

S \bar{e} MA
BOLETÍN NÚMERO 32
Junio 2005

sumario

Editorial	5
Opini3n	7
<i>Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela</i> , por P. Quintela	7
<i>El Instituto de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela</i> , por J. J. Nieto	13
<i>CNMAT: Estructura y Objetivos</i> , por F. Marcellán	17
<i>La I+D en España</i> , por J. M. F. Labastida	21
<i>Entrevista a Jesús M. Sanz Serna, Rector de la Universidad de Valladolid</i>	29
Artículos	33
<i>Análisis de algunas propiedades de los Grafos Circulantes en la modelizaci3n de redes</i> , por M.C. Espinel, C.E. Ramos y R.M. Ramos	33
<i>A review of basic theoretical results concerning the Navier-Stokes and other similar equations</i> , por E. Fernández-Cara	45
<i>Blow-up. El problema matemático de explosi3n para ecuaciones y sistemas de reacci3n difusi3n</i> , por A. de Pablo, R. Ferreira, F. Quir3s y J.L. Vázquez	75
<i>Un estudio de esquemas bien equilibrados en sistemas hiperb3licos no homogéneos</i> , por E. D. Fernández-Nieto	113
Matemáticas e Industria	135
<i>Las Matemáticas en las instituciones financieras</i> , por E. Fontecha	135
Historia de las Matemáticas	149
<i>John von Neumann: de la matemática pura a la matemática aplicada</i> , por J. I. Díaz	149
Resúmenes de tesis doctorales	171
Anuncios	173

Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada SĒMA

Grupo Editor

L. Ferragut Canals (U. de Salamanca) E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
F. Andrés Pérez (U. de Salamanca) M.I. Asensio Sevilla (U. de Salamanca)
M.T. de Bustos Muñoz (U. de Salamanca) A. Fernández Martínez (U. de Salamanca)

Comité Científico

E. Fernández Cara (U. de Sevilla) A. Bermúdez de Castro (U. de Santiago)
E. Casas Rentería (U. de Cantabria) J.L. Cruz Soto (U. de Córdoba)
L. Ferragut Canals (U. de Salamanca) J.M. Mazón Ruiz (U. de Valencia)
I. Peral Alonso (U. Aut. de Madrid) J.L. Vázquez Suárez (U. Aut. de Madrid)
L. Vega González (U. del País Vasco) E. Zuazua Iriondo (U. Comp. de Madrid)

Responsables de secciones

Artículos: E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
Matemáticas e Industria: M. Lezaun Iturralde (U. del País Vasco)
Educación Matemática: R. Rodríguez del Río (U. Comp. de Madrid)
Historia Matemática: J.M. Vegas Montaner (U. Comp. de Madrid)
Resúmenes: F.J. Sayas González (U. de Zaragoza)
Noticias de SĒMA: C.M. Castro Barbero (Secretario de SĒMA)
Anuncios: Ó. López Pouso (U. de Santiago de Compostela)

Página web de SĒMA

<http://www.sema.org.es/>

Dirección Editorial: Boletín de SĒMA. Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37008. Salamanca. boletin_sema@usal.es.

ISSN 1575-9822.

Depósito Legal: AS-1442-2002.

Imprime: Gráficas Lope. C/ Laguna Grande, parc. 79, Políg. El Montalvo II 37008. Salamanca.

Diseño de portada: Luis Ferragut Alonso.

Consejo Ejecutivo de la Sociedad Española de Matemática Aplicada
SĒMA

Presidente

Juan Ignacio Montijano Torcal

Vicepresidente

Mikel Lezaun Iturralde

Secretario

Carlos Manuel Castro Barbero

Tesorera

María Pilar Laburta Santamaría

Vocales

Jose Antonio Carrillo de la Plata

Javier Chavarriga Soriano

Javier de Frutos Baraja

José Manuel Mazón Ruiz

Ireneo Peral Alonso

José Javier Valdés García

Enrique Zuazua Iriondo

Estimados socios:

En este nuevo número del Boletín de SĒMA podéis encontrar, como ya anunciamos, una reseña sobre el Dpto. de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela que su actual directora, la Prof. Peregrina Quintela nos ha hecho llegar, desde aquí nuestro agradecimiento, al igual que a sus colaboradores del área. Desde esta misma Universidad, el director de su Instituto de Matemáticas, el Prof. Juan José Nieto, nos informa de los objetivos y actividades del IMAT. El Prof. Francisco Marcellán nos invita a reflexionar sobre el futuro de un Centro Nacional de Matemáticas. El Prof. José M.F. Labastida nos presenta un interesante artículo sobre la I+D en España. La sección de opinión se cierra con una entrevista al Prof. Jesús M. Sanz Serna, actualmente Rector de la Universidad de Valladolid.

