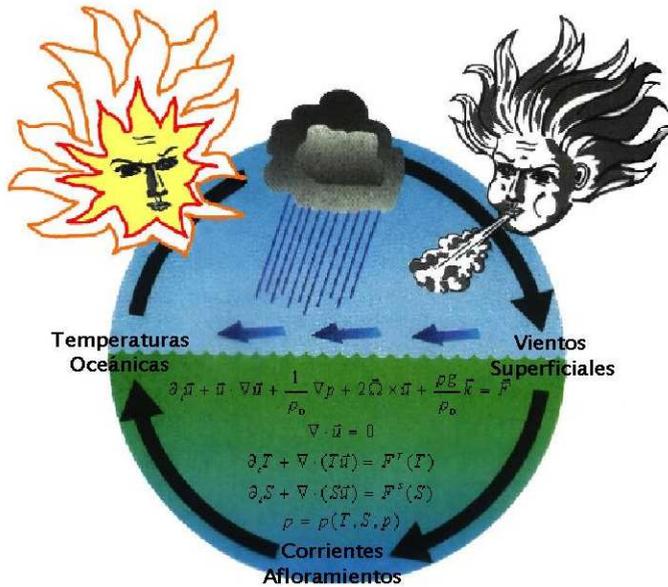


Figura 5: Esquema de las interacciones entre el sistema acoplado océano-atmósfera.

interacciones entre el océano y la atmósfera eran la clave de la Oscilación Austral. Nos debe quedar por tanto ya claro el carácter **acoplado** del fenómeno, que esquematizamos en la **Figura 5**.

La persistencia en los vientos alisios de levante es el ingrediente básico en el fenómeno ENSO. Estos vientos tienen dos efectos fundamentales: (i) empujar las aguas superficiales hacia el Pacífico occidental (la elevación de la superficie del mar en las islas Filipinas es normalmente de unos 60 cm más alta que la superficie del mar en la costa meridional de Panamá) y (ii) permiten que el agua que fluye hacia el oeste permanezca cerca de la superficie y que así se caliente y eleve su temperatura. Esto hace que la zona a donde se dirigen estas aguas –la parte occidental del Pacífico ecuatorial– sea la región oceánica con las aguas superficiales más cálidas de nuestro planeta. Usualmente por encima de los 28°C, partes de esta “piscina de agua caliente” (del inglés **“warm pool”**) se encuentran, a veces, a una temperatura de hasta 31,5°C. La acumulación de estas aguas cálidas en el Pacífico occidental tiende a hundir la termoclina (zona de un fuerte gradiente de temperatura, que separa las aguas más cálidas de superficie de las aguas frías más profundas). Normalmente esta separación se encuentra localizada a unos 40 metros de profundidad en el Pacífico oriental y varía entre los 100 y 200 metros en el oeste (véase la **Figura 6**).

El máximo de calor superficial que se produce en los alrededores de Indonesia y otras islas del Océano Pacífico occidental produce frecuentes tormentas

y lluvias muy intensas. Estas lluvias se ven ayudadas por el movimiento ascendente producido por la circulación de Walker. La distribución de la temperatura de la superficie del mar es la responsable del aumento de las lluvias y de una circulación de Walker más intensa, y esta última a su vez conlleva unos vientos alisios más fuertes. Son estos vientos los que, por su parte, producen las corrientes oceánicas que son responsables de la distribución de la TSM. La atmósfera mueve al océano y el océano influye en la atmósfera en un verdadero modo de comportamiento acoplado.

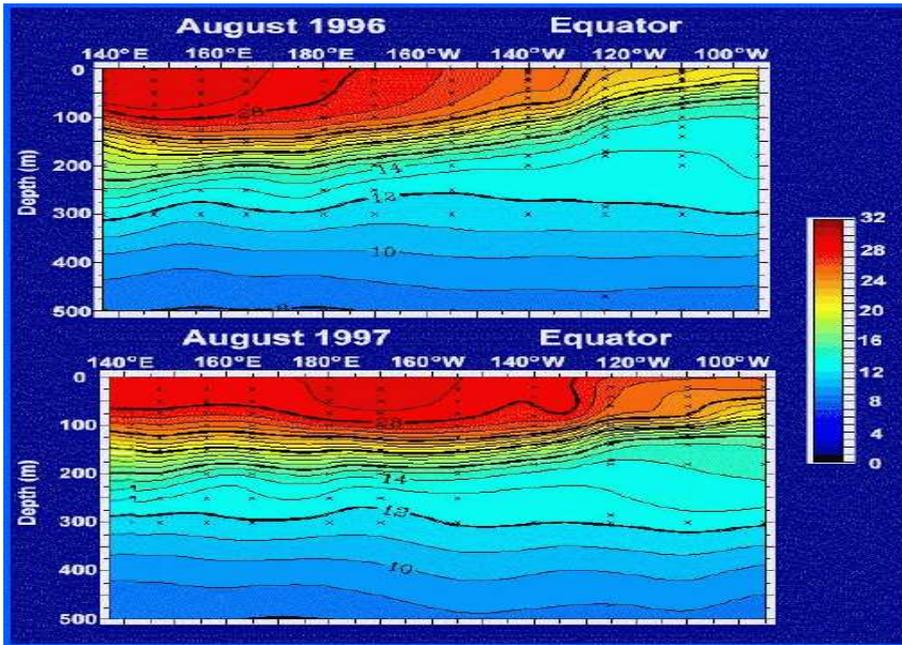


Figura 6: Secciones transversales a lo largo del Ecuador de la temperatura del agua en el Océano Pacífico (en °C). Arriba en agosto de 1996 donde se observa claramente la inclinación de la termoclina que separa las aguas cálidas de las aguas frías más profundas. Esta disposición es característica de unas condiciones “normales”. Abajo se presentan las condiciones un año más tarde, en agosto de 1997, donde se aprecia una termoclina mucho más horizontal debido al debilitamiento de los vientos alisios, típico de un evento cálido “El Niño”.

2.3 El concepto actual de “El Niño”

En la actualidad, el término “El Niño” describe los inusuales “años de abundancia” y los cambios asociados en la circulación atmosférica global. El término “El Niño”, como ya avanzamos, ha pasado a describir “todo”, las condiciones oceánicas anómalas en el Océano Pacífico tropical junto con las

condiciones atmosféricas anómalas en la atmósfera global. “El Niño” es pues la fase de la Oscilación Austral cuando los vientos alisios son débiles y cuando la presión es baja sobre la parte este del Océano Pacífico Tropical y alta sobre el oeste.

Pero no sólo nuestro uso del término “El Niño” ha cambiado, sino también nuestra visión de “El Niño” se ha transformado en peyorativa. “El Niño” se asocia en la actualidad principalmente con desastres ecológicos y económicos que coinciden con sequías devastadoras sobre la parte occidental del Pacífico Tropical, y con patrones climáticos anómalos (inusuales) sobre diversas partes del planeta.

Los episodios “El Niño” están separados por periodos generalmente benignos, donde las condiciones oceánicas y atmosféricas son opuestas a aquellas de “El Niño”. El término “La Niña” es apropiado para nombrar esta fase de la Oscilación Austral cuando las TSM son anormalmente bajas en el Pacífico central y oriental y cuando los alisios son muy intensos. A pesar del carácter, generalmente más benigno de “Las Niñas”, en los últimos años (recordemos los efectos de “La Niña” de 1999) esta bondad se ha puesto también en duda.

3 “La Anatomía de Los Niños”

La presión a nivel del mar en Darwin puede utilizarse como índice de la Oscilación Austral y, por extensión, como guía indicadora de los mayores eventos ENSO del pasado. En la **Figura 1** la curva sombreada muestra las anomalías de presión en Darwin a lo largo de los últimos 120 años, suavizadas para eliminar los efectos de pequeña escala. Las anomalías positivas corresponden a los eventos cálidos y las anomalías negativas a los eventos fríos. Obsérvese que :

- Los episodios “El Niño” y “La Niña” tienden a alternarse cada, aproximadamente, dos años. Sin embargo, el tiempo que transcurre entre un evento y el siguiente puede variar bastante (entre 1 y 10 años).
- La fuerza de los eventos, deducida de la diferencia de presión entre estas dos localizaciones varía de manera sustancial de unos eventos a otros. “El Niño” más importante de la serie temporal que se muestra parece tener lugar en 1982-83. Se ha conjeturado que sus efectos incluyeron tormentas torrenciales en todo el sudoeste de los Estados Unidos y la peor de las sequías de este siglo en Australia.
- A veces las condiciones “El Niño” y “La Niña” no están separados por condiciones de signo opuesto, sino que lo están por condiciones que podríamos calificar como de esencialmente “normales”.

Los datos recogidos en la **Figura 1** y otras observaciones, como las medidas de la TSM promediadas en ciertas regiones del Pacífico Tropical como las que se muestran en la **Figura 7** revelan que el fenómeno ENSO es un fenómeno relativamente periódico aunque presenta una gran variabilidad. A veces las aguas cálidas generadas por uno de estos Niños fluyen a través de todo el

Pacífico. Así “El Niño” de 1982-83 aumentó la temperatura de la superficie del mar cerca de las costas peruanas hasta en unos 4°C. Durante “El Niño” de 1986-87, de mucha menor amplitud, las aguas cálidas fluyeron hacia el este pero solamente alcanzaron la mitad del Pacífico (hasta las proximidades de los 170°W) y elevaron allí la temperatura un modesto grado centígrado, aproximadamente. En otros casos, las anomalías de temperatura puede incluso aparecer primero cerca de las costas de Perú para luego progresar hasta encontrar la preexistente “warm pool”.

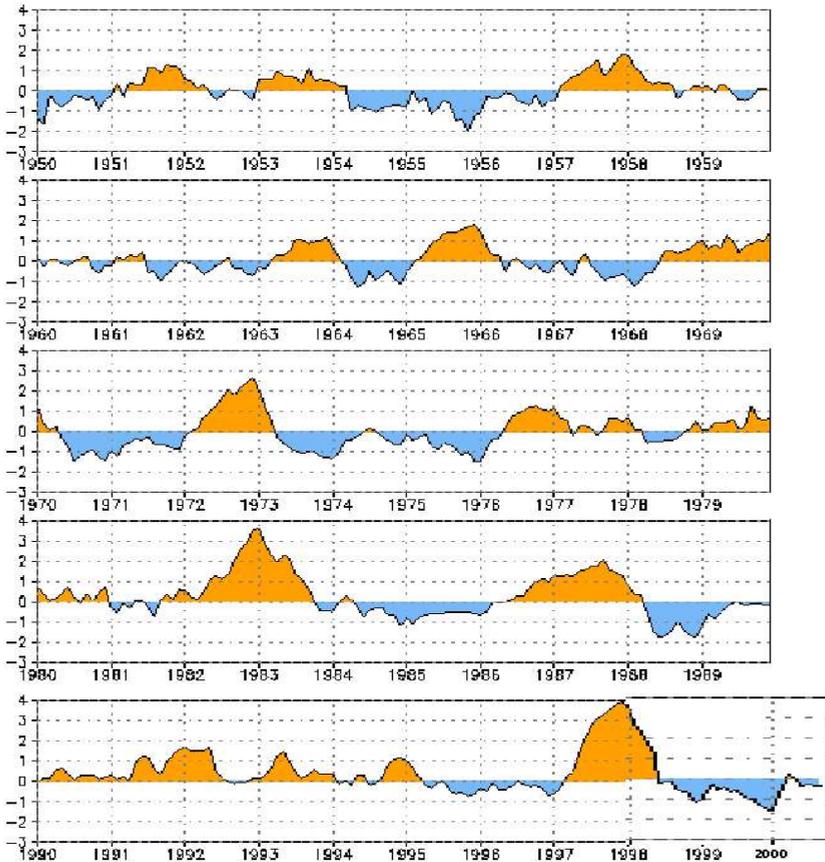


Figura 7: Serie temporal de las anomalías interanuales de TSM observada promediada en la región Niño-3 (5°S - 5°N , 150°W - 90°W). Las anomalías positivas representan periodos “El Niño”, mientras que las anomalías negativas corresponden a periodos “La Niña”.

Bjerknes fue incapaz de determinar por qué se invertía el signo de la Oscilación Austral o el cómo y el por qué del paso de condiciones cálidas a

frías (de “El Niño” a “La Niña”) en el ciclo del ENSO. Estas cuestiones siguen estando abiertas hoy en día y están siendo objeto de intensas investigaciones. Aunque la atmósfera y el océano actúan en armonía durante las fases maduras de estos eventos, quedan aún algunas preguntas por responder: ¿qué es lo que hace que el sistema acoplado comience uno de estos episodios?, ¿existe realmente un ciclo en el sistema océano-atmósfera autosuficiente que produce el paso de unas condiciones a las opuestas?, ¿o, por el contrario, son otras influencias externas las responsables de estos cambios?, en definitiva, ¿cuál es el papel de otras influencias exteriores a los trópicos?

Estudios recientes realizados mediante modelos numéricos parecen indicar que un elemento clave para el desarrollo de “El Niño” es la acumulación de calor en todo el océano tropical. Durante “La Niña”, el incremento de radiación solar penetrante calienta el océano, especialmente en el Pacífico occidental. Durante “El Niño”, el calor es transportado desde los trópicos hacia altas latitudes por medio de las corrientes marinas y otra parte del calor va a parar a la atmósfera, principalmente por medio de la evaporación. La temperatura global media de la atmósfera puede reflejar esta mayor entrada de calor, aumentando hasta en 0,3°C en los meses posteriores a un fuerte evento “El Niño”. Por tanto, el Océano Pacífico Tropical pierde calor durante “El Niño” y lo gana durante “La Niña”. La cuestión que se plantea es si el mecanismo que determina cuándo los eventos ENSO comienzan y acaban viene determinado por el tiempo que necesita el océano para “recargarse” y “desprenderse” de este calor. Algunos resultados de diversos modelos parecen apuntar en esta dirección. Sin embargo, las condiciones fuera de los trópicos también parecen ser importantes. Diversos cambios atmosféricos preceden a menudo la Oscilación Austral. Algunos estudios han relacionado el comienzo de “El Niño” con nevadas anómalas sobre Asia y con el monzón asiático del sureste. Parece ser que ciertas perturbaciones ondulatorias que viajan a lo largo del Pacífico tropical y subtropical pueden también jugar un papel importante cuando se reflejan en las costas que bordean a la cuenca oceánica. Puede incluso que fluctuaciones atmosféricas de alta frecuencia sean las responsables de la puesta en marcha de ciertos procesos en el sistema acoplado que, a su vez, provoquen “un Niño” o “una Niña”. Estudios recientes han mostrado que la irregularidad en los ciclos del ENSO puede provenir de las resonancias no lineales entre el ciclo anual y el ciclo del ENSO, lo cual puede llevar a un comportamiento caótico. En resumen, existen muchas maneras mediante las cuales se puede iniciar un evento ENSO, a pesar de ello, la evolución futura del sistema ha podido ser predicha con éxito creciente. En la actualidad existen ya modelos que realizan de manera operacional predicciones de “El Niño” con una antelación de entre 6 y 12 meses.

4 Prediciendo a “Los Niños”

Al igual que las altas presiones en Darwin suelen tener lugar al mismo tiempo que las bajas presiones en Tahití, la presencia de “El Niño” está correlacionada con una gran variedad de fenómenos atmosféricos que tienen lugar en distintas

partes del planeta. A estos fenómenos se les conoce bajo el nombre de **teleconexiones**. Por ejemplo, asociados con “El Niño” aparecen usualmente precipitaciones anormalmente elevadas sobre el Pacífico central, Perú, Ecuador y el sur de los Estados Unidos y a su vez sequías en Australia y el noreste de Brasil.

Las predicciones dinámicas del ENSO consisten en la utilización de modelos numéricos para reproducir el comportamiento del océano y de la atmósfera durante la evolución de estos eventos. Esto ha sido posible a partir de los años 80, cuando la capacidad de cálculo de los ordenadores se hizo lo suficientemente potente como para que las interacciones océano-atmósfera pudieran ser tenidas en cuenta en los grandes modelos climáticos de gran escala, utilizados para estudiar cuestiones como la elevación de la temperatura del planeta debido al efecto invernadero. Tales modelos han sido capaces de reproducir muchos de los efectos atmosféricos y oceánicos del ENSO en el Océano Pacífico Tropical (desde el primer modelo dinámico de *Cane y Zebiak (1985)* que se aplicó con éxito se han desarrollado muchos modelos para la predicción del ENSO, véase *Cane et al. (1986)*, *Barnett et al. (1988)* o *Latif et al. (1994)*) para una introducción al trabajo realizado en esta área).