Como es habitual, el grueso del boletín lo forman cuatro artículos científicos de contenido variado, así como un artículo en el marco de la sección de Matemática e Industria, en esta ocasión relacionado con el ámbito financiero. A todos los autores y responsables de secciones nuestro agradecimiento por su colaboración.

La novedad de este número es la incorporación de una nueva sección sobre **Historia de las Matemáticas** dirigida por el Prof. José Manuel Vegas Montaner. En esta sección se pretende dar cabida a artículos más extensos en los que se puede abordar en cierta profundidad la génesis y desarrollo de un problema o una vida científica interesante, y otras contribuciones más breves y menos técnicas en las que nuestros lectores puedan comunicarnos experiencias y hallazgos interesantes y curiosos en la fatigosa -pero reconfortante- labor de rastrear los antecedentes de un problema relevante. ¿Cuántas veces no habremos encontrado, con sorpresa, que el artículo pionero que marca el inicio de un nuevo problema o paradigma es totalmente incomprensible, y que ha sido el proceso de *digestión* del mismo por parte de otros lo que ha permitido su accesibilidad a todos los demás? ¿Y cuántas veces nos habremos tirado de los pelos por no haber acudido *antes* a dicha referencia inicial, ahorrándonos versiones supuestamente más generales, extensiones y abstracciones improcedentes, en definitiva, subproductos contaminantes poco deseables?. Por ello queremos animar a nuestros lectores a que nos envíen comentarios breves (sin necesidad de que sean 100 % originales) sobre la evolución histórica de problemas de interés general, siempre con la idea de captar la atención de colegas que quizá conocen el estado actual de un tema pero no están familiarizados con sus raíces.

De nuevo nuestro agradecimiento a todos los que han colaborado de una forma u otra en la elaboración de este número que teneis en las manos.

Os animamos a todos a participar en cualquiera de las secciones, para seguir haciendo posible la edición de estos boletines que son de todos.

Grupo Editor
boletin_sema@usal.es

El Área de Matemática Aplicada en la Universidad de Santiago de Compostela

P. QUINTELA

Directora del Dpto. de Matemática Aplicada. USC

Orígenes y situación actual

El germen del actual Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela (USC) surge en el curso 1973-74 cuando el Catedrático de Análisis Matemático D. Antonio Valle González concierta con los Profesores Jacques Louis Lions y Alain Bensoussan una estancia para los entonces recién licenciados D. Alfredo Bermúdez de Castro y D. Carlos Moreno González en el Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) en su sede de Rocquencourt. Comienza así un proceso de desarrollo del área de Matemática Aplicada dentro del entonces Departamento de Ecuaciones Funcionales de la USC, al que se irán incorporando nuevos licenciados y que se consolida en el año 1986 con la creación del Departamento de Matemática Aplicada con un total de cinco doctores investigando en el área: un catedrático, un titular y tres profesores contratados. El primer director fue D. Juan Manuel Viaño Rey (1986-1992), relevado por D. Alfredo Bermúdez de Castro (1992-2004), ostentando este cargo en la actualidad Dña. Peregrina Quintela Estévez.