En los años 90, se alcanzó un hito en la simulación del fenómeno ENSO, cuando se logró simular con éxito “El Niño” que comenzó al final de aquel año con unos meses de antelación. Poco después, en 1992, el “National Center for Atmospheric Research” (NCAR) desarrolló el primer modelo para emular la evolución de los fenómenos asociados al ENSO en una atmósfera que contuviera el doble del dióxido de carbono que la atmósfera actual (*Meehl et al., 1993*), un estado que puede alcanzarse en el año 2050. El modelo indicaba que las anomalías de lluvia asociadas con “El Niño” y “La Niña” podían incrementarse en un tal escenario de calentamiento global. En la actualidad existen, y se usan de manera operacional, grandes modelos acoplados océano-atmósfera globales para realizar predicciones con varios meses de antelación.

¿Cuáles son, pues, los obstáculos que aún nos quedan por salvar para llegar a una adecuada comprensión y predicción del fenómeno ENSO? En primer lugar es necesaria una mejor comprensión de su naturaleza cíclica así como la variabilidad en los inicios y finalizaciones de estos episodios naturales. Los factores que conducen a la conclusión de un episodio “El Niño” no están totalmente claros, sirva como ejemplo el reciente fracaso que sufrieron los modelos numéricos que predijeron la conclusión de “El Niño” que comenzó a finales de 1990⁶. Algunos modelos indicaron su finalización en 1992, sin embargo, a finales de 1993 este “Niño” seguía aún activo e incluso se intensificaba, convirtiéndose en “El Niño” más “longevo” en, al menos, el último medio siglo.

Para complicar aún más las cosas, el estado de base con respecto al cual se miden estos eventos anómalos puede que esté cambiando. Existen indicaciones de que la temperatura media del Océano Pacífico Tropical ha aumentado desde mitad de los 70. Si esto es realmente así, sería necesario definir un nuevo

⁶En *Macías (1999)* y *Macías (2000)* se justifica el por qué de este fracaso.

estado de referencia para medir los comienzos y conclusiones de estos fenómenos: para definir qué es un “Niño”, qué es una “Niña y cuáles son las condiciones “normales”.

Desde mediados de los 80 se lleva a cabo una observación sistemática del Océano Pacífico Tropical mediante boyas que realizan mediciones de temperaturas oceánicas hasta una profundidad de 500 m. A comienzos de los 90 estos esfuerzos se redoblaron con el programa TOGA-TAO (Tropical Ocean & Global Atmosphere-Tropical Atmosphere Ocean), que se prolonga hasta nuestros días. También a partir de 1990, oceanógrafos y meteorólogos, reunidos en el programa WOCE (World Ocean Circulation Experiment) observan los transportes (de agua, calor, sal, carbono, ...) que se producen en los océanos, principalmente mediante tres satélites, dos de ellos europeos, el ERS-1 y el ERS-2 enviados al espacio en 1991 y 1995, respectivamente. Estos satélites miden magnitudes de superficie como temperaturas, tensión del viento o velocidad de las corrientes). Por otra parte, el satélite franco-americano TOPEX/Poseidon en servicio desde 1992, mide el nivel de la superficie de los mares y océanos. Dos radares altimétricos le permiten a este satélite medir, desde una altura de 1330 km., el nivel del mar con un margen de error inferior a los 2 cm.

Las mejoras en los modelos, el gran esfuerzo observacional y la utilización y perfeccionamiento en las técnicas de asimilación de datos parecen conducirnos hacia el día en que el fenómeno ENSO pueda predecirse de manera fiable con hasta un año de antelación. Esta información será de gran utilidad para la planificación de las sequías, lluvias torrenciales e inundaciones, temperaturas extremas y demás fenómenos meteorológicos asociados a “El Niño”, sirviendo así para mitigar, al menos en parte, el sufrimiento humano que tales desastres naturales traen consigo.

5 Modelos Acoplados de “El Niño”

Los primeros estudios del fenómeno ENSO fueron llevados a cabo mediante modelos acoplados de tipo aguas poco profundas, o modelos de dos niveles, entre ellos podemos citar los que se presentan en *Philander et al. (1984)*, *Hirst (1986)*, *Zebiak y Cane (1987)*, *Schopf y Suarez (1988)* y *Battisti (1988)*. Con el considerable aumento de la capacidad de cálculo de los ordenadores, más recientemente, se han desarrollado modelos acoplados en los cuales tanto la componente oceánica como la componente atmosférica consisten en modelos de circulación general (modelos tridimensionales de ecuaciones primitivas), usualmente notados como GCMs (del inglés, General Circulation Models). Algunos ejemplos de tales modelos pueden encontrarse en *Philander et al. (1992)*, *Latif et al. (1993)*, *Mechoso et al. (1995)*, *Terray et al. (1995)*. El enorme coste computacional de estos modelos hace difícil llevar a cabo más de una simulación de la duración requerida para examinar la variabilidad interanual del modelo. Además, su complejidad hace siempre difícil diagnosticar los fenómenos que se modelan. Es por ello que modelos más sencillos continúan siendo herramientas muy útiles para una eventual comprensión de las

interacciones océano-atmósfera (habría que decir más aún y es que, a pesar de que se insiste mucho en el interés de desarrollar GCMs acoplados (CGCMs) como único medio para simular y predecir el fenómeno ENSO, a pesar de ello, son los modelos más sencillos los que, por el momento, nos han proporcionado los mejores resultados en sus predicciones).

Existen, por su parte, toda una clase de modelos de complejidad intermedia a los anteriormente descritos. Entre ellos podemos destacar aquéllos que consisten en un modelo general de circulación oceánica (OGCM) y una atmósfera mucho más simple que un GCM atmosférico (AGCM). Debido a este acoplado “mixto”, a esta clase de modelos se les denomina modelos acoplados híbridos (HCMs, de Hybrid Coupled Models). El diseño de estos modelos se basa en el hecho de que el océano es la principal fuente de memoria del sistema acoplado, mientras que la atmósfera tropical puede ser considerada como la componente que reacciona de forma rápida a los cambios en la temperatura superficial del océano. Paradójicamente, son este tipo de modelos intermedios los que nos han proporcionado las mejores predicciones de “El Niño”, batiendo ampliamente hasta a los más sofisticados modelos acoplados de océano-atmósfera (CGCMs).

Parece por tanto que, al menos por el momento, los científicos no han sido capaces de representar la complejidad de “El Niño” mediante la complejidad en sus modelos, aunque los avances en esta dirección son cada día mayores. Esto no quiere decir, en absoluto, que haya que abandonar los modelos acoplados de circulación general, pero tampoco el estudio y desarrollo de modelos simplificados que, por otra parte, son los que han servido, mediante el análisis de sus resultados, para sentar las bases de la mayoría de las teorías que tratan de explicar los mecanismos que rigen la evolución del sistema acoplado océano-atmósfera y los efectos de las interacciones entre sus componentes.

Queremos conocer mejor a estos “Niños de los Trópicos” y queremos predecir su compleja evolución. Hemos visto que la herramienta matemática para el modelado y posterior simulación de las interacciones océano-atmósfera son los modelos (acoplados) y éstos se componen de ecuaciones que es necesario resolver de forma adecuada. No será nuestra intención, ni mucho menos, la de describir en detalle alguno (de entre la gran variedad existente) de los modelos que se utilizan en la actualidad para el modelado de “El Niño”. Solamente daremos una serie de ideas básicas para entender de “en qué consiste un modelo acoplado” y poco más. Así, por un lado, el lector podrá “sentir” la presencia de las Matemáticas y por otro conseguiremos, escribiendo alguna ecuación que otra, que el subconsciente matemático del autor quede un poco más tranquilo, al haber sido éste capaz de colocar alguna de sus ecuaciones (independientemente de la necesidad de las mismas).

6 Cómo es un modelo acoplado de océano-atmósfera

Hemos visto que el fenómeno que queremos simular es un fenómeno esencialmente acoplado, resultado de la interacción del océano y la atmósfera es, por tanto, absolutamente necesario utilizar modelos acoplados de océano-

atmósfera para poder abordar su simulación y comprensión con ciertas garantías de éxito. Estos modelos acoplados consisten, básicamente, en dos modelos, uno de océano y otro de atmósfera, que interactúan (se pasan información) de forma continua al tiempo que realizan sus cálculos. ¿Y cuál es la información que debe ir de un modelo a otro? Pues bien, el océano debe transmitirle a la atmósfera la temperatura en la superficie del mar: es a través de ésta como el océano influencia la circulación atmosférica de forma más notable. La atmósfera debe, por su parte, decirle al modelo de océano con qué intensidad y dirección sus vientos fuerzan las corrientes marinas de superficie, cuál es la cantidad de flujo de calor que le llega al océano, de él dependerá la evolución de su temperatura y, por último, cuál es el flujo de agua (diferencia entre evaporación y precipitación), ya que éste influirá sobre la salinidad de las aguas oceánicas. Por su parte las corrientes se encargan de transportar calor y sal, con lo cual las distribuciones de temperaturas y salinidades no dependerán solamente de las “fuentes” y “sumideros” de calor y sal, sino también de las corrientes oceánicas y, por tanto, de los vientos.

Ya hemos visto que existe toda una jerarquía de modelos acoplados de océano-atmósfera, dependiendo de las diferentes elecciones de modelos de océano y atmósfera que se hagan. Nosotros aquí nos limitaremos a dar, brevemente, una serie de ideas sobre los modelos de océano y atmósfera, de forma muy general y simplificada.

6.1 Modelo de océano

En general los modelos de circulación general oceánica resuelven las conocidas como ecuaciones primitivas. Las ecuaciones correspondientes al cálculo de las corrientes oceánicas se obtienen, mediante una serie de hipótesis simplificadoras, a partir de las ecuaciones más generales que describen el movimiento de un fluido, conocidas bajo el nombre de ecuaciones de Navier-Stokes. A estas ecuaciones hay que añadirle una ecuación para el cálculo de la temperatura del agua y otra para la determinación de la salinidad de la misma.

Una vez que se tienen las ecuaciones que representan los mecanismos que queremos representar es necesario resolver dichas ecuaciones para así conocer la evolución de las distintas magnitudes físicas. Esto no va a ser tarea fácil, pero ¿por qué? Fundamentalmente porque no conocemos cuál es la expresión para la solución exacta de estas ecuaciones, lo más que podemos pretender es obtener (mediante toda una maquinaria matemática que se pone en juego) una solución aproximada al problema. La cuestión que debemos, por tanto, plantearnos en este momento es cómo hacer esto, cómo obtener una solución aproximada a nuestro problema. En primer lugar ni siquiera nos es posible obtener estos valores aproximados (de las corrientes, temperaturas y salinidad) en todos y cada uno de los puntos del océano: son demasiados, ¡infinitos! Debemos considerar solamente una serie de puntos “estratégicos” donde calcular las soluciones aproximadas. Estos puntos estarán localizados en una “malla”, una especie de red de puntos como la que se indica en la **Figura 8**, en la que se representa solamente la “malla de superficie”. Esta malla debe continuarse

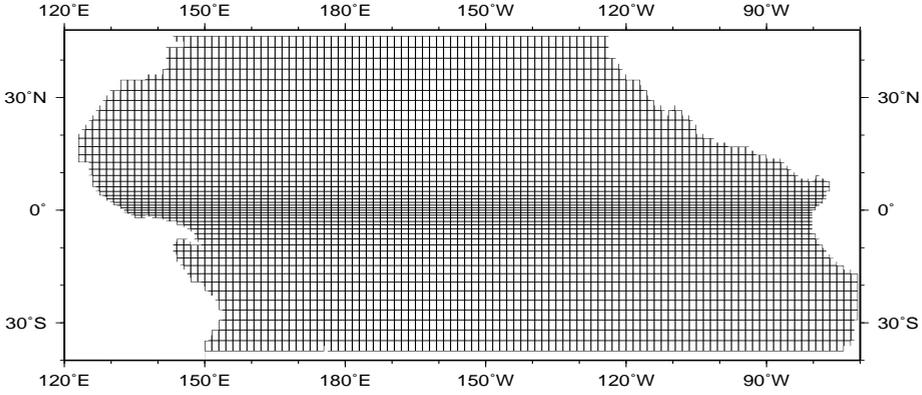


Figura 8: Malla de superficie para un modelo del Océano Pacífico Tropical.

verticalmente de forma que tengamos un enrejado tridimensional en todo el dominio de cálculo (que no es otro que todo el volumen ocupado por el océano). Pues bien, será en los puntos de esta malla, llamados nodos, y solamente en ellos, donde calcularemos los valores de nuestras incógnitas, es decir, sólo en estos puntos resolveremos las ecuaciones y sólo en ellos conoceremos unos valores aproximados para la velocidad de las corrientes, temperatura y salinidad.

6.1.1 Las ecuaciones del modelo

Damos aquí un ejemplo de las ecuaciones que resuelve un modelo de circulación general oceánica. Se trata de un sistema tridimensional de ecuaciones primitivas formado por tres leyes de conservación (cantidad de movimiento, energía y salinidad) que sirven para calcular la velocidad horizontal \mathbf{U} , la temperatura potencial T y la salinidad S (variables pronosticadas). Las otras tres ecuaciones nos permiten calcular la velocidad vertical W , la presión P y la densidad ρ (variables diagnosticadas):

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{U}_h &= -[\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}_h) + f] \mathbf{k} \times \mathbf{U}_h - W \partial_z \mathbf{U}_h \\
 &\quad - \rho_0^{-1} \nabla_h (P + 0,5 \rho_0 \mathbf{U}_h^2) + \mathbf{F}^U(\mathbf{U}), \\
 \partial_t T + \nabla \cdot (T\mathbf{U}) &= F^T(T) - \gamma^T (T - T_0), \\
 \partial_t S + \nabla \cdot (S\mathbf{U}) &= F^S(S) - \gamma^S (S - S_0), \\
 \partial_z P &= -\rho g, \\
 \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \\
 \rho &= \rho(T, S, P),
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{U} es el campo de velocidades, $\mathbf{U} = (U, V, W)$, \mathbf{U}_h es su proyección horizontal (U, V) , \mathbf{k} es el eje vertical local, f el parámetro de Coriolis (tiene en

cuenta el efecto de la rotación de la Tierra en las corrientes), g la aceleración debida a la gravedad y ρ_0 es un valor de referencia para la densidad y la densidad ρ que debe calcularse mediante un algoritmo adecuado. Las funciones \mathbf{F}^U , F^T y F^S parametrizan los efectos submalla debidos a los procesos de mezcla y F^T incluye la radiación solar penetrante. Las expresiones para estos tres términos pueden venir dadas por fórmulas del tipo:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^U(\mathbf{U}) &= A_m[\nabla_h(\nabla \cdot \mathbf{U}_h) - \nabla \times (\nabla_h \times \mathbf{U}_h)] + \partial_z(K_m \partial_z \mathbf{U}_h), \\ F^T(T) &= A_\rho \nabla \cdot (\nabla_h T) + (\rho_0 C_p)^{-1} \partial_z I + \partial_z(K_\rho \partial_z T), \\ F^S(S) &= A_\rho \nabla \cdot (\nabla_h S) + \partial_z(K_\rho \partial_z S),\end{aligned}$$

donde A_m y A_ρ son los coeficientes de viscosidad y difusión horizontales turbulentos, C_p es el calor específico del océano e I es la fracción de radiación solar (Q_{sr}) que penetra hasta la profundidad z ($I_{[z=0]} = Q_{sr}$). Los coeficientes de viscosidad y difusión vertical turbulenta, K_m y K_ρ , pueden ser constantes o calcularse (por ejemplo mediante un esquema TKE -siglas de Turbulent Kinetic Energy-)

6.1.2 Condiciones de contorno

Para resolver un sistema de ecuaciones primitivas como el que hemos planteado es necesario imponer unas condiciones de contorno adecuadas en cada una de las fronteras que nos aparecen en el dominio tridimensional en el cual vamos a resolver las ecuaciones. Habrá tres tipos de fronteras: el fondo oceánico y las costas (fronteras “sólidas”), por un lado, las fronteras artificiales que surgen al considerar sólo una “banda” del Océano Pacífico Tropical y no el océano global en su integridad, por otro, y en tercer lugar la superficie del océano. En el fondo de la cuenca, a lo largo de las costas y en las fronteras artificiales se impone que no haya flujos de sal ni de calor, es decir, estas fronteras no actúan ni como fuentes ni como sumideros (productores-consumidores) de sal ni calor. Para la velocidad la condición de contorno en esta frontera suele ser del tipo “no-slip” (condición de adherencia o de no deslizamiento), es decir velocidad nula.

En la superficie oceánica, los flujos de momento, de salinidad y de calor vienen dados por expresiones del tipo:

$$\begin{aligned}K_m \partial_z \mathbf{U}_h &= \tau / \rho_0, \\ K_\rho \partial_z T &= (\rho_0 C_p)^{-1} (Q - Q_{sr}), \\ K_\rho \partial_z S &= (E - P) S,\end{aligned}$$

donde τ es la tensión del viento, $E - P$ es el término de evaporación neta (evaporación-precipitación) y $(Q - Q_{sr})$ es la parte no penetrante del flujo de calor superficial Q (es positivo cuando llega al océano). Por tanto, en esta frontera, en la superficie del mar, es necesario conocer la tensión del viento, el flujo de agua y el flujo de calor.

Cuando el modelo de océano se utiliza de forma independiente, sin acoplarse a un modelo de atmósfera que le proporcione el viento y los flujos de agua y calor,

es necesario suministrarle estos datos bien sean provenientes de observaciones o, en la mayor parte de los casos, resultado de una parametrización (ecuación que de alguna manera reproduce unos valores adecuados para estas magnitudes a partir de datos conocidos o calculados por el modelo).

Por último es necesario suministrarle al modelo unas condiciones iniciales, esto es, es necesario decirle al modelo desde qué situación se comienza a calcular la evolución posterior del sistema. Hay muchas posibilidades: se puede inicializar los cálculos desde el reposo, a partir de condiciones observadas medias, a partir de observaciones en un determinado instante o a partir de cálculos anteriormente realizados.

Aunque sólo mencionemos estas cuestiones de pasada, la elección de unas condiciones iniciales y de contorno adecuadas es, en general, una cuestión muy delicada y de gran importancia práctica.

6.2 La componente atmosférica

Un modelo de circulación general de la atmósfera no es, en esencia, muy distinto de un modelo de océano, y su resolución se hace por métodos numéricos totalmente análogos. La principal diferencia entre un modelo completo de atmósfera y uno de océano se encuentra en su complejidad, mucho mayor para los primeros. Un modelo de atmósfera debe proporcionarnos no sólo velocidad del viento y temperaturas en la atmósfera, sino también presiones atmosféricas, humedad, cobertura nubosa (densidad, tipos, evolución, ...), distintos tipos de flujos de calor, evaporación, precipitaciones, ...

Como ya indicábamos, los métodos de resolución serán análogos, pero para el modelo de atmósfera tendremos un mayor número de ecuaciones con un mayor número de incógnitas que interactúan de forma complicada. No entraremos, pues, en unos detalles que, como podemos intuir, son de gran complejidad. Nos quedaremos con la idea de que tenemos otro modelo, análogo al de océano y, que al igual que éste, nos permite mediante su adecuada resolución obtener soluciones aproximadas a nuestro problema. Tampoco olvidaremos que es debido a esta complejidad y al enorme coste computacional que tienen estos modelos completos de atmósfera por lo que a veces se consideran modelos de atmósfera simplificados para la realización de estudios climáticos⁷ como los relacionados con “El Niño”.

7 Observaciones y predicciones

Las **Figuras 1, 6 y 7** nos mostraban datos provenientes de la medición de diversas magnitudes físicas (temperatura y presión) en distintas regiones del Océano Pacífico Tropical. Estas observaciones nos permitieron describir “la anatomía” de “Los Niños”. Con datos como éstos nos es posible saber en qué instante de la fase del ENSO nos encontramos en un determinado momento.

⁷Debe tenerse en cuenta que estos estudios requieren la integración (resolución) de los modelos para escalas de tiempo de décadas o incluso siglos.

La observación de “El Niño” es de una importancia mayor, no sólo para la correcta monitorización, descripción y eventual comprensión de los fenómenos físicos responsables de la variabilidad de este fenómeno, sino que también es de una importancia fundamental desde el punto de vista de la predicción, ya que los modelos numéricos de predicción del clima a cortas escalas de tiempo requieren de estos datos observados para su inicialización y para la posterior verificación de sus resultados.

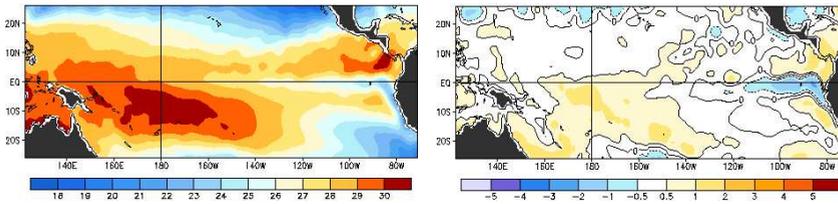
Fue “El Niño” de 1982-83 el que marcó un cambio de sustancial en la observación de las condiciones oceanográficas y climatológicas del Océano Pacífico Tropical. En el año 1983 La Oscilación Austral atrajo por primera vez la atención del gran público⁸ cuando su fase cálida de “El Niño” alcanzó una amplitud excepcionalmente intensa y estuvo asociado con devastadoras sequías en el Pacífico tropical occidental, lluvias torrenciales e inundaciones en la parte oriental del Pacífico tropical junto a patrones climáticos dañinos o incluso devastadores en otras partes del planeta. Este evento cogió a los oceanógrafos y meteorólogos completamente desprevenidos: cuando en octubre de 1983 un grupo de expertos se hallaba reunidos en Princeton, New Jersey, discutiendo proyectos para elaborar un programa conjunto para el estudio de “El Niño”, ninguno de estos especialistas era consciente de que el episodio más severo del último siglo estaba teniendo lugar en aquellos precisos instantes. Esto supuso un duro revés y una seria llamada de atención para la comunidad científica de oceanógrafos y climatólogos. La razón para este fracaso se encontraba en que, aunque en aquel momento las interacciones entre el océano y la atmósfera se conocían ya de forma adecuada, poco se había hecho para poner este conocimiento en un uso práctico que permitiera conocer la llegada de uno de estos “Niños”.

Pero fue este hecho el que hizo que los científicos y gobiernos tomarán conciencia de la necesidad de una mejor observación del Océano Pacífico Tropical. Así, cuando en 1987, el siguiente “Niño” hizo su aparición la situación era muy distinta. Por aquel entonces el NMC (National Meteorological Center) había comenzado a publicar un boletín mensual que describía en detalle las condiciones atmosféricas y oceánicas relacionadas con la Oscilación Austral. Fue posible seguir el desarrollo, por otra parte errático⁹, de “El Niño” de 1987, al tiempo que éste iba evolucionando. En la actualidad, tal información está disponible de forma rutinaria ya que el Océano Pacífico Tropical está siendo monitorizado con una gran variedad de instrumentos de forma continua. Estos datos provenientes de distintos tipos de medidas llegan, vía satélite, a diversos centros de investigación muy poco después de que las medidas se hayan realizado.

⁸Esto fue en los Estados Unidos. En Europa no fue hasta mucho más tarde. Recordemos que en España no es hasta finales de los noventa con el intenso episodio cálido de 1997-98 con sus importantes repercusiones climáticas cuando “Los Niños” “saltaron a la fama mediática”.

⁹Tras “El Niño” de 1982-83 se procedió, con los datos de todos los eventos anteriores, a la descripción detallada de un “Niño tipo” con las características comunes de todos los “Niños” conocidos. La llegada del nuevo “Niño” de 1987 echó por tierra la descripción que del “Niño tipo” se había hecho: este “Niño” fue distinto a todos los anteriores.

A pesar de la gran cantidad de observaciones que se llevan a cabo de forma continua los datos están demasiado aislados como para poder proporcionar un dibujo coherente de las densidades, corrientes o temperaturas del Océano Pacífico Tropical. Para poder extraer esta información de los datos observados se usa un modelo de circulación general de océano para integrar las medidas y suministrar mapas de las condiciones oceánicas equivalentes a los mapas del tiempo. Véase, como ejemplo, la **Figura 9** que nos muestra las condiciones de TSM en el Océano Pacífico Tropical sólo unos días antes de escribir estas líneas. La Figura 9(a) representa la temperatura de la superficie del mar promediada para los datos obtenidos durante la semana del 30 de marzo al 5 de abril de 2003. La Figura 9(b) presenta las anomalías (variaciones respecto a la media climatológica para esta época del año) correspondientes a los mismos datos que en la figura (a). Imágenes como ésta pueden obtenerse por cualquiera de nosotros, a través de internet, sólo un par de días después de que se recojan los últimos datos necesarios para su confección y tras haber sufrido el proceso de tratamiento de datos al que hemos hecho referencia anteriormente: esto era algo realmente impensable hace tan sólo unos años.



(a) TSM observadas.

(b) Anomalías en la TSM observadas.

Figura 9: Condiciones actuales (media entre el 30 de marzo y el 5 de abril de 2003) para la temperatura de la superficie del mar y sus anomalías. Esta imagen fue obtenida a través de internet (<http://www.cpc.ncep.noaa.gov>) el 7 de abril de 2003.

Pero en 1987 no sólo fue posible seguir el desarrollo de “El Niño” mes a mes al tiempo que éste evolucionaba, sino que también los modelos acoplados de océano-atmósfera que habían sido desarrollados desde 1982 tuvieron un notable éxito en la predicción del evento con algunos meses de antelación. Sin embargo, por aquel entonces, los modelos sólo eran capaces de responder a la pregunta de si era probable o no que tuviera lugar un evento cálido en los meses sucesivos, pero eran aún demasiado “toscos” como para predecir cómo evolucionaría un determinado evento o qué intensidad podría alcanzar, cuestiones éstas de gran importancia práctica.

La situación cambió de forma sustancial en los años que transcurrieron hasta la llegada del siguiente “Niño” que se inició a finales de 1990. Modelos y predicciones habían avanzado mucho y los científicos confiaban en una adecuada

predicción de “Los Niños”. Y así fue, en 1990 se alcanzó un hito en la simulación del ENSO, cuando se logró simular con éxito “El Niño” que comenzó a final de aquel año *con unos meses de antelación*. La idea de que la predicción de “El Niño” era un reto ya superado parecía imponerse entre los científicos . . . , hasta que un año y medio más tarde, a mediados de 1992, todos los modelos, en sus predicciones, daban por concluido este “Niño”. Pero la realidad fue bien distinta. Como ya hemos indicado anteriormente, este episodio cálido se prolongó hasta los inicios de 1996, convirtiéndose en el “Niño” más “longevo” del que se tiene conocimiento.

Este nuevo fracaso hizo pensar a algunos investigadores en la posible naturaleza caótica del fenómeno ENSO. Estudios posteriores muy recientes también han apuntado en esta dirección. Sin embargo, si éste fuera el final de la historia, sería un final bastante descorazonador debido a la impredecibilidad de un fenómeno caótico más allá de unos pocos días. Esto implicaría que fenómenos como los de “El Niño” y “La Niña” serían impredecibles. Entonces, ¿para qué los modelos?, ¿para qué la simulación de “El Niño”?, ¿para qué el coste inmenso efectuado para la obtención de medidas *in situ* y mediante satélites? . . . : debe haber otro final para esta historia. ¡Nos gustaría que hubiera otro final para esta historia!

Lo cierto es que la mayoría de los científicos continúan considerando la naturaleza casi-periódica (y por tanto predecible) del ENSO, aunque hay teorías y argumentos que apoyan tanto una (naturaleza caótica) como la otra (casi-periodicidad). En [8], [9] y en otros trabajos del autor de este texto en colaboración con el Prof. Stephenson se defiende (¿y demuestra. . . ?) que en general este fenómeno posee una naturaleza casi-periódica pero que de forma esporádica se ve perturbada por la aparición de ciertos periodos caóticos. Esto pudo ser el caso de 1992 o en 1975 con el conocido como “El Niño abortado” de aquel año. Este comportamiento es el que justificaría el fracaso que los modelos han sufrido en determinados momentos del pasado cuando la naturaleza nos “obsequió” con alguno de estos periodos caóticos. Pero, ¿por qué aparecen estos periodos de caos? ¿Es posible saber cuándo se producirán? Éstas son preguntas a las que por el momento no sabemos dar respuesta.

El “Niño” de 1992 nos sorprendió por su longevidad, pero el siguiente de nuestros “Niños”, el de 1997-98, el último hasta el momento, también nos sorprendió por su espectacular intensidad y repercusiones climáticas sin precedentes. Pero probablemente éstos no sean los últimos “Niños” que nos sorprendan y fascinen, muchos otros “Niños” que están aún por venir continuarán haciéndolo. Mientras tanto la comunidad científica debe persistir en el camino de la predicción mediante la utilización de modelos numéricos, pues, a pesar de todo, éstos constituyen la herramienta más potente y fiable para avanzar la evolución del sistema acoplado océano-atmósfera.

Por el momento, lo único que hemos hecho ha sido echar la vista atrás y hacer un repaso a través de las últimas décadas comentando las peculiaridades de algunos de “Los Niños” del pasado, pero, ¿cuáles son las condiciones actuales y en qué fase del ciclo ENSO nos encontramos en estos momentos? Para responder a esta pregunta basta con echar un vistazo a algunas de las figuras

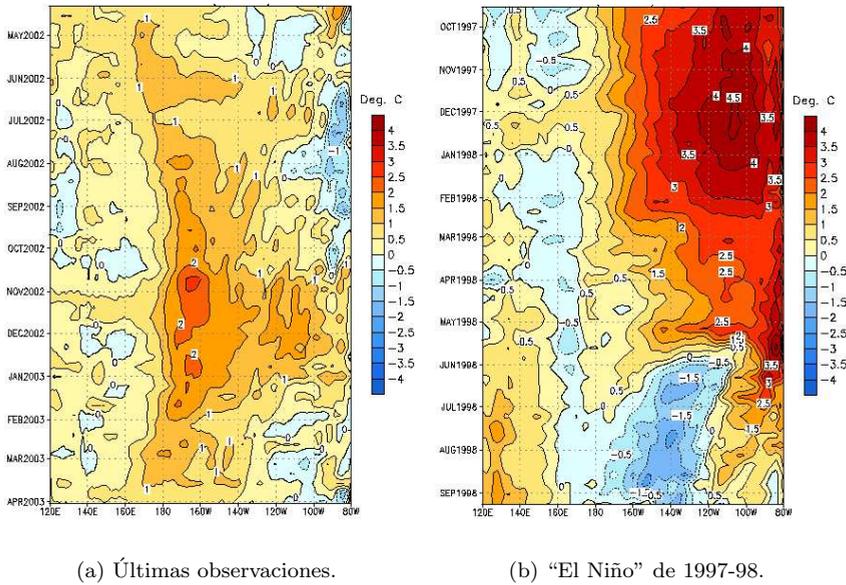


Figura 10: Sección ecuatorial en longitud-tiempo de observaciones de las anomalías de temperatura de la superficie del mar (a) desde abril de 2002 hasta el 2 de abril de 2003 (últimas observaciones) comparadas con las condiciones observadas para “El Niño” de 1997-98 en (b).

de observaciones que hemos presentado (**Figuras 9 y 10(a)**), así como la **Figura 11**, que nos muestra las anomalías de la TSM promediadas en la región Niño-3 (5°S - 5°N , 150°W - 90°W) durante los últimos 12 meses. Estas observaciones nos muestran que el año 2002 se caracterizó por TSM en general por encima de lo normal (al menos en la región Niño-3, principal índice oceánico de referencia en la monitorización de “El Niño”). Por lo cual podemos considerar al 2002 un año débilmente “El Niño”, con condiciones en muchos momentos próximas a las condiciones normales (medias). Así, por ejemplo, para las anomalías promediadas en la región “El Niño-3” durante los últimos 12 meses (ver Figura 11) éstas apenas superaron en algún momento el grado y medio, muy lejos de los 4°C que se observaron para “El Niño” de 1997-98 (ver Figura 7). De las Figuras 9, 10(a) y 11 parece intuirse que nos encontramos al final de este débil periodo “El Niño” del año 2002.