En el curso 1986-87, el encargo docente de las materias de Matemáticas de las titulaciones existentes en los Campus de Lugo, A Coruña, Ferrol y Vigo se realiza al nuevo Departamento de Matemática Aplicada, al que se incorporan al mismo tiempo los profesores que ya venían impartiendo estas materias; así, en su primer año de funcionamiento, el departamento alcanza los treinta y cuatro profesores. A lo largo de los siguientes años, en los que la dotación de plazas universitarias se llevó a cabo con criterios exclusivamente docentes, el área pasó por una etapa de rápida expansión. La segregación de las universidades de A Coruña y Vigo hizo que el número de profesores experimentara, en 1990, un inevitable descenso, pero la vitalidad del área, con encargos docentes en más de una docena de titulaciones, ha permitido alcanzar las cifras actuales de 29 profesores -22 de ellos doctores- entre los dos Campus de Lugo y Santiago: 3 CAT-UN, 14 TIT-UN, 3 TIT-EU, 3 ASO-UN, 4 ASO-EU y 2 Becarios de Investigación. Completan el área 9 investigadores asociados a contratos. La evolución del profesorado puede verse en el siguiente gráfico:



Infraestructura

Los profesores del área destinados en el Campus Compostelano tienen sus despachos en la sede del departamento, situada en la Facultad de Matemáticas, mientras que los destinados en el Campus Lucense lo tienen en la Escuela Politécnica Superior. Además de una completa dotación informática, cabe destacar el equipamiento multimedia y la disponibilidad de diverso software comercial destinado a la simulación numérica, del que se benefician tanto los estudiantes que, así, obtienen una completa formación teórico-práctica, como los investigadores al disponer de herramientas de última generación para dar respuesta a las demandas de empresas, organismos e instituciones. En concreto, el área dispone de licencias de MATLAB, FEMLAB, PATRAN, NASTRAN, MARC, ACTRAN, FLUENT, MIKE, ECOLAB y ENSIGHT.

Docencia en estudios de grado

El área de Matemática Aplicada de la USC imparte docencia en las titulaciones de Matemáticas, Biología, Química y Óptica y Optometría; en las Ingenierías Química, Agrónoma y de Montes y en las Ingenierías Técnicas de Informática de Sistemas, Agrícola, Forestal, Industrial, Obras Públicas y Topografía. En todas ellas, la enseñanza de las Matemáticas busca la integración con el resto de las materias de la titulación mediante la realización de ejercicios y aplicaciones especialmente adaptados al currículum de los estudiantes. Particularmente importante es el compromiso del área con la titulación de Matemáticas en la que soporta la especialidad de Matemática Aplicada.

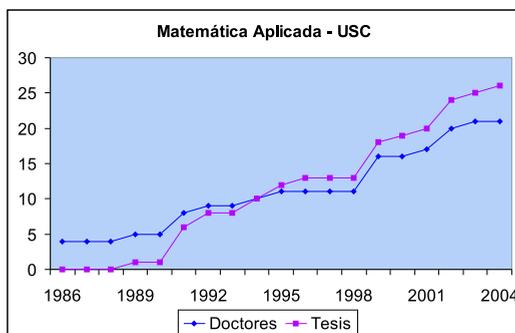
Desde el curso académico 2002-03 se viene haciendo un gran esfuerzo en la incorporación de las nuevas tecnologías al aprendizaje de las Matemáticas; en el curso actual 25 materias cuentan con un curso virtual de apoyo a la docencia. También es importante el compromiso con la incorporación al espacio europeo de educación superior; para progresar en este camino hay actualmente en marcha dos experiencias piloto manejando los nuevos criterios docentes y están previstas siete nuevas en el próximo curso.

Docencia en postgrado

En el año 1987 se puso en marcha el primer programa de doctorado del área. En su primera concepción, los objetivos eran la formación de

nuevos Investigadores-Profesores en Matemática Aplicada con una formación asimilable a la de otros centros españoles y extranjeros de reconocido prestigio. Cumplido este primer objetivo con la formación de 24 nuevos doctores, y atendiendo a la realidad académica e industrial actual, en el año 2003 se transformó este programa de doctorado en un programa inter-universitario de *Métodos Matemáticos y Simulación Numérica en Ingeniería y Ciencias Aplicadas* con la participación de grupos de Matemática Aplicada de las Universidades de A Coruña y Vigo. El objetivo es formar a licenciados, ingenieros o arquitectos tanto en el manejo de herramientas de simulación numérica y su aplicación a la resolución de procesos industriales y empresariales, como para realizar una tesis doctoral, sea con una vertiente de Computación o de Análisis Numérico. Para ello, el programa se estructura en cuatro bloques: *modelos matemáticos* en la mecánica de sólidos y fluidos, electromagnetismo, acústica, medio ambiente y economía; *análisis de las ecuaciones* que intervienen en los modelos; *métodos numéricos y computacionales* para la simulación numérica de problemas industriales y empresariales con la utilización del software comercial adecuado, y *temas avanzados en Matemática Aplicada*. En el segundo año del programa el alumno cuenta con una oferta de más de 50 trabajos de investigación tutelados, entre ellos, muchos han sido propuestos por empresas en los Foros de Interacción Matemática Aplicada-Industria, que están organizando con éxito los grupos de investigación que soportan el programa. Este programa de doctorado cuenta con la *mención de calidad del Ministerio de Educación y Ciencia* desde su puesta en marcha.