En la actualidad, cuando hablamos de observaciones de las condiciones naturales en nuestro planeta, es referencia obligada hacer mención a la herramienta más potente de observación de la atmósfera y de las condiciones de superficie en los mares y océanos que el hombre posee en la actualidad: la observación satélite. Dentro de este contexto se encuentra el ya mencionado proyecto TOPEX/Poseidon, cuyos satélites realizan la observación de la Tierra

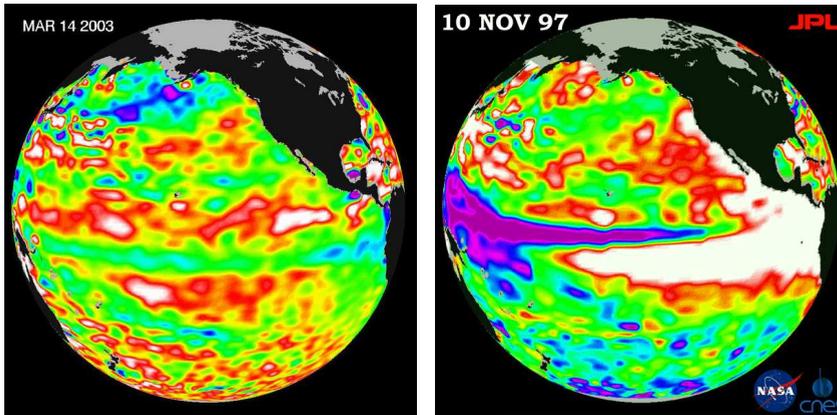


Figura 11: Serie temporal con las últimas observaciones para las anomalías de la TSM promediadas en la región Niño-3 (5°S-5°N,150°W-90°W) en los últimos 12 meses. Actualización del 2 de abril de 2003 obtenida el 4 de abril de la página web del NCEP (<http://www.cpc.ncep.noaa.gov>).

desde el espacio desde el año 1992. Cualquiera de nosotros puede ver estas imágenes satélite e incluso animaciones de las mismas para distintos periodos en <http://topex-www.jpl.nasa.gov>. Es interesante comprobar como los datos de elevación de la superficie del mar reflejan claramente la estructura de “Los Niños” con sus patrones de TSM asociados. En la **Figura 12** se muestran dos imágenes satélite que presentan los datos de las anomalías en las elevaciones de la superficie del mar. En la Figura 12(a) pueden verse las anomalías sólo unos días antes del momento en que escribí estas líneas. En esta imagen se pueden apreciar unas condiciones, especialmente en la franja ecuatorial, muy próximas a las condiciones medias (normales). A modo de comparación, en la Figura 12(b) presentamos la imagen satélite que nos muestra las condiciones anómalas de elevación de la superficie del mar en noviembre de 1997, en plena fase madura de “El Niño” de aquel año.

Una vez observadas cuáles son las condiciones actuales, el siguiente paso consiste en preguntarse acerca de la evolución futura del sistema: ha llegado el momento para las predicciones. ¿Qué nos dicen los modelos de “El Niño” acerca de su evolución en los próximos meses? ¿Será este año que acaba de comenzar un año “La Niña”? ¿Persistirán las condiciones normales o se reintensificará “El Niño” que parece ahora debilitarse? ¿Nos encontraremos en uno de esos periodos caóticos en los que la predicción carece de validez¹⁰? En la **Figura 13** mostramos las predicciones para las anomalías de la TSM en el Océano Pacífico Tropical suministradas por el modelo del NCEP (National Centers for Environmental Prediction). Este modelo predice que a lo largo del presente año las condiciones para la TSM en el Océano Pacífico Tropical serán “normales” sin una tendencia clara. Parece que durante los meses de abril a junio se producirá un débil enfriamiento de las aguas superficiales en el Océano Pacífico Oriental, para mantenerse unas condiciones de TSM muy próximas a la media para el resto del año. Hasta este punto parece haber consenso entre la

¹⁰Este ha sido, de hecho, el caso de “El Niño” de 2002-03.



(a) Imagen satélite del 14 de marzo de 2003.

(b) Imagen satélite del 10 de noviembre de 1997.

Figura 12: Imágenes producidas a partir de los datos satélite suministrados por el proyecto TOPEX/Poseidon. En (a) última imagen disponible, en (b) comparamos con las condiciones de “El Niño” de 1997. Imágenes obtenidas de <http://topex-www.jpl.nasa.gov>

mayoría de los modelos y predicciones de “El Niño”, sin embargo, para finales de este año el consenso se rompe, y así hay modelos que sugieren una continuación de las preexistentes condiciones “El Niño” débil, mientras que otros indican el desarrollo de condiciones “La Niña” pero siempre con anomalías de pequeña magnitud, es decir, con condiciones próximas a la media climatológica. Por tanto, en cualquier caso, los modelos predicen para el 2003 unas condiciones oceanográficas (y, por tanto, atmosféricas) que serán esencialmente “normales” lo cual sugiere un año exento de catástrofes naturales asociadas a “El Niño”.

Si ahora éste fuera el nuevo final a nuestra historia todo sería demasiado bueno, doblemente bueno. Por un lado porque parece que somos capaces de predecir las condiciones en el Océano Pacífico Tropical con casi un año de antelación y, al parecer, con cierto detalle. Por otro lado porque las predicciones que nos proporcionan estos modelos pronostican condiciones naturales benignas para este año 2003. Pero siempre hay un pero: hay muchos modelos y por tanto muchas predicciones. La primera pregunta que nos surge es si todas estas predicciones coinciden. La respuesta es que no necesariamente. Aunque cabría esperar que, al menos cualitativamente, sí estuvieran de acuerdo (lo cual tampoco ocurre a veces). La otra cuestión que nos planteamos es, ¿qué ocurrirá si nos encontramos en uno de esos periodos caóticos a los que hemos hecho referencia? ¿Estaremos fallando estrepitosamente en nuestra predicción? Probablemente, pero no parece que podamos saberlo de antemano.

El fenómeno ENSO sigue y seguirá fascinándonos como lo hace la propia

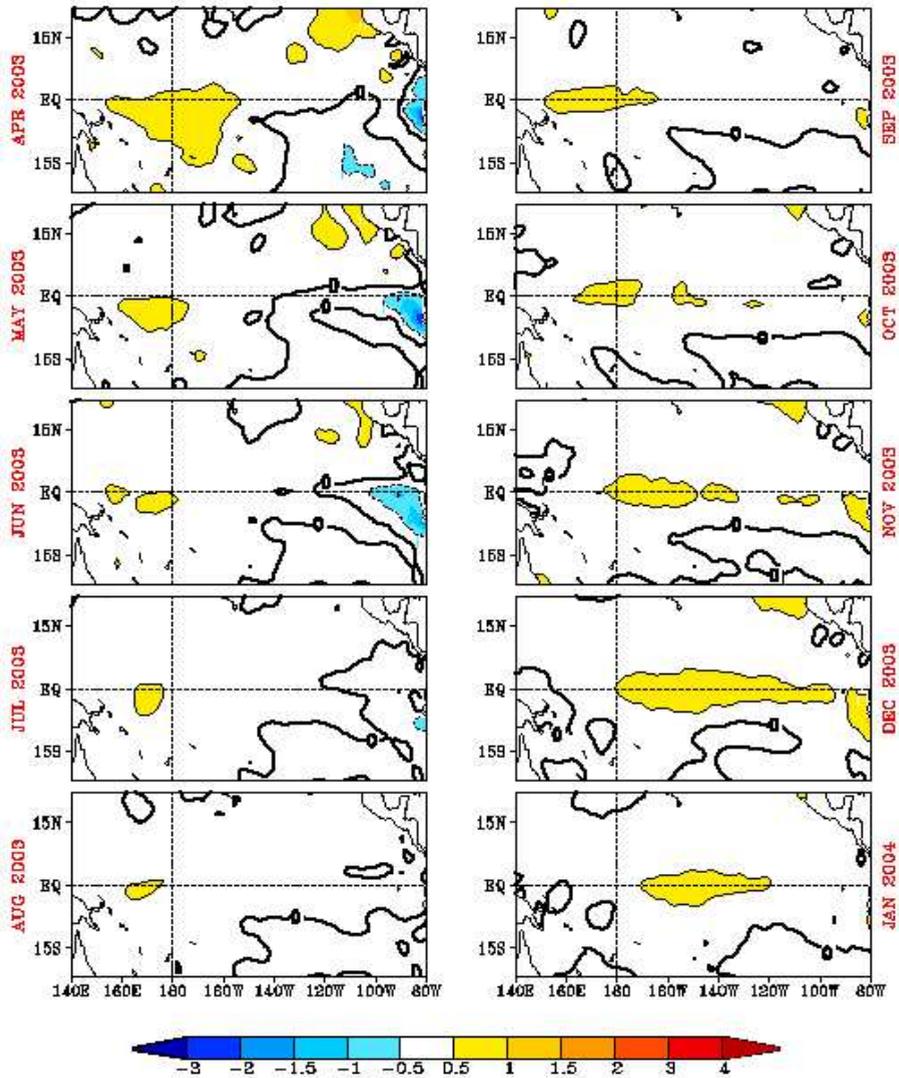


Figura 13: Predicciones de las anomalías de la temperatura de la superficie del mar en el Océano Pacífico Tropical para los meses que van desde abril de 2003 hasta enero de 2004. Datos del NCEP/CMB de la NOAA (National Centers for Environmental Prediction/Climate Modeling Branch). Actualización del 3 de abril de 2003 obtenida el 4 de abril de la página web del NCEP (<http://www.emc.ncep.noaa.gov>).

Naturaleza, quizás algún día conozcamos lo suficiente para responder a las muchas preguntas que todavía hoy quedan sin respuesta. Ese día quizás sepamos

cual es el verdadero final de esta historia.

8 El cambio demográfico: ¿más “Niños” y de carácter más fuerte?

Existe un cierto consenso entre los oceanógrafos y climatólogos respecto al hecho de que los fenómenos “El Niño” se han hecho más frecuentes y progresivamente más cálidos durante los cien últimos años. Pero, aparte de estar de acuerdo en esto, apenas lo sí lo están en lo demás, en especial sobre si la actividad del hombre podría estar intensificando sus efectos. En concreto, ¿es el cambio climático el causante de este “cambio demográfico”? En el último siglo se han producido 23 “Niños” y 16 “Niñas”¹¹, de ellos los cuatro más intensos han tenido lugar en los últimos veinte años, desde el 1980 hasta nuestros días, y han sido precisamente los cuatro últimos. Pero nadie sabe si esto indica una tendencia o se trata simplemente de una agrupación casual sin importancia. Nadie puede saberlo en estos momentos. Ni siquiera cien años de observaciones precisas de temperaturas, presiones atmosféricas y precipitaciones en el Pacífico podrían ser suficientes para confirmar una tendencia importante en uno u otro sentido. Además muchos expertos sospechan que “Los Niños” (y de hecho muchos otros patrones meteorológicos y oceánicos) podrían alternar en frecuencia e intensidad siguiendo escalas temporales de décadas¹² o incluso siglos, con los cual harían falta datos de observaciones sobre ... ¡milenios! para poder detectar estos cambios. Obviamente estos datos tardarán todavía “algún tiempo” en estar a nuestra disposición ...

Es difícil imaginar cómo el calentamiento global observado durante los últimos cien años, que ha sido de medio grado centígrado, podría afectar al imponente volumen de agua del océano Pacífico ecuatorial. Pero muchos científicos creen que es posible. El océano es un inmenso acumulador de energía en forma de calor que las corrientes se encargan de transportar y redistribuir. Vimos que, durante la fase álgida de “El Niño”, el exceso de calor en las zonas tropicales se libera hacia las latitudes medias. Cuando el calor es liberado, el ciclo de “El Niño” comienza de nuevo, con menos nubes en los trópicos y con los océanos absorbiendo más calor durante el periodo frío de “La Niña”. Con el calentamiento global del planeta hay más calor disponible, por tanto, la duración del ciclo puede ser menor porque el tiempo de intercambio se reduzca o porque la liberación de calor sea menos eficiente. Los modelos, por su parte, pueden jugar un papel importante a la hora de proponer teorías acerca de las repercusiones de un cambio climático en las condiciones atmosféricas y oceánicas del planeta. Recordemos, por ejemplo, como en un escenario con el doble de CO₂ en la atmósfera que en la actualidad, los modelos predicen unos ciclos “El Niño” más intensos y con repercusiones climáticas acentuadas.

¹¹Según la definición de la NOAA (National Oceanographic and Atmosphere Administration).

¹²Es lo que se conoce, en el caso del Océano Pacífico, bajo el nombre de la PDO (Pacific Decadal Oscillation).

Suceda lo que suceda en el futuro, el mundo no tiene por qué volverse a ver sorprendido por “El Niño” o “La Niña”. Gracias a las predicciones sin precedentes que la Ciencia ha hecho posible, la aparición de estos fenómenos naturales anómalos debe dejar de parecernos tan impredecible y diabólica para pasar a ser, más bien, una parte ordinaria de la vida en nuestro planeta. Tenemos que darnos cuenta de que es algo natural que va a suceder una y otra vez y que debemos estar preparados para ello.

Referencias

- [1] T.P. Barnett, N.E. Graham, M.A. Cane, S. Zebiak, S. Dolan, J. O’Brien y D. Legler. On the prediction of the El Niño of 1986-1987. *Science*, 241:192-196, 1988.
- [2] D.S. Battisti. Dynamics and thermodynamics of a warming event in a coupled tropical atmosphere-ocean model. *J. Atmos. Sci.*, 45:2889-2919, 1988.
- [3] M.A. Cane y S.E. Zebiak. A theory for El Niño and the Southern Oscillation. *Science*, 228:1084-1087, 1985.
- [4] M.A. Cane, S.E. Zebiak y S.C. Dolan. Experimental forecasts of El Niño. *Nature*, 321:827-832, 1986.
- [5] A.C. Hirst. Unstable and damped equatorial modes in simple coupled ocean-atmosphere models. *J. Atmos. Sci.*, 43:606-630, 1986.
- [6] M. Latif, T.P. Barnett, M.A. Cane, M. Flügel, N.E. Graham, H. von Storch, J.-S. Xu y S.E. Zebiak. A review of ENSO prediction studies. *Clim. Dyn.*, 9:167-179, 1994.
- [7] M. Latif, A. Sterl, E. Maier-Reimer y M.M. Junge. Structure and predictability of the El Niño/Southern Oscillation phenomenon in a coupled ocean-atmosphere general circulation model. *J. Climate*, 6:700-708, 1993.
- [8] J. Macías. Cómo comprender mejor a “Los Niños” (mediante métodos inspirados en la teoría de sistemas dinámicos). En *Actas del XVI CEDYA/VI CMA*, 1543-1550, Gran Canaria, 1999.
- [9] J. Macías. *ENSO and Seasonal Variability in a Hybrid Coupled Model of the Tropical Pacific*, vol. 11. Publicaciones del Grupo de Análisis Matemático Aplicado de la Universidad de Málaga, 2000.
- [10] J. Macías. Estudio del fenómeno “El Niño” mediante un modelo acoplado híbrido de océano-atmósfera. *Rev. Geofís.*, 54:4-34, 2001.
- [11] J. Macías y D. Stephenson. Seasonal and interannual ENSO variability in a Hybrid Coupled Model of the tropical Pacific. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, série II a, 324:269-276, 1997.

- [12] C.R. Mechoso, A.W. Robertson, N. Barth, M.K. Davey, P. Delecluse, B. Kirtman, M. Latif, T. Nagai, S.G.H. Philander, P.S. Schopf, T. Stockdale, M.J. Suarez, L. Terray, O. Thual y J. Tribbia. The seasonal cycle over the tropical Pacific in general circulation models. *Mon. Wea. Rev.*, 123:2825–2838, 1995.
- [13] G.A. Meehl, G.W. Branstator y W.M. Washington. Tropical Pacific interannual variability and CO₂ climate change. *J. Climate*, 6:42–63, 1993.
- [14] S.G.H. Philander. *El Niño, La Niña and the Southern Oscillation*. Academic Press, 1990.
- [15] S.G.H. Philander, R.C. Pacanowski, N.C. Lau y M.J. Nath. Simulation of ENSO with a global atmospheric GCM coupled to a high-resolution tropical Pacific Ocean GCM. *J. Climate*, 5:308–329, 1992.
- [16] S.G.H. Philander, T. Yamagata y R.C. Pacanowski. Unstable air-sea interactions in the tropics. *J. Atmos. Sci.*, 41:604–613, 1984.
- [17] P.S. Schopf y M.J. Suarez. Vacillations in a coupled ocean-atmosphere model. *J. Atmos. Sci.*, 45:549–566, 1988.
- [18] L. Terray, O. Thual, S. Belamari, M. Déqué, P. Dandin, P. Delecluse y C. Lévy. Climatology and interannual variability simulated by the Arpege/OPA coupled model. *Climate Dynamics*, 11:487–505, 1995.
- [19] S.E. Zebiak y M.A. Cane. A model El Niño-Southern Oscillation. *Mon. Wea. Rev.*, 115:2262–2278, 1987.

Matemáticas y empresas

M. LEZAUN

Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e
Investigación Operativa
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

mpleitm@lg.ehu.es

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar unas reflexiones sobre las relaciones entre matemáticas y empresa. Estas reflexiones o apuntes son fruto de testimonios y experiencias propias en este dominio y no tienen ninguna pretensión generalizadora: es muy difícil obtener datos fiables en un sector muy disperso y en el que las opiniones divergen mucho según sean las exigencias locales. Dada la poca tradición que existe en España de estas relaciones, nos parece muy importante presentar ejemplos concretos. Por ello, mostraremos algunas colaboraciones entre universidad y empresas, en particular las que nosotros hemos llevado a cabo.

1 Las empresas

Una empresa es un lugar de intercambio para producir valor añadido, para crear riqueza. La empresa parte de una materia prima adquirida a sus proveedores y propone un producto a sus clientes. Esta materia prima puede ser “materia gris”, por ejemplo matemáticas o estudiantes de matemáticas recién salidos de la universidad. En este sentido, se puede afirmar que lo más importante hasta ahora de la Sociedad del Conocimiento es el descubrimiento, o la percepción, de que el conocimiento constituye un activo fundamental en los procesos de creación de valor añadido.

Los objetivos, los métodos de trabajo y los “tiempos” de las empresas, que evolucionan continuamente, son muy distintos de los de la investigación académica: se deben respetar plazos de entrega. También es importante señalar que las matemáticas están estructuradas de forma disciplinar (análisis numérico, probabilidades, estadística, optimización...), mientras que las empresas lo están de manera funcional. Así, en éstas se deben distinguir:

- los organismos I+D no representativos del mundo de la empresa (Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA), Instituto Astrofísico de Canarias, Instituto Nacional de Meteorología...);
- las grandes empresas, las cuales pueden tener una experiencia o un servicio de investigación (Telefónica, compañías eléctricas, REPSOL YPF, fabricantes de coches...). Estas empresas manejan grandes bancos de datos y necesitan utilizar cálculo científico “pesado”;
- el sector bancario y los seguros (matemática financiera, cálculo estocástico, optimización, control...);
- las pequeñas o medianas empresas, orientadas hacia la producción, sin tradición de investigación, con una cultura poco universitaria y sin necesidades específicas muy evidentes de modelación;
- las sociedades de servicios, especializadas, por ejemplo, en el desarrollo de software, con actividad en sectores “punta” (biotecnología, robótica, visualización de imágenes...), a menudo de tamaño pequeño o mediano y con relaciones de colaboración con departamentos universitarios, o más importantes y asociadas a grandes estructuras (Centros Tecnológicos de la Corporación Tecnalia en Euskadi...).

2 Relaciones departamentos universitarios empresas

Para los departamentos universitarios, las relaciones con empresas son fuente de nuevos temas de investigación, de tesis, de aplicaciones, de lo cual sigue un aumento de los doctorandos y, en definitiva, un aumento de la producción. También proporcionan la posibilidad de obtener financiación específica, contratos, participación en patentes y abren las puertas a futuras incorporaciones en la empresa.

En lo que respecta a la empresa, se tiene que convencer de que la relación con la universidad le permite la adquisición barata de nuevos conceptos fruto de investigaciones teóricas desarrolladas en el exterior, le da la oportunidad de establecer contactos enriquecedores con una cultura y una forma de pensar y trabajar diferentes, y le proporciona la posibilidad de ahorro en los costes en investigación, costes que se dispararían de tener que hacerla exclusivamente con sus propios medios. Por último hay que resaltar que las relaciones con la universidad sirven para impulsar una imagen innovadora y de alto nivel tecnológico de la empresa.

El establecimiento de relaciones de colaboración con empresas no es fácil. Por parte de los departamentos universitarios hace falta un decidido interés para llevarlas a cabo y aprovechar todas las oportunidades que se presenten. De alguna forma hay que hacer lo mismo que cuando se está desarrollando un tema de investigación: siempre que se conoce o se tiene noticia de alguien susceptible de proporcionarnos ayuda o colaboración, intentar relacionarse con él. La mayor parte de las veces, es el propio departamento universitario el que

tiene que propiciar el contacto y quien debe convencer a la empresa de que las matemáticas le van a servir mucho en la mejora de su producción o satisfacción.

En lo que respecta a las empresas, no en todas tienen una predisposición innata a relacionarse con la universidad. Aquí también hace falta algún directivo dispuesto a avalar estas relaciones, la mayor parte de las veces porque cree y le gustan las matemáticas. Hay que resaltar que incluso cuando ocurre esto, la empresa no suele tener muy claro, o por lo menos no sabe formularlo, cómo es el problema que quiere abordar en colaboración con la universidad. Por ello, el primer esfuerzo de la parte universitaria consiste en analizar, comprender y formular bien el problema que se quiere tratar, y una vez hecho esto, la mayor parte de las veces la empresa se convierte en una decidida entusiasta del proyecto.

3 Los matemáticos en la empresa

Las empresas casi nunca demandan matemáticos en cuanto tales, sino que tienen necesidades matemáticas que tienen que satisfacer, ya sea arreglándose con sus propios medios, ya sea recurriendo a la contratación temporal o permanente de personas de formación matemática o, por último, lo que cada vez es más frecuente, encargando estudios por contrato a sociedades de servicios más o menos competentes o, en menor medida en España, a laboratorios universitarios.

Para la primera incorporación de un matemático a una empresa, la adquisición previa de una doble competencia (a las matemáticas aplicadas se añaden por ejemplo la informática, la automática, la economía, la biología o la gestión) adquirida en los distintos Masters, puede en ciertos casos favorecer el reclutamiento. Ahora bien, esto no es siempre cierto, la empresa puede preferir que la iniciación necesaria a su campo de aplicación se haga en su propio seno, lo cual a menudo suscita dificultades de diálogo, que por otra parte son inevitables. Posteriormente, la capacidad de adaptación del joven matemático jugará un papel capital: aceptación de los fines del servicio donde esté instalado, aptitud para leer la documentación técnica y asimilar el estilo y vocabulario, facultad para llevar a cabo un estudio “hasta el final”, en particular en la puesta a punto informática. Se trata pues de cualidades intelectuales y humanas que no parece que el sistema de enseñanza español, tanto en los niveles medios como en las facultades universitarias o en las escuelas de ingeniería, esté en disposición de desarrollarlas.

En general, una contratación estable sólo se obtiene cuando la empresa considera que tiene la garantía de que la persona reclutada le asegura una competencia que será constantemente renovada en función de sus necesidades. La mayor parte de las veces, el trabajo propuesto estará muy próximo al de un ingeniero investigador o al de un informático, y su éxito dependerá más de aptitudes genéricas derivadas de haber estudiado matemáticas (capacidad de análisis, capacidad para detectar y analizar problemas y por tanto para intentar resolverlos, capacidad para formalizar, para sintetizar...) que de la cultura matemática en sí misma.

Para terminar, no podemos dejar de decir que a pesar de que las matemáticas son realmente útiles, en España la presencia de matemáticos en la empresa es escasa. Las razones de esta situación son diversas. Entre ellas, algunas son de carácter general, como es la falta de tradición científica o tecnológica. Por ejemplo, un grave mal de la industria o de la ingeniería en España es la total dependencia del software extranjero, en concreto americano. Así, cuando una empresa automovilística encarga a un fabricante un componente, le exige que lo diseñe con un software determinado que ella ha homologado, no le deja prácticamente ningún margen de maniobra para un desarrollo integral propio que requeriría de mayor investigación. Entre las razones específicas de las matemáticas, en las que los matemáticos tenemos una responsabilidad especial, está la orientación de los planes de estudio de las licenciaturas de matemáticas, que en nuestra opinión han estado muy polarizados hacia la matemática pura, con la idea de formar investigadores, descuidando las aplicaciones. Hay que indicar que esto no sólo ha ocurrido en las Facultades de Ciencias o Matemáticas, sino que también lo han hecho, lo cual es mucho más grave, las Escuelas de Ingenieros, que en muchas ocasiones han utilizado las matemáticas como una herramienta de selección para que solo continúen los mejores alumnos.

Nota: Hasta aquí, este trabajo en buena parte es deudor de *Mathématiques et entreprises*, publicado por A. Bachelot et J.-P. Raoult en la Gazette des mathématiciens, 75, 1997.

4 Ejemplos de colaboraciones universidad empresa

En nuestro conocimiento, dejando aparte la estadística, uno de los ejemplos más relevantes de departamento de matemáticas con amplias relaciones con empresas es el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela. En este departamento tienen una amplia experiencia en modelado de procesos industriales, y muestra de ello son los artículos *Simulación numérica de diferentes procesos industriales relacionados con la producción de silicio. Proyectos de colaboración con Ferroatlántica I+D*, de Alfredo Bermúdez de Castro (Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., 23, 2003, 101-122) y *Simulación numérica de las deformaciones termomecánicas de una placa de aluminio durante el proceso de colada*, de Patricia Barral y Peregrina Quintela (Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., 26, 2003, 7-34).

En un orden más modesto, en el Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea tenemos una línea dedicada a colaboraciones con empresas, algunas de las cuales describiremos brevemente.

4.1 Colaboración con Sidoror

La Corporación Sidoror está formada por tres grandes grupos de producción: Sidoror Industrial (España), constituido en 1995, Aços Villares (Brasil), adquirido en 2000 y Sidoror ABX (México), adquirido en 1999.

En lo que respecta a la producción, Sidenor es un fabricante de acero especial para su posterior utilización fundamentalmente en la industria automovilística. Así, Sidenor suministra a los transformadores finales barras (laminadas, estiradas, torneadas, rectificadas, forjadas), llantas y rollos laminados para la producción de piñones, cubos de rueda, bielas, ballestas, barras estabilizadoras, etc.

En el año 2001, Sidenor Industrial produjo 619.000 Tn de barras de acero especial, 7.000 Tn de acero aleado y 28.000 Tn de piezas coladas y forjadas. En cuanto a la distribución de las ventas, España acapara el 53 % de las de acero especial, seguida de Francia y Alemania con un 10 % cada uno e Italia con un 5 % del total.

Finalmente, Sidenor dedica más del 2 % de su facturación a actividades de desarrollo e investigación y a su aplicación en los procesos de fabricación y mejora de productos. Actualmente, el departamento de I+D de Sidenor dispone de un edificio propio en el que trabajan unas 50 personas entre investigadores, investigadores en formación, becarios, personal administrativo y dirección.

El proyecto de colaboración realizado con Sidenor se titula *Aplicación de la tecnología OES-PDA para la evaluación de la homogeneidad del acero de rodamiento* y lo hemos hecho Mikel Lezaun, Gloria Pérez Sáinz de Rozas y Eduardo Sáinz de la Maza, del Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa, y Luis Vega del Departamento de Matemáticas, todos profesores de la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea.

Dos de las características más importantes exigidas por el primer nivel de clientes en el mercado del acero de rodamiento son la pureza y la homogeneidad del material suministrado, ya que ambas tienen una gran influencia en la vida del componente. Por ello, los fabricantes de acero se han visto forzados a mejorar tanto su producción como los procesos de control, para así alcanzar el objetivo anteriormente mencionado. Este proyecto con Sidenor trata de desarrollar una nueva metodología capaz de evaluar esas dos características: pureza y segregaciones de carburo. Esta metodología se basa en la utilización de un tratamiento de los datos analíticos obtenidos por un espectrómetro de emisión óptica (OES) con tecnología PDA (pulse discrimination analysis) en distintas muestras de acero con un uno por ciento de carbono. De forma más precisa, se trata de evaluar las segregaciones de carburo como una medida de la homogeneidad del acero.

Hasta ahora, el método tradicional de control de calidad utilizado a demanda de los clientes consiste en la aplicación del método de comparación estándar SEP 1520. Para ello, se cortan las barras de acero a lo largo de su eje longitudinal y se extrae una muestra metalográfica de aproximadamente 20 mm de longitud, que posteriormente se evalúa microscópicamente comparándola con un mapa que se ha convertido en estándar. Se trata pues de un método comparativo subjetivo.

En el nuevo método, las muestras las analizamos con un espectrómetro de emisión óptica con tecnología PDA, proceso que consiste en lanzar una gran cantidad de chispas a la placa de acero y medir la intensidad de la luz de cada chispa, que se corresponderá con una mayor o menor presencia de carburo

en el punto de chispeo. De forma más precisa, cada muestra rectangular, en este caso de unos 10 por 8 centímetros de lado, se somete a 8 o 9 barridos de chispas de unas 4.000 chispas cada uno, en sentido perpendicular al eje de la muestra. Tenemos pues más de 30.000 datos de intensidad y los mayores valores, que se corresponderán con las segregaciones, estarán en la zona vertical central de la placa analizada. Un tratamiento de todos los datos obtenidos para cada muestra, de la que previamente sabemos su clasificación, hecha por el método tradicional, nos ha permitido definir una nueva escala que reproduce el mismo tipo de clasificación, eso sí, con una base cuantitativa en vez de con una comparativa.

Para concluir diremos que este nuevo método desarrollado es más sencillo y más rápido de implementar que el método óptico tradicional, no es subjetivo, lo cual es muy importante, y forma parte de un proyecto europeo en el que participa Sidenor, consistente en medir la segregación de carburo de manera objetiva en los primeros pasos de la línea de producción, para así obtener información sobre las segregaciones suficientemente pronto con el fin de optimizar las variables del proceso.

4.2 Colaboración con CESP A

CESPA, S.A. es una empresa fundada en 1970 cuyas actividades principales son la recogida y tratamiento de residuos, la limpieza urbana, la limpieza de interiores y el mantenimiento de jardinería, y es el líder español en gestión de residuos y mantenimiento de jardinería. Además de en el mercado español, CESP A está presente en Argentina, Portugal y Marruecos.

En la actualidad, CESP A cuenta con más de 12.000 empleados, una flota de más de 3.000 vehículos con capacidad de carga superior a las 10 Tn, y 57 instalaciones de tratamiento. Entre sus clientes públicos se encuentran más de 400 municipios, con un total de más 12.000.000 de habitantes atendidos con al menos un servicio. Además, en gestión de residuos cuenta con una cartera de 9.000 clientes privados.

En 1999 CESP A inició sus actividades de I+D y desde entonces destina a esta actividad el 0,5 % de su facturación, repartida en más de 40 proyectos en los campos de limpieza viaria, recogida de residuos, tratamiento y reciclaje de residuos, y jardinería municipal.

La colaboración con CESP A ha consistido en confeccionar una herramienta informática para utilizarla como *Simulador de la forma más rentable de recoger los residuos sólidos generados en una ciudad*. Ha sido llevada a cabo por Mikel Lezaun, Gloria Pérez Sáinz de Rozas y Eduardo Sáinz de la Maza.

Se trata de simular la recogida de uno o dos tipos de residuos urbanos, por ejemplo materia orgánica y resto, con una frecuencia de seis días, de lunes a sábado, o de siete días a la semana. Hay que resaltar que en este proyecto no se considera una recogida real de los residuos urbanos de una ciudad, y que en ese caso habría que optimizar las rutas de los distintos camiones.

Los medios a utilizar son los distintos tipos de contenedores atendiendo a su tamaño y el tipo de materia que puedan contener, y los camiones de recogida,

que pueden ser de carga lateral (un conductor), bicompartimentados o de carga trasera (un conductor y dos peones). Hay que notar que de cada tipo hay camiones de diferente tamaño. Naturalmente, el coste tanto de compra como de uso de unos u otros es muy diferente. Además, las ciudades tienen zonas que limitan la posibilidad de utilización de determinados medios. Por ejemplo, en un casco histórico no podrán circular camiones muy grandes o no se podrán utilizar camiones de recogida lateral, ya que su uso necesita que las calles sean muy anchas.

La producción de basura en una ciudad básicamente depende del número de sus habitantes, y a efectos de recogida, será mayor la del lunes que la de los restantes días de la semana. A la hora de evaluar los medios necesarios para recogerla, será importante la mayor o menor distancia entre la ciudad y el vertedero, el tiempo de espera en cada descarga, el tiempo que tarda un camión en llenarse, etc., ya que cada jornada de conductor y de camión tiene una duración limitada por convenio y por las normas de cada ayuntamiento.

De forma breve, alimentados los datos (habitantes, producción de basura, distancias, precio de los contenedores, camiones, combustible, gastos de mantenimiento, salarios, etc.), la simulación consiste en resolver un problema de optimización con las restricciones derivadas de las limitaciones de la ciudad y de la duración de las jornadas. Este problema de optimización lo resolvemos con el paquete de optimización LINGO. La solución nos da, además del coste de la recogida, el número de contenedores y de camiones, el número de viajes de cada camión al vertedero en los distintos días de la semana, etc.

Otra colaboración con CESPRA ha consistido en elaborar una herramienta informática que permita una valoración inicial rápida del coste de la limpieza de una ciudad. Esta herramienta está hecha en base a un estudio estadístico, y se puede decir que aquí ha sido esencial la construcción de una buena base de datos homogéneos referentes a los diferentes servicios que se utilizan en la limpieza de las distintas ciudades.