En el siguiente gráfico se observa la evolución del número de doctores del área y el de tesis doctorales dirigidas. Actualmente, el 30% de los nuevos doctores desarrollan su actividad fuera de la USC.



Investigación

El área se organiza en tres grupos de investigación:

- **Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) y simulación numérica en Ingeniería**, dirigido por D. Alfredo Bermúdez de Castro, desarrollando líneas de investigación sobre *resolución numérica de EDPs*; *simulación numérica de procesos* con aplicaciones en mecánica de fluidos, mecánica de sólidos, transferencia de calor, electromagnetismo, acústica y combustión; *interacción fluido-estructura*; *optimización y control de sistemas*

distribuidos; EDPs no lineales; problemas de frontera libre y Matemáticas financieras.

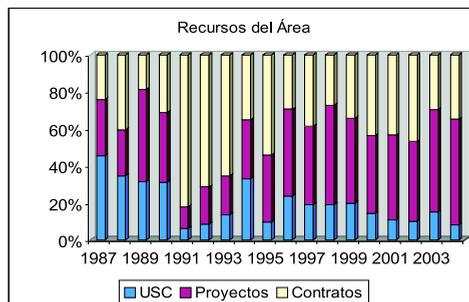
- **Modelos matemáticos y simulación numérica en mecánica de sólidos**, dirigido por D. Juan Manuel Viaño Rey, cuyos objetivos se recogen en sus líneas de investigación sobre *estructuras finas*: modelización y cálculo de estructuras compuestas de vigas, placas y láminas elásticas, viscoelásticas o viscoplásticas; *mecánica del contacto*: modelización matemática y simulación numérica de problemas de contacto, rozamiento, adhesión y desgaste en elasticidad, viscoelasticidad y viscoplasticidad; *biomecánica*: simulación numérica y modelos matemáticos de mandíbula humana y de formación de huesos y *diseño mecánico*: volantes de automóvil, ortodoncia.

- **Modelización en flujos hidrodinámicos**, coordinado por Dña. Carmen Rodríguez Iglesias, con las líneas de investigación: *modelos matemáticos en dispersión de contaminantes; aplicaciones de la teoría de control y optimización de sistemas distribuidos a problemas del medio ambiente; cálculo numérico en modelos hidrodinámicos; análisis teórico y numérico en EDPs; biotecnología y construcción de algoritmos.*

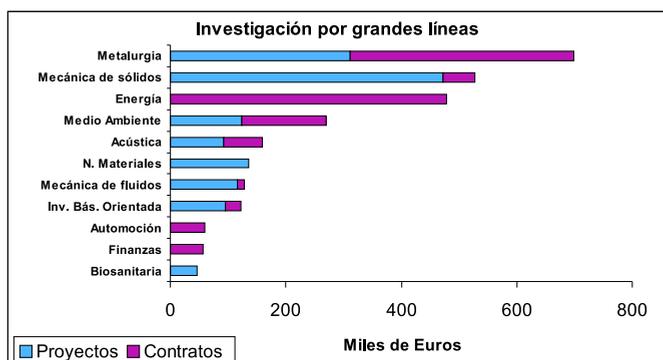
De acuerdo con el informe bibliométrico sobre la *Producción Científica Matemática en España*, realizado por D. Carlos Andradás y D. Enrique Zuazua (ver www.rsme.es/inicio/informem.pdf), la USC ocupa el décimo puesto de España. Utilizando, como en el mencionado informe, la base de datos MathSciNet, y considerando únicamente las publicaciones en libros y revistas se constata que la aportación del Área de Matemática Aplicada de la USC actualmente supone un 23% de las publicaciones de la USC en Matemáticas y un 3,6% de las publicaciones en Matemática Aplicada en España. Sin embargo, un porcentaje significativo de nuestras publicaciones no están registradas en MathSciNet, pues ven la luz en revistas del Science Citation Index en las categorías de acústica, biofísica, ciencia de materiales, ingeniería mecánica, metalurgia y otras.