4.3 Colaboración con Metrobilbao

El 11 de noviembre de 1995 se ponía en funcionamiento el metro de Bilbao como solución socialmente más rentable para el transporte masivo de pasajeros en el área metropolitana de Bilbao. La puesta en funcionamiento del metro se ha hecho por fases. Se inauguró con 23 estaciones de la línea 1, actualmente tiene 32 estaciones distribuidas en dos líneas, y cuando esté totalmente terminado tendrá 41 estaciones.

En el año 2002, Metrobilbao realizó 66.705.570 desplazamientos de viajeros, y el récord diario se obtuvo el 21 de diciembre con 274.849. La plantilla actual es de 570 personas, de las cuales 145 son conductores. El número de trenes es 37, con un total de 148 coches. Obviamente, cuando entre en funcionamiento toda la red, todas estas cifras se verán incrementadas.

En este caso el proyecto consiste en el *Diseño de una herramienta software para la planificación anual del servicio de conductores* y está en fase de realización. Intervienen en él Mikel Lezaun, Gloria Pérez Sáinz de Rozas y

Eduardo Sáinz de la Maza.

La asignación de conductores en una empresa de transporte colectivo es un problema difícil, debido tanto a su complejidad como a la gran cantidad de variables que intervienen y, en consecuencia, al gran número de combinaciones posibles que pueden formar parte de la solución buscada. Además, el problema es muy diferente según sea el medio de transporte (avión, autobús, ferrocarril, metro...), la filosofía organizativa de la empresa (conductores con horario fijo, corre- turnos, mezcla de los dos, posibilidad de horas extras...) y los derechos históricos de los trabajadores expresados en distintos convenios colectivos (jornadas de trabajo continuas, limitación de jornadas consecutivas de trabajo, períodos de descanso, días festivos libres, etc.). Por todo ello, la modelación matemática y resolución de este problema depende en gran medida del caso y de las situaciones consideradas, pudiéndose decir que para cada empresa de transporte se tiene que resolver un problema específico.

La asignación de conductores en una empresa como Metrobilbao, en la que las líneas están fijadas, se puede dividir en tres etapas.

1.- Horario de vehículos (Vehicle scheduling)

De acuerdo con la demanda de desplazamientos previstos, a comienzos de cada año el departamento de marketing fija el número de vehículos que tienen que circular en cada franja horaria de cada día del año siguiente. A partir de esto, el departamento de explotación planifica el horario de circulación de los trenes necesarios para cubrir ese servicio, la hora de salida de la cochera, la hora de retirada, períodos en los que un tren está parado, etc. Por ejemplo, en la hora punta de los días laborables de invierno, por el recorrido común a las dos líneas pasa un tren cada dos minutos y medio.

2.- Organización de las jornadas de trabajo (Crew scheduling)

Hechos los horarios de circulación de los trenes y teniendo en cuenta que los conductores trabajan en horario continuo, para cada una de las cuatro estaciones de incorporación de conductores y para cada tipo de día del año, se define las jornadas de conductor necesarias para cubrir el servicio. Cada jornada se caracteriza por ser de mañana, tarde o noche, por la hora de inicio, la de finalización y su duración. En un mismo período, no todas las jornadas de trabajo son iguales, difieren en su hora de comienzo, duración o distribución de los tiempos reales de conducción. También son distintas las jornadas del mismo tipo pero de diferente período, por ejemplo, las noches de los viernes son más cortas que las de los sábados y las de invierno distintas de las de verano.

3.- Asignación de conductores (Rostering)

Una vez determinadas las jornadas de trabajo de cada tipo de período, hay que asignar esas jornadas a conductores concretos. Para ello comenzaremos estableciendo patrones semanales de días de descanso, y luego los distribuiremos entre los conductores de forma que se cubran los servicios a realizar y que la carga de trabajo esté repartida equitativamente entre todos ellos. Así, todos los conductores deben trabajar en un año el mismo número de mañanas, de tardes, de noches y de fines de semana. En su confección y asignación anual hay que tener en cuenta las restricciones impuestas por el servicio, y las derivadas de los derechos históricos de los trabajadores, expresados en sus convenios colectivos.

También habrá que intentar maximizar la satisfacción de los conductores.

En este proyecto, nuestro cometido se limita al último apartado anterior. Lo planteamos como un problema de optimización entera con restricciones lineales, y lo resolvemos utilizando un paquete de optimización comercial, por ejemplo LINGO. La principal dificultad para resolverlo está en las dimensiones que toma el problema.

5 Comentarios finales

Hoy en día, en abstracto, nadie duda de que las empresas tienen que invertir en I+D+i (Investigación, Desarrollo, innovación) y de que se tienen que fomentar las relaciones de colaboración entre la empresa y la universidad. Ahora bien, cuando una empresa se plantea un nuevo proyecto I+D+i y especula sobre los posibles colaboradores, no suele pensar en un departamento de matemáticas de una facultad universitaria, como mucho se dirige a una escuela de ingeniería. Además de por tradición, o por inercia, esto es debido a que en muchos casos no captan las matemáticas que puede haber en el problema y si lo hacen, piensan que los matemáticos estamos en las nubes, que sólo nos preocupamos de nuestras cosas. Luego, si se lleva a término un proyecto en colaboración, su opinión cambia, y suelen estar encantados de haber tomado esa iniciativa.

Evidentemente, si queremos que esto cambie, si queremos que mejore, tenemos que hacer algo, no podemos esperar que sin más vengan a contactar con nosotros proponiéndonos un gran proyecto de investigación aplicada. Ahora bien, ¿qué hacer? Se puede empezar diciendo que tenemos que darnos a conocer, que es necesario que creemos una nueva imagen de la profesión de matemático, no ligada, como hasta ahora, sólo a la de profesor. En esto, como también para que aumente el número de alumnos, los principales embajadores deberían ser nuestros propios estudiantes, y dudamos de que estemos consiguiendo que lo hagan con el suficiente entusiasmo. En cualquier caso, es muy difícil dar una respuesta a estas cuestiones.

En nuestra opinión, un error histórico de los matemáticos en España en los comienzos de la computación fue no considerarla como algo propio, se la tomó como algo no muy matemático, y eso a pesar de que el lenguaje de la informática es lenguaje matemático. Todavía hoy, en muchas ofertas de trabajo, cuando se requieren expertos en informática, se solicitan físicos o ingenieros, sin mencionar a matemáticos.

Una cuestión que está detrás de todo esto es si en nuestro cometido profesional está o no el realizar proyectos de investigación o desarrollo aplicados con empresas. En nuestra opinión, no hay que desdeñar, ni mucho menos, esta actividad. Somos muchos los matemáticos en la universidad y, como colectivo, es algo que debemos realizar y valorar en su justa medida. Además, estos proyectos, que tienen una mecánica muy distinta de la de los habituales en la universidad, suelen resultar muy enriquecedores y satisfactorios para los que los realizan. También hay que decir, porqué no, que muchos proyectos I+D+i están subvencionados por el estado, lo cual puede tener un efecto perverso pues

en algunos casos las empresas sólo los utilizan como meros captadores de fondos públicos.

Por último, pensamos que sería muy interesante que este Boletín sirviera de vehículo para un debate amplio sobre las necesidad o no de relaciones universidad empresa, de cómo abordarlas, de cómo valorarlas como parte de la actividad de un profesor, etc. En este sentido, animamos a todos los grupos de investigación que mantienen o han mantenido este tipo de colaboraciones a que cuenten sus experiencias y su impresión sobre cual es la opinión de las empresas, e incluso de los responsables políticos, de la investigación científica en general.

El “Curso 0” en la Universidad de Sevilla

M. DELGADO

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico,
Universidad de Sevilla

`madelgado@us.es`

Se ha convertido en un tópico hablar de la situación en que acceden los alumnos a la Universidad procedentes de las anteriores etapas de formación. Debido a un amplio conjunto de causas muy complejas y sin que esto suponga crítica negativa alguna para unos profesionales docentes no universitarios que realizan su trabajo en circunstancias a veces durísimas, la realidad es que esta situación es considerada realmente insatisfactoria por quienes deben ocuparse de la cuestión. En este artículo nos ocuparemos de la situación que hemos encontrado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla y las tentativas realizadas en los tres últimos años para abordarla. Indiquemos para empezar que entre quienes se matriculan en nuestra Facultad hay más alumnas que alumnos; sirva esta declaración para reafirmar el sentido genérico que tiene el masculino que se utiliza en todo lo que sigue.

Para centrar el problema, comenzamos indicando algunas realidades con las que nos encontramos:

- De una forma amplia, los alumnos interpretan los teoremas de Matemáticas como las leyes de la Química. De igual forma que no han comprobado la ecuación de los gases perfectos, pero la creen cierta, la aprenden y la utilizan para resolver problemas, aprenden la fórmula que resuelve la ecuación de segundo grado o aceptan que un sistema lineal en el que la matriz del sistema y la matriz ampliada tienen rango diferente es incompatible. Pero no parecen apreciar que hay una serie de razonamientos que nos persuaden, en el caso de las Matemáticas, de que las cosas son así y no de otra manera.
- Como no han aprendido a hacer razonamientos, tampoco conocen las reglas que hay para hacerlos correctamente. Las expresiones “razonamiento por inducción” o “reducción al absurdo” son para muchos de los alumnos absolutamente desconocidas; y su utilización normal por parte de los profesores que imparten clase en Primero no prevenidos tiene

las consecuencias que se puede uno imaginar. Un alumno describía lo sucedido en una clase de Análisis Matemático diciendo que el profesor quería demostrar una cosa, dijo: “por reducción al absurdo”, empezó con algo que no tenía nada que ver con lo que tenía escrito y dijo al final: “¡Contradicción!”.

- Hemos llegado a pensar que el éxito en la enseñanza pre-universitaria viene dado por la superación holgada de la prueba de acceso a la universidad y lógicamente la mayor parte del tiempo y del esfuerzo se dedica a preparar dicha prueba. Esto tiene algunas consecuencias perversas de las que podemos citar algunos ejemplos:
 1. Son frecuentes las preguntas relativas a la geometría del espacio afín y euclídeo, por lo que los alumnos suelen preparar bien estos problemas que vienen incluidos en el programa de 2º de Bachillerato, pero son bastantes más infrecuentes las preguntas relativas a la geometría del plano, que se estudia en 1º de Bachillerato. Puede creerse el lector que si, por alguna razón (retraso en el desarrollo del programa, ausencia de sustituto de un profesor enfermo, etc.), el alumno no estudió la geometría del plano en 1º, no la estudiará tampoco en 2º por falta de tiempo; pero eso no será obstáculo para que “estudie” la geometría del espacio. Y así aparecen en la Facultad algunos alumnos que saben hallar la perpendicular común a dos rectas que se cruzan, pero que ignoran la ecuación general de la recta en el plano o que echan en falta la tercera coordenada cuando se les dan los vértices de un triángulo en el plano.
 2. Sin llegar a casos tan extremos, se encuentran muy olvidadas de forma general aquellas partes de los programas de 1º de Bachillerato que suelen preguntarse menos en las pruebas de acceso, como por ejemplo la trigonometría.
- A muchos de nuestros alumnos les ha bastado hasta el momento de su ingreso en la Universidad con un repaso a los problemas algún día antes del examen para superar el mismo, con lo que es ésta su idea del estudio de las Matemáticas cuando llegan.
- La gran mayoría de las pruebas de Matemáticas que han debido superar los alumnos han sido exámenes de ejercicios o problemas en donde prácticamente nada tienen que escribir. De modo que traen una nula práctica de cómo se escriben las Matemáticas. A las generales dificultades de expresión oral y escrita que suelen tener los universitarios, se añaden las dificultades específicas del lenguaje matemático. Desgraciadamente, este grave problema no se resuelve en muchos casos en toda la Licenciatura.
- Los alumnos que superan las pruebas de acceso en la 1ª Fase (examen de junio) y desean venir a la Facultad de Matemáticas se matriculan en julio o en los primeros días de septiembre y comienzan el curso en los

primeros días de octubre. Los alumnos que aprueban en la 2ª Fase (examen de septiembre) conocen su primera adjudicación de plazas en la segunda quincena de octubre. De modo que estos alumnos, que lógicamente tienen menos nivel y que muchas veces llegan a la Facultad por no poder acceder a la titulación que desean, se incorporan con un retraso de dos o tres semanas a sus clases, lo que supone para muchos un obstáculo insalvable.

Un alumno ingresa en la Facultad con la idea de que saber Matemáticas consiste en saber resolver problemas y se encuentra con una avalancha de teoría que lo desborda, porque su casi nula exigencia de rigor hace que le resulte incomprensible e inútil que alguien demuestre que todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de vectores (se dice: “¡pues claro!”) o que alguien dedique horas a la definición axiomática del número real (se pregunta: “¿esto a qué viene?”). Y al mismo tiempo no sabe si aquello es para aprendérselo de memoria o si sirve para algo más. Quizá haya que dedicar más tiempo a motivar el estudio de la teoría. Y se puede citar por último lo que sucede en ocasiones con la utilización por parte de los profesores del alfabeto griego (que muchos alumnos no saben leer ni escribir) o de los símbolos especiales (factorial, pertenencia, inclusión, . . .), que un alumnado muy pasivo recibe como cualquier otra cosa, sin siquiera preguntar por la denominación.

Por todos estos motivos, desde hace tres años se lleva impartiendo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla una asignatura de libre configuración, el llamado “Curso 0”, que pretende ayudar a resolver algunas de las cuestiones planteadas anteriormente. Esta asignatura es el procedimiento que se encontró para dar validez académica (4,5 créditos en nuestro caso) al trabajo que deben realizar los alumnos para adquirir el nivel inicial adecuado para abordar los estudios superiores, tanto en lo relativo a conocimientos básicos y a la familiarización con un cierto formalismo matemático como en lo relativo a hábitos y métodos de estudio.

Este intento para paliar el grave problema que supone actualmente el salto que los alumnos encuentran al iniciar los estudios de la Licenciatura en Matemáticas o la Diplomatura en Estadística (que son las titulaciones que tienen Primer Ciclo de nuestra Facultad) es muy limitado por varias razones:

- Es una asignatura voluntaria para los alumnos. De modo que los profesores que imparten las asignaturas de Primero no pueden suponer que todos sus alumnos la han cursado.
- En parte, se desarrolla simultáneamente con las asignaturas de Primer Curso, es decir, no es previo a éstas. Los alumnos que proceden de la 1ª Fase de la prueba de acceso pueden comenzar esta asignatura de forma intensiva antes del inicio oficial del curso, de modo que el “Curso 0” no les quite mucho tiempo del que necesitan para estudiar las asignaturas de Primero, que es su objetivo. Pero los alumnos que proceden de la 2ª Fase no pueden empezarla hasta finales de octubre, porque físicamente no se encuentran en la Facultad.

- Tiene una escasa duración para cubrir sus objetivos.
- El hecho de que se imparta no ataca los problemas de fondo existentes, algunos de los cuales exigirían otras medidas que incluirían una revisión a fondo de los programas y la metodología.

Los objetivos que la asignatura persigue explícitamente son, entre otros, los siguientes:

1. Insistir en la necesidad del estudio continuado de las Matemáticas, intentando convencer a los alumnos de la inutilidad del trabajo excesivo en las vísperas de los exámenes para compensar el que no se ha hecho a lo largo del cuatrimestre, antes de que la tozuda realidad se imponga.
2. Insistir en la necesidad de abordar desde el principio los problemas que se proponen. Muchos alumnos adoptan una actitud pasiva y esperan a la clase de problemas donde el profesor va resolviendo ejercicios que los estudiantes van entendiendo y van creyendo que ya saben hacerlos; así llega el momento de la prueba en el que el alumno debe resolver él sólo por vez primera un problema. . . y, naturalmente, no lo hace. Hay que intentar que el alumno se persuada de que solo aprenderá Matemáticas haciendo Matemáticas él mismo.
3. Insistir en la importancia de la tutoría como medio de resolver las dudas que se le plantean al alumno tras haber estudiado y como orientación para dicho estudio. En relación con los puntos anteriores, la tutoría debe llevarse a cabo a lo largo de todo el curso, y no sólo en las vísperas de los exámenes.
4. Indicar a los alumnos que, tras el estudio individual, el trabajo en equipo reducido puede ser una buena metodología para aprender a resolver problemas.
5. Obligar a los alumnos a explicar a sus compañeros los problemas y a escribir ejercicios o cuestiones que son entregadas al profesor y corregidas por éste en el fondo y en la expresión.