Proyectos y contratos de investigación

Estamos en presencia del punto fuerte del área, que ha completado más de 40 proyectos de investigación y múltiples contratos con empresas e industrias de sectores muy diversos. Así, podemos ver en el siguiente gráfico el escaso porcentaje que sobre la financiación total representa la de la propia Universidad.



Como puede observarse, se ha hecho un gran esfuerzo a lo largo de los años para obtener recursos externos, cuyo montante total se sitúa en los 2.300.000 euros, lo que ha permitido la financiación de muchos de los estudiantes de doctorado y una renovación constante de infraestructuras. Desglosando los recursos captados por sector de actividad, se tiene el siguiente gráfico y el detalle de la experiencia acumulada en cada uno de ellos:



- *Metallurgia*, con la simulación numérica de coladas de metales y ferroaleaciones, electrodos metalúrgicos, cubas de electrólisis de aluminio, hornos de inducción y purificación de materiales.

- *Mecánica de sólidos*, con cálculo de estructuras delgadas -vigas, placas y láminas-, estructuras sólidas, problemas de contacto, grietas y fractura.

- *Energía*, con la simulación de la combustión en calderas de carbón o fuel y problemas en física del plasma.

- *Medio ambiente*, que incluye la simulación de flujos hidrodinámicos en medios acuosos, dispersión de contaminantes y cinética química.

- *Acústica*, con la simulación de problemas de interacción fluido estructura, materiales aislantes, vibraciones y control activo del ruido.

- *Nuevos materiales*, con la simulación de nuevas leyes de comportamiento para materiales viscoelásticos y viscoplásticos.

- *Mecánica de fluidos*, con la simulación de velas, el transporte de calor por convección, el transporte-difusión a altas temperaturas y el estudio de las ecuaciones de St. Venant.

- *Investigación básica orientada*, que recorre el estudio de EDPs, análisis numérico, análisis espectral, cálculo vectorial y paralelo y guías de ondas.

- *Automoción*, con experiencia en diseño de volantes y simulación de quemaduras por airbags.

- *Finanzas*, con la valoración de productos financieros.

- *Biosanitaria* que incluye problemas en bioinformática y biomecánica, como la simulación de la mandíbula humana, ortodoncia y formación de huesos.

Esta fructífera relación con el mundo empresarial ha permitido poner en marcha, en colaboración con las Universidades de A Coruña y Vigo, una *Red Temática Matemática Aplicada-Industria* en la que se organizan foros de interacción entre ambos sectores, que son fuente de nuevas líneas de

investigación.

Entidades colaboradores

El área, además de recibir ayudas de organismos públicos asociados a la Xunta de Galicia, a los Ministerios de Industria y de Educación y Ciencia, y a la Unión Europea, ha establecido contratos con las empresas Marcel Dassault-Breguet Aviation, Telefónica I+D, Alcoa Inespal S.A., ENDESA Generación, I.B.M. España, FUJITSU España, Ferroatlántica I+D, Europizarras S.A., Unión Fenosa Generación, Ufisa Soluziona, Industrias González, Fund. Caixa Galicia, DalphiMetal España, CETMAR, Totema Engineering Ltd. y LIMEISA.

Relaciones nacionales e internacionales

El área mantiene relaciones estables con diversos centros de prestigio que se han plasmado en forma de convenios de colaboración, proyectos y contratos de investigación inter-universitarios, acciones integradas, estancias científicas, acuerdos académicos Erasmus para estudiantes de segundo y tercer ciclo, así como la incorporación de especialistas de primera línea para la impartición de un porcentaje importante de los créditos de nuestro programa de doctorado. A nivel nacional podemos subrayar las Universidades de A Coruña, Málaga, Politécnica de Madrid, UNED, Vigo y Zaragoza. A nivel internacional hay relaciones estables con el Laboratorio Jacques Louis Lions (Paris VI), INRIA, CNAM, ENSAM, Cass Business School, Centro de Matemáticas e Aplicações Fundamentais de Lisboa y las Universidades de Concepción, Maryland, Zurich, Lisboa, Buenos Aires, Roma, Southampton, del Studi del Sannio, Minho, Savoie, Perpignan, EISEE-Noisy, Claude Bernard Lyon y Oakland.