Hemos dividido la asignatura que impartimos en dos partes de igual extensión. La primera se ocupa de aspectos que los alumnos mayoritariamente no han estudiado en la enseñanza pre-universitaria. Así, se estudian las leyes del razonamiento formal y el método de inducción, las técnicas de enumeración (con un repaso de la combinatoria), la utilización de las Matemáticas para abordar el estudio del azar (con un repaso del concepto de probabilidad) y una introducción a la teoría de conjuntos que, aunque no incluida en los planes de estudio del Bachillerato, ha sido considerada necesaria, a la vista de nuestro propio plan de estudios. Incluimos algunos ejercicios para que, de forma heurística, mediante ejemplos y preguntas, los alumnos vayan definiendo conceptos matemáticos a partir de ideas intuitivas; por ejemplo, utilizamos la frontera de un conjunto del plano.

La segunda parte se ocupa de aspectos que los alumnos han estudiado mayoritariamente. Entran aquí la trigonometría (muy olvidada, aunque estudiada en su momento), las geometrías del plano y del espacio, el álgebra lineal y el cálculo (conceptos de límite, continuidad, derivabilidad, estudio de funciones, cálculo de primitivas, teorema fundamental del cálculo integral y áreas de figuras planas sencillas).

Ha sido intención explícita de quienes hemos diseñado esta asignatura que los contenidos de la misma no solapen con los que se imparten en las asignaturas del primer curso de las titulaciones; ello nos llevó a la convicción, tras el primer año de impartición de la misma, de que no era adecuada para alumnos repetidores que se manifestaron decepcionados de ella.

Antes de comenzar el curso, a los alumnos se les asigna un tutor, que es siempre uno de los profesores que imparte esta asignatura. Los tutores, que han preparado un guión de tutoría para recabar los mismos datos sobre los alumnos, llaman varias veces a los alumnos a lo largo de la duración de la asignatura y posteriormente para hacerles un seguimiento. Entendemos esta tutoría como una herramienta de orientación general del estudiante y no como un medio que permita resolver las dudas que puedan tener en las otras asignaturas. Y así, para que el tutor tenga una idea de la situación del estudiante, ponemos una prueba inicial antes de comenzar cada una de las partes de la asignatura sobre cuestiones muy generales sobre la que tutor y tutelado tienen un cambio de impresiones en las primeras entrevistas que realizan.

La metodología de las clases es lo más activa posible, debiendo los alumnos resolver los problemas en la pizarra, explicar las dudas a los compañeros, buscar en su caso la información olvidada en los textos del bachillerato, etc. En ocasiones entregan ejercicios por escrito al profesor.

El número de alumnos de cada uno de los grupos (no más de 20) permite un seguimiento efectivo del trabajo de cada uno con un poco de esfuerzo por parte del profesor, y este trabajo es la componente principal para superar la asignatura.

Con todas sus limitaciones, la asignatura es útil para los alumnos. Llegamos a esta convicción a través de las impresiones de los propios alumnos y de los primeros datos, todavía no depurados, que vamos obteniendo de las calificaciones obtenidas en las restantes asignaturas de Primero. De lo que sí podemos dar fe es de la ilusión y el trabajo invertido en su organización y desarrollo por un grupo de profesores de todos los Departamentos con sede en la Facultad y de los que el coordinador de la asignatura que suscribe es sólo el representante. Por cierto, que la asignatura se titula "*Curso preliminar de Matemáticas: técnicas y herramientas*".

La Internacional Matemática. La larga y tortuosa historia de la Unión Matemática Internacional *

M. DE LEÓN¹

¹ Instituto de Matemáticas y Física Fundamental, Consejo Superior de Investigaciones Científicas

mdeleon@imaff.cfmac.csic.es

Resumen

Aunque los matemáticos tienen fama de ser poco sociables, la realidad es bien distinta: los matemáticos se han asociado desde la antigüedad de muy diferentes maneras, desde las sectas pitagóricas a la internacionalización actual, pasando por las diferentes Academias y las sociedades científicas. De hecho, no hay otra ciencia en la que este fenómeno asociacionista se haya dado con tal fuerza. Se pretende en este artículo dar algunas pinceladas sobre este asociacionismo matemático, centrándose en la Unión Matemática Internacional y la situación española.

Palabras clave: *Unión Matemática Internacional*

Clasificación por materias AMS: 01A74, 01A61, 01A65

1 Las Academias

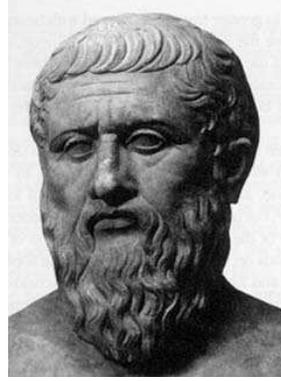
Las matemáticas son una ciencia antigua, quizás la más antigua, y también secreta en sus inicios. Las matemáticas de la antigüedad proporcionaban poder: el conocimiento de los movimientos celestes, la llegada de las cosechas, las medidas de áreas, etc., la convirtieron en una ciencia iniciática. Así que los primeros pasos del asociacionismo matemático fueron por los derroteros del secreto. Y esta componente está presente en las matemáticas babilónicas, en las matemáticas egipcias y en las primeras matemáticas griegas.

En la Grecia clásica, el asociacionismo toma una forma que perdura hasta nuestros días: la Academia de Platón. En los jardines de Academos, en donde “no podían entrar los ignorantes de la geometría”, los académicos debatían sobre lo divino y lo humano, y, cómo no, sobre matemáticas. Quizás pueda decirse que en Grecia nacieron los primeros matemáticos profesionales.

*El autor es Presidente del Comité Organizador del Congreso Internacional de Matemáticas ICM2006 y representante en el Comité IMU de la Real Sociedad Matemática Española

La Academia de Platón

En la entrada a la Academia de Platón, situada en los jardines de Academos, colgaba un letrero que advertía: “No entre aquí nadie ignorante de la Geometría”. Platón, en efecto, creía que el estudio de las matemáticas y la filosofía proporcionaban el entrenamiento más adecuado para aquellos que en el futuro iban a desempeñar puestos de responsabilidad en el estado, como se recoge en la obra *República*, libro en el que debate sobre aritmética, geometría, astronomía, música... En el *Timeo* incluye un debate sobre los cinco sólidos regulares, también llamados platónicos en su honor. En el libro VII de la *República*, Sócrates debate con Glaucón acerca de los estudios que debe emprender el futuro hombre de estado. Sobre el cálculo dice Sócrates: “¿Y no has observado que los calculadores por naturaleza son rápidos, por así decirlo, en todos los estudios, en tanto que los lentos, cuando son educados y ejercitados en este estudio, aunque no obtengan ningún otro provecho, mejoran, al menos, volviéndose más rápidos que antes? — Así es. — Y no hallarás fácilmente, según pienso, muchos estudios que requieran más esfuerzo para aprender y practicar. — No, en efecto. — Por todos estos motivos, no hay que descuidar este estudio, sino que los mejores deben educar sus naturalezas en él.”



Platón

Más adelante, refiriéndose a las dificultades de la geometría de los sólidos, manifiesta: “En efecto, y son dos las causas de ello: la primera es que ningún Estado le dispensa mucha estima y, por ser difícil, se la investiga débilmente; la segunda, que quienes investigan necesitan un supervisor, sin lo cual no podrían descubrir mucho... Pero si el Estado íntegro colabora en la supervisión guiándolos con la debida estima, aquéllos se persuadirían, y una investigación continuada y vigorosa llegaría a aclarar cómo es el asunto, puesto que incluso ahora mismo, en que éste es subestimado y mutilado por muchos, inclusive por investigadores que no se dan cuenta de su utilidad, a pesar de todo esto florece vigorosamente en su propio encanto, de modo que no sería asombroso que se hiciera manifiesto.”

En España se creó tempranamente una *Academia de Matemáticas de Madrid*, en tiempos de Felipe II, Academia de efímera existencia y con el objetivo de enseñar matemáticas para formar pilotos náuticos, arquitectos, ingenieros, lo que prueba que eran muy conscientes de que las matemáticas servían y mucho para la vida práctica.

Otras Academias surgieron en años posteriores, algunas de ellas de un prestigio que no ha parado de crecer desde su fundación y, además, han proporcionado nombres de lo más ilustre para la mayor gloria de las matemáticas: la *Royal Society*, la *Academia de San Petersburgo*, la *Academia de Ciencias de París*, etc.



Felipe II

La Academia Matemática de Madrid

Durante el reinado de Felipe II (1527-1598) se creó la *Academia de Matemáticas de Madrid*, en 1575, antecedente de la moderna *Real Academia de Ciencias*. Estaba constituida por los cosmógrafos, arquitectos e ingenieros que trabajaban para el monarca. La idea de su fundación fue de Juan de Herrera y entre sus objetivos destaca el de fomentar la enseñanza de las matemáticas con vistas a sus aplicaciones prácticas. Durante medio siglo se enseñó en ella matemáticas, cosmografía, geografía mecánica, arquitectura, etc. La Academia también se ocupó de traducir al castellano diversos textos científicos y de la publicación de las obras originales de sus miembros.

La creación de la Academia, por Orden Real firmada en Lisboa, estaba motivada por la preocupación del monarca por el desarrollo científico y tecnológico en España y es destacar que fue pionera en Europa. Lamentablemente, la Academia de Matemáticas desapareció prematuramente, dando lugar a los Reales Estudios del "Colegio Imperial de Madrid", Colegio de San Isidro. En el Colegio Imperial, se crea la cátedra de Matemáticas, ocupada primero por Juan Carlos de la Faille y después por otros extranjeros; en 1670 la pasa a ocupar el físico y matemático José Zaragoza.

2 Creación de las sociedades: hacia IMU

Pasarían muchos siglos hasta que las matemáticas fueran consideradas como una profesión. Durante el siglo XIX se produjo un cambio drástico en la comunidad científica al que no fue ajeno el mundo de las matemáticas. A principios de 1800 la comunidad científica era muy pequeña y había muy pocas revistas científicas. Pero la Revolución Francesa, a continuación las guerras napoleónicas y después la Revolución Industrial, causaron un cambio social sin precedentes. Por una parte, se crea una clase media que se interesaba por los avances científicos y los desarrollos tecnológicos. También, la prosperidad económica comenzó a permitir una educación más generalizada. Las universidades sufrieron un cambio y la investigación comenzó a ser algo tan importante como la docencia. Va aumentando el número de científicos (en particular, de los matemáticos) y se comienzan a crear las sociedades científicas, con una finalidad mucho más profesional que las Academias de Ciencias ya existentes.

A título de ejemplo, se fundan en 1864 la *Sociedad Matemática de Moscú*, en 1865 la *London Mathematical Society*, en 1872 la *Société Mathématique de France*, en 1884 el *Circolo Matematico di Palermo*, en 1888 la *New York Mathematical Society* (convertida en la *American Mathematical Society* en 1894), en 1890 la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* y, en 1911, se crea la *Sociedad Matemática Española* (*Real* desde 1929).

A la vez, comienza a extenderse un afán de cooperación internacional facilitado por los avances en las comunicaciones, y se celebran, como veremos, los primeros congresos internacionales.

Es de destacar la cooperación internacional matemática, sin parangón en otras ciencias. Por ejemplo, una revista de reviews de matemáticas, el *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* se fundó en Alemania en 1871: en el primer volumen, los reseñadores son alemanes, pero a partir del segundo ya son de varios países. En 1885, los franceses crearon el *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques*.

Es evidente que el valor universal de las matemáticas es un valor globalizador que no todas las ciencias exhiben con tanta propiedad.



G. Cantor

Y comienzan a oírse voces que demandan una mayor cooperación internacional en las matemáticas. Es Georg Cantor, quién lanza la primera voz en esa dirección en 1888. En 1890 se convierte en el primer presidente de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung y ya tiene en mente la necesidad de realizar un congreso internacional de matemáticos (tal y como escribe Walther von Dyck a Felix Klein):

“G. Cantor me escribió recientemente sobre sus planes concernientes a un congreso internacional de matemáticos. Realmente no sé si esto es una necesidad”.

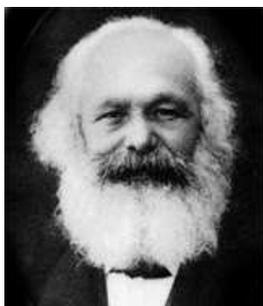
Esta idea fue transmitida por Cantor a varios matemáticos como Vassiliev, Hermite, Poincaré, Jordan y otros.



F. Klein

Un contemporáneo de Cantor fue Felix Klein quien, a pesar de no hacer muy buenas migas con él, coincidió con sus ideas de realizar un congreso internacional. Pero Klein fue incluso mas allá. En el Congreso de Matemáticas y Astronomía de Chicago en 1893, coincidente con la Exposición Colombina (congreso que, dicho sea de paso, no fue muy internacional ya que sólo 4 matemáticos no estadounidenses participaron en el evento), Klein hizo un discurso importante, titulado, “El estado actual de las matemáticas”. Y su grito de guerra fue exactamente el que motivó a Marx y Engels en el Manifiesto Comunista: “Matemáticos del mundo entero, ¡uníos!”. Y es que las alianzas de

las grandes potencias a finales del siglo XIX iban configurando el primer gran enfrentamiento de la Gran Guerra de 1914, y los más idealistas propugnaban la unión de los hombres en todos los ámbitos de la vida.



K. Marx



F. Engels

El Manifiesto comunista

Un fantasma recorre Europa: el fantasma del comunismo. Todas las fuerzas de la vieja Europa se han unido en santa cruzada para acosar a ese fantasma: el papa y el zar, Metternich y Guizot, los radicales franceses y los polizontes alemanes.

¿Qué partido de oposición no ha sido motejado de comunista por sus adversarios en el poder? ¿Qué partido de oposición, a su vez, no ha lanzado, tanto a los representantes de la oposición más avanzados, como a sus enemigos reaccionarios, el epíteto zahiriente de comunista?

De este hecho resulta una doble enseñanza: Que el comunismo está ya reconocido como una fuerza por todas las potencias de Europa. Que ya es hora de que los comunistas expongan a la faz del mundo entero sus conceptos, sus fines y sus tendencias; que opongan a la leyenda del fantasma del comunismo un manifiesto del propio partido.

Con este fin, comunistas de las más diversas nacionalidades se han reunido en Londres y han redactado el siguiente Manifiesto, que será publicado en inglés, francés, alemán, italiano, flamenco y danés.

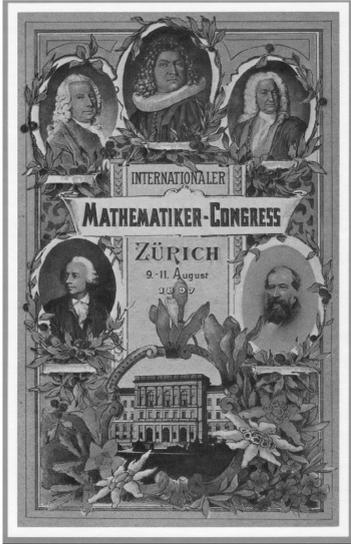
Karl Marx, Friedrich Engels: Manifiesto Comunista, 1847.

Es interesante reproducir las palabras de F. Klein:

“Los famosos investigadores de la primera parte del siglo XIX- Lagrange, Laplace, Gauss- fueron capaces de abarcar todas las ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Con la siguiente generación, sin embargo, se manifestó la tendencia a la especialización. Así la ciencia en desarrollo se ha ido apartando más y más de sus fines originales sacrificando su inicial unidad y dividiéndose en diversas ramas”.

Se refería después a los mutuos beneficios de las sociedades matemáticas existentes y concluía:

“Pero los matemáticos deben ir más lejos. Deben formar uniones internacionales, y confío en que este Congreso Mundial de Chicago será un paso en esta dirección”.



Cartel anunciador del Congreso Internacional de Matemáticos de Zurich, 1897

Poco después, Cantor retomó el tema, ya con algunas ideas concretas de lo que debía ser tal asociación internacional, pero sus intenciones no llegaron a cuajar.

En Francia, Laisant y Lemoine tomaron estas ideas en consideración en 1894, y en el primer volumen del *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, expresaron pensamientos similares a los de Klein: antiguamente, los científicos ocultaban sus métodos, pero ahora los matemáticos quieren dar a conocer inmediatamente sus resultados, se comienza a sustituir el esfuerzo individual por el colectivo.

Se iba imponiendo la idea de un Congreso Internacional de Matemáticos, y éste se acabó celebrando en Zurich en 1897.

3 Nacen los ICM e ICMI

Circulaba la idea de hacer ese congreso constituyente en Zurich en 1897 y, a continuación, uno en París en 1900, siguiendo ya unas reglas fijas. En Zurich tomaron parte 208 matemáticos de 16 países, aquello sí fue ya un congreso internacional. Como curiosidad, los idiomas oficiales fueron el francés y el alemán, permitiéndose el inglés y el italiano. Allí se decidieron los objetivos de tales congresos:

- Promover las relaciones personales entre los matemáticos de diferentes países.
- Dar surveys de temas de matemáticas de actualidad.
- Aconsejar a los organizadores del congreso siguiente.
- Tratar de temas como terminología, bibliografía, que requerían cooperación internacional.

Se nombró una Comisión Ejecutiva en Zurich. Quizás convenga recordar unas frases de entonces debidas a Adolf Hurwitz que son muy pertinentes al tema que nos ocupa y describen muy bien las dos caras de los matemáticos:

“Las grandes ideas de nuestra ciencia a menudo nacen y maduran en soledad; ninguna otra rama de la ciencia, con excepción quizás de

la filosofía, poseen tal carácter introvertido como las matemáticas. Y aún así, un matemático siente la necesidad de comunicarse, de participar en discusiones con los colegas”.

Los *International Congress of Mathematicians* (ICM) se van celebrando sin tregua: París 1900 (famoso entre los famosos), Heilderberg 1904, Roma 1908. Este último es destacable por dos razones: se vuelve a hablar de la necesidad de una asociación internacional (Klein y Cantor de nuevo en el candelero) y se decide la creación de un Comité Central (Klein, Greenhill y Fehr) para debatir los problemas de la educación matemática: “El Congreso, reconociendo la importancia de un estudio comparativo de los métodos y planes de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias, encarga a los Profesores F. Klein, G. Greenhill y Henri Fehr que constituyan una Comisión Internacional para estudiar estas cuestiones e informar en el próximo Congreso”. Asistimos al nacimiento del *International Committee of Mathematical Instruction* (ICMI), que desempeña una gran actividad en los años siguientes. En 1912, los matemáticos se mueven a Cambridge (UK), y en 1916 ya no se puede celebrar el ICM en Estocolmo a causa de la Primera Guerra Mundial. En 1920 se celebra en Estrasburgo, pero la comunidad internacional había salido muy tocada por la guerra.

En la Asamblea General en Bruselas del *International Research Council* (IRC), antecesor del *International Council of Scientific Unions* (ICSU), se ponen las bases para la creación de la IMU, la *International Mathematical Union*. Ésta se funda en el ICM de Estrasburgo en 1920, pero nace muerta. La marginación de las potencias centrales europeas (Alemania, Austria, Hungría y Bulgaria) establecida en los estatutos de IMU, a pesar de la invitación a unirse al IRC en 1926, hace insostenible la situación. Por ejemplo, en Bolonia en 1928, los alemanes asisten, aunque los estatutos vigentes se lo impedían. Finalmente, en 1932, la IMU suspende sus actividades.

4 El interregno (1933-1951)

A pesar de estar suspendida, es en 1936 cuando se conceden por primera vez las *medallas Fields* (el máximo galardón para los matemáticos), como fue acordado en Toronto en 1924. Y la ICMI, suprimida al crearse la IMU en 1920, volvió a la actividad, que termina con la Segunda Guerra Mundial, de modo que cuando se refunda la IMU, la ICMI se convertirá en una subcomisión. En este período, hubo un intento fallido de recomponer la IMU, pero hay que esperar al final de la segunda guerra mundial para que este hecho se produzca.

5 La refundación (1951)

Tras la segunda guerra mundial, y a pesar del nacimiento de la guerra fría, el ICM de 1950 se celebra en Cambridge, USA. Es en 1947 la *Société Mathématique Française* (SMF) quien toma las riendas para la refundación, aunque ya los

norteamericanos se lanzan a un nuevo ICM. Y proclaman que no hay nada que hacer si va a haber restricciones. Marshal Stone, que fue presidente de la American Mathematical Society, lidera este proyecto de refundación, en el que defiende no excluir a Rusia (a pesar del escaso interés soviético por pertenecer a las organizaciones científicas mundiales).



M. Stone

Se preparan unos estatutos y, en 1951, la IMU vuelve a la existencia. En los años próximos va configurándose hasta la forma actual. España entra en 1952 en el grupo II. Habrá problemas causados por la guerra fría (ICM de Varsovia), pero la IMU ya es una realidad cuya fuerza continua creciendo hasta nuestros días.

6 La situación en España

En España se creó la Sociedad Matemática Española en 1911, culminando un proceso que comenzó en 1903, fruto del afán regeneracionista de la época. La presencia internacional es escasa. Una excepción notable es la de Zoel García de Galdeano, presente en los primeros congresos internacionales y muy activo en el ICMI, elegido en 1916 presidente de la SME. En 1929 la SME pasa a ser la *Real Sociedad Matemática Española*, por una orden otorgada por Alfonso XIII. Además, el Príncipe de Asturias pasó a ocupar la Presidencia de Honor de la sociedad. Cuando llega la Segunda República, pasa a ser otra vez la SME y recupera la R al final de la Guerra Civil.

La RSME de la posguerra tiene una actividad notable hasta su degeneración, que comienza al inicio de los años 1980. Hasta entonces, participa activamente en la vida académica y científica española. En 1931 se creó la *Societat Catalana de Matemàtiques*, cubriendo las naturales apetencias de los matemáticos catalanes. En 1962 nació la *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa* (SEIO) y, más recientemente, la *Sociedad Española de Matemática Aplicada* (SĒMA) en 1991. Se crea también la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM). La ausencia del panorama de la RSME en casi 10 años es la principal causa de que nazca un fenómeno de asociacionismo de los profesores de secundaria en sociedades regionales que se confederan en la FESPM (19 sociedades hasta el momento, un número quizás excesivo que dispersa recursos humanos tan necesarios). En diciembre de 1996 se refunda la RSME y desde entonces el panorama matemático español está sufriendo los cambios más importantes en toda su historia. En 1998, la RSME coordinó la reconstitución del Comité IMU-España, en colaboración con la SCM, SĒMA y SEIO. Se espera conseguir un Comité mucho mejor vertebrado, a imagen del Comité IMU internacional, en 2004.

Un cambio profundo se está produciendo en España, y podríamos decir que “un fantasma llamado matemáticas recorre nuestro país”. Una tarea

pendiente durante muchos años está comenzando a ser una realidad: la vertebración de la comunidad matemática iberoamericana. La RSME, siempre de la mano de las sociedades hermanas, está trabajando ya en esa dirección. En particular, en septiembre de 2003, se celebró el Primer Encuentro de Sociedades Latinoamericanas de Matemáticas, del que se esperan grandes consecuencias.

Hoy día, las cuatro sociedades matemáticas españolas, RSME, SEIO, SĕMA y SCM, trabajan unidas en un proyecto pleno de ilusiones, la celebración en 2006 en España del primer Congreso Internacional de Matemáticos. Nuestras matemáticas celebrarán entonces su mayoría de edad. En el camino, se confía en pasar a España del grupo III al grupo V, compartiendo el nivel de las grandes potencias matemáticas (el grupo indica el número de delegados en la Asamblea General de IMU). Ésta es una ocasión histórica. Tras el ICME de Sevilla en 1996 y el 3ECM de Barcelona en 2000, afrontamos ahora el mayor reto de nuestras matemáticas. Tenemos un Horizonte 2006 que deberíamos utilizar como instrumento de cohesión para la mejora de la enseñanza matemática en la secundaria y las universidades y para conseguir una mayor apreciación pública de nuestra ciencia. A la vez, podremos reflexionar sobre la multitud de oportunidades que la ciencia y la innovación ofrecen a los matemáticos en el siglo que iniciamos. El año 2006 debe mostrar una comunidad matemática española fuerte, unida, vertebrada por medio del Comité IMU-España y sus diferentes comités y comisiones. Parafraseando a Hilbert, tenemos que hacerlo y lo haremos.

Matemáticas en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas

La historia de las Matemáticas en el CSIC es la historia de un desencuentro. Desde el Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios, hasta el Instituto de Matemáticas Jorge Juan, la disciplina ha pasado por múltiples sinsabores. Hoy día, el CSIC, el buque insignia de la ciencia española, no cuenta con un Instituto de Matemáticas propio, y la disciplina no figura como área diferenciada. Esto está causando una disfunción evidente así como un debilitamiento del potencial matemático español. Los matemáticos no poseen un referente en el nuevo Ministerio de Ciencia y Tecnología y no participan de manera adecuada en la red de Institutos de Matemáticas de Europa (ERCOM, <http://www.crm.es/ERCOM/>). Confiamos en que, tras 20 años de sequía matemática en el CSIC, este organismo vuelva a cuidar una de sus ramas más estratégicas.

Referencias

- [1] Página Web de IMU (<http://elib.zib.de/IMU/>).
- [2] O. Lehto, *Mathematics without borders: A History of the International Mathematical Union*, Springer, Berlín, 1998.
- [3] J.L. Fernández, M. de León, *Las Matemáticas en España*, Mundo Científico, no. 219 (2001), 46-53.
- [4] M. de León, *A Internacional Matemática*, Gamma, no. 2, (2002), 95-100.

Título:	DESARROLLO DE ESQUEMAS NUMÉRICOS PARA EL TRATAMIENTO DE FRENTE SECO-MOJADO EN SISTEMAS DE AGUAS SOMERAS.
Doctorando:	José Manuel González Vida.
Director/es:	Carlos Parés Madroñal, Manuel Jesús Castro Díaz.
Defensa:	30 de Septiembre de 2003, Málaga.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude (por unanimidad).

Resumen: En esta tesis se aborda la simulación de fluidos de aguas someras (o poco profundas) en los casos de una y dos capas, tratando de manera específica y desde distintas perspectivas las dificultades numéricas asociadas a la aparición de zonas sin agua (frentes seco-mojado) en el dominio de cálculo, así como la evolución temporal de éstas. En todos los casos no se consideran los efectos viscosos en las direcciones horizontales. Aunque estos efectos pueden ser de importancia en las aplicaciones, esto se hace con el objetivo de evaluar la capacidad de los esquemas numéricos que se proponen para simular adecuadamente fenómenos de naturaleza hiperbólica, como son los frentes de superficie, los frentes internos, saltos hidráulicos o las ondas de rarefacción.

Los contenidos de la tesis doctoral se hallan agrupados en tres bloques. El primero de ellos estaría constituido por los tres primeros capítulos, en los cuales se proponen sucesivos esquemas para la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras unidimensionales para el caso de un fluido homogéneo (de una sola capa) mediante elementos finitos lagrangianos, mixtos y volúmenes finitos, respectivamente. En el segundo bloque, formado por los capítulos 4 y 5, se consideran flujos bicapa en canales de sección rectangular primero y en canales de secciones arbitrarias a continuación. Por último, el tercer bloque lo constituye el capítulo 6, en el cual se presentan esquemas numéricos para las ecuaciones de aguas someras bidimensionales para fluidos homogéneos.

En este trabajo se lleva a cabo una validación exhaustiva de los esquemas numéricos que se proponen, presentándose además diversas aplicaciones a problemas reales y de gran interés (científico, socioeconómico, medioambiental, etc.). En particular, se presenta una simulación del flujo bicapa a través del Estrecho de Gibraltar donde se incluye el forzamiento de marea y otra simulación de la rotura de la presa de aguas tóxicas de Aznalcóllar.

Polinomios Hipergeométricos y q -Polinomios

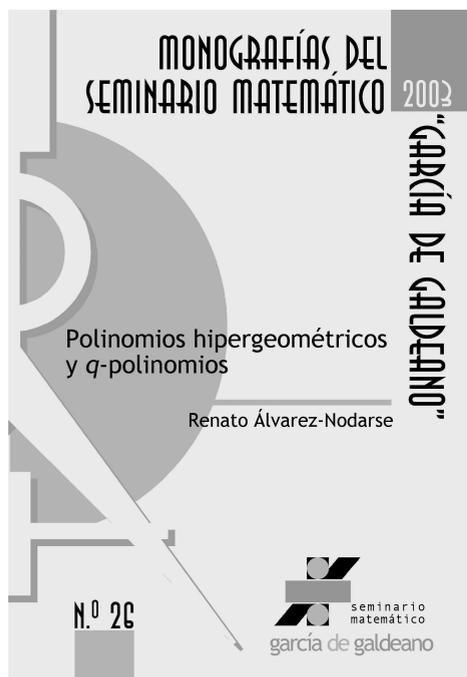
Renato Alvarez Nodarse

Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano. Número 26. Zaragoza 2003.

ISBN: 84-7733-637-7 (343 páginas)

Por F. Marcellán

Esta monografía es una versión corregida (actualizada en resultados y citas bibliográficas así como sustancialmente ampliada) de la Tesis Doctoral de Renato Alvarez Nodarse, que fue realizada bajo mi dirección en la Universidad Carlos III de Madrid. En la actualidad el autor es profesor titular de Análisis Matemático en la Universidad de Sevilla. En mi opinión, constituye una excelente presentación del estado del arte en la teoría de polinomios ortogonales basada en una novedosa aproximación que bebe de las fuentes de dos físicos-matemáticos soviéticos (permítaseme ese desliz políticamente incorrecto en estos momentos): Arnold F. Nikiforov y Vasili B. Uvarov. Renato Alvarez Nodarse rinde un cálido homenaje a estos dos maestros, cuya labor no ha sido suficientemente reconocida en la



matemática “occidental” pese a ser autores de dos de las monografías de referencia para los investigadores interesados en la teoría de polinomios ortogonales y sus aplicaciones. (Véanse [2] y [3]).

En el capítulo 1 se presenta una introducción histórica identificando los matemáticos que han realizado las aportaciones más relevantes en este dominio científico. En el capítulo 2 se desarrollan las propiedades generales de los polinomios ortogonales mientras que en el capítulo 3 se describen las diferentes caracterizaciones de los polinomios llamados clásicos (Hermite,

Laguerre, Jacobi y Bessel). Estos polinomios son autofunciones de un operador diferencial de segundo orden con coeficientes polinómicos y la ortogonalidad es una consecuencia directa de este hecho. Por otra parte, su representación hipergeométrica sirve de base para las extensiones que se describen en la Tabla de Askey [1]. Los polinomios de variable discreta (Charlier, Meixner, Kravchuk y Hahn) estudiados en el capítulo 4 surgen como autofunciones de un operador en diferencias de segundo orden, que resulta de la discretización del operador diferencial hipergeométrico antes descrito. Esta discretización corresponde a una red uniforme. Mediante un proceso de paso al límite se obtienen los polinomios clásicos. Los capítulos 5 y 6 contienen los resultados más relevantes y originales. La aproximación se basa en la utilización de ecuaciones en diferencias de tipo hipergeométrico en una red no uniforme. La idea central es que las redes para las que la anterior ecuación admite como autofunciones familias de polinomios de tipo hipergeométrico se reducen a un modelo sencillo basado en expresiones exponenciales del parámetro de la red. Los correspondientes polinomios se obtienen a partir de fórmulas de Rodrigues y mediante representaciones q -hipergeométricas. En particular, se describen, en el caso de la red geométrica, todas las familias posibles junto a un análisis comparativo de las tablas de Hahn, Askey y Nikiforov-Uvarov. En el capítulo 7 se estudian la distribución media y asintótica de los ceros de los q -polinomios ortogonales a partir de los parámetros de la relación de recurrencia a tres términos que satisfacen dichos polinomios. Finalmente, en el capítulo 8 se muestran variadas aplicaciones en Mecánica Cuántica y en la teoría de representación de grupos, que constituyeron la vía iniciática de Renato Alvarez Nodarse a los polinomios ortogonales en sus lejanos años moscovitas.

El libro está cuidadosamente presentado lo que hace amena su lectura, a la par que transmite la pasión del investigador por sus resultados y el análisis crítico de otras aportaciones. La distribución de las tablas conteniendo los parámetros característicos es realmente útil para la consulta del lector necesitado de ellas. Una recomendación final: Una edición en la “lingua franca” científica permitiría divulgar esta monografía en el seno de la comunidad “polinómica” internacional cuyas referencias bibliográficas están conociendo una auténtica revolución en los últimos cinco años frente a los paradigmas dominantes en el siglo pasado.

Un resumen en castellano e inglés así como una fe de erratas pueden consultarse en <http://merlin.us.es/~renato/q-libro/>

- [1] ANDREWS G. E., ASKEY R., ROY R., Special Functions. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.1999.
- [2] NIKIFOROV A.F., UVAROV V. B., Special Functions of Mathematical Physics. Birkhauser Verlag, Basel. 1988.
- [3] NIKIFOROV A.F., SUSLOV S. K., UVAROV V. B., Classical orthogonal Polynomials of a Discrete Variable.. *Springer Series in Computational Physics*. Springer Verlag, Berlin. 1991.