Además, el Departamento de Matemática Aplicada de la USC es un nodo de la red Mathematics, Computing and Simulation for Industry (MacsiNet), es miembro del European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI) y de la Sociedad Española de Matemática Aplicada (S \bar{e} MA).

Organización de Congresos

Hemos tenido el honor de organizar la I *Escuela de Otoño Hispano-Francesa sobre Simulación Numérica en Física e Ingeniería* en el año 1984 y posteriormente su cuarta edición. Además, el área ha organizado los congresos internacionales **IFIP** 7th *International Conference on Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* (1987), **IWOMIC'93** *International Workshop on Mathematics in Laminar and Turbulent Combustion, International Conference of Shells* (1997), **WAVES** 5th *International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation* (2000) y actualmente se está trabajando en la organización del **ENUMATH 2005**, the sixth *European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications*.

Agradecimientos

Este informe ha sido posible gracias a la aportación de datos realizada por los miembros del Área de Matemática Aplicada de la USC y, particularmente, por los directores de los tres grupos de investigación.

El Instituto de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela



JUAN JOSÉ NIETO ROIG

amnieto@usc.es

La Universidad de Santiago de Compostela (USC), fundada en 1495, es una de las más antiguas de Europa. El Instituto de Matemáticas, IMAT en adelante, fue constituido en el año 1996. Hasta el momento, han ocupado el cargo de Director del mismo los Profesores José María Isidro, Luis Ángel Cordero, Juan Manuel Viaño y Juan José Nieto (desde 2002).

En la actualidad cuenta con unos 70 miembros, un *Director*, un *Secretario* y un *Consejo Científico*, formado por once miembros que representan a todas las áreas de las Matemáticas.

No dispone de locales propios, pero sí de dos despachos cedidos por la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela. Cuenta con un administrativo a tiempo (muy) parcial (20 %). Dentro del *Programa de Infraestructuras* de la Xunta de Galicia, en el año 2002 se dotó al IMAT de material informático.

El IMAT, de acuerdo con su reglamento, es un centro de investigación, docencia, especialización, aplicación y divulgación de las Matemáticas en todos sus aspectos.

Entre sus fines se encuentran los siguientes:

- Promover, impulsar y desarrollar labores de investigación en Matemáticas.

- Realizar labores docentes de Tercer Ciclo, cursos monográficos, de especialización o de postgrado, así como impartir conferencias y organizar seminarios.
- Publicar y difundir los resultados de las investigaciones realizadas y publicar trabajos de divulgación.
- Prestar asesoramiento técnico en los ámbitos de su competencia.

Cabe destacar que en la actualidad y desde hace unos años, coordina un Programa de Doctorado en Matemáticas junto con los Departamentos de Álgebra, Análisis Matemático y Geometría y Topología.

Ha participado o desarrollado distintos proyectos de investigación, entre los que cabe destacar:

- LIMES (Large Infrastructure in Mathematics Enhanced Systems), responsable Prof. Enrique Macías.
- MACSI-net (Mathematics, Computing and Simulation for Industry), responsable Prof. Juan Manuel Viaño. Hay que destacar que se trata de una Red de Excelencia de la Comunidad Europea.
- MATH-ANEURYSM (MATHematical models and analysis of intracranial ANEURYSMs), responsable Prof. Juan José Nieto.

Ha organizado o participado en la organización de Cursos de Verano sobre “Métodos numéricos y nuevas tecnologías en las Matemáticas de la enseñanza media” (2001 y 2002) e “Introducción a la Bioinformática” (2003 y 2004).

Durante estos últimos años, se han organizado distintas conferencias o ciclos de conferencias, seminarios, jornadas y actividades de índole diversa cuyos detalles pueden consultarse en la página web del IMAT (<http://www.usc.es/imat/>). También puede encontrarse allí más información referente a los años 2001 a 2004.

Sin dejar de lado las actividades relacionadas con los aspectos más avanzados (teóricos o aplicados) de las Matemáticas, se ha tratado también de llevar a cabo actividades de tipo interdisciplinar. Sirvan de muestra las conferencias sobre “Problemas matemáticos en el diseño de misiones interplanetarias / Exploración de Marte: pasado, presente y futuro”, impartidas el 16 de marzo de 2004 o el Seminario sobre “Problemas matemáticos en Genómica”, celebrado el 11 de junio de 2004.

El IMAT ha organizado el pasado mes de noviembre de 2004 las “II Jornadas de Política Científica en Matemáticas. Hacia el Centro Nacional de Matemáticas”. Ver detalles en <http://www.usc.es/imat/cnm2/>.

En abril de 2004, el IMAT elaboró un “Plan Estratégico”, dentro de los programas de calidad de la USC, que en buena medida puede marcar el futuro del Instituto.

Estos últimos años se ha contado con un técnico informático (de abril de 2000 a abril de 2004), adscrito al proyecto LIMES antes citado que, entre otras

muchas labores, se ocupó de desarrollar y mantener la página web. En la actualidad no contamos con ningún técnico por lo que la página web sólo está actualizada a diciembre de 2004, pero esperamos poder actualizarla en breve.

En el año 2005 ya se han celebrado diversas actividades, tales como por ejemplo:

- SEMINARIO de GEOMETRÍA (7 de febrero de 2005).
- WORKSHOP in NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS (11 de febrero de 2005).
- CONFERENCIAS sobre "RECENT RESULTS ON INFORMATION GEOMETRY" (14, 16 y 17 de febrero de 2005).

Desde estas páginas animo a todos a que nos hagan llegar sus opiniones, propuestas de actividades o colaboración, ideas y críticas constructivas sobre el Instituto que tengo el honor de dirigir en estos momentos.

CNMAT: Estructura y Objetivos



FRANCISCO MARCELLÁN

Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III, Madrid

pacomarc@ing.uc3m.es

Abstract

Este breve artículo del Prof. Franciso Marcellán, actual Director de la ANECA, contiene varias consideraciones sobre la estructura y objetivos que, en opinión del autor, sería deseable que acompañaran al posible Centro Nacional de Matemáticas.

1 Introducción

La investigación matemática en España está preferentemente focalizada en los Departamentos Universitarios y es escasa la realizada al margen del mundo académico, a diferencia de lo que ocurre en otros países de nuestro entorno. Su relevancia ha sido puesta de manifiesto en el informe Andradás-Zuazua, que constituye la primera aproximación sistemática al análisis de la cantidad y calidad de la misma.

Quizá uno de los elementos menos estudiados ha sido el papel de los Departamentos como eje y dinamizador de la actividad científica más allá de su estructura organizativa docente-administrativa. Una primera pregunta que surge es si los Departamentos contribuyen a potenciar la actividad científica o más bien son estructuras que agrupan personal docente e investigador con un criterio administrativo basado en áreas de conocimiento, con lo que ello implica de cara a la transversalidad de la investigación en estos momentos, sin una auténtica estructuración y programación por objetivos que estimule el riesgo que significa la adopción de nuevas líneas de investigación y no mantener el estatuto basado en que cada cual haga lo que mejor le parezca y convenga.

Por otra parte, la figura del grupo de investigación, más allá de la coyuntura de los proyectos del Plan Nacional, no está reconocida y sobrevive gracias al voluntarismo de unos pocos.

La estructura funcional constituyete, en mi opinión, otra de las limitaciones para el desarrollo de una actividad dinámica en investigación. Según datos del Consejo de Coordinación Universitaria, un total de 3 065 profesores permanentes están adscritos a las seis áreas matemáticas, con un predominio de Matemática Aplicada (1 468) y Estadística e Investigación Operativa (617). La edad media de los Catedráticos de Universidad es de 53 años, mientras que la de los Titulares de Universidad es de 46. Los recursos humanos a través del Programa Ramón y Cajal son del orden de la cincuentena en total en sus tres convocatorias y el número de profesores extranjeros que se acogen al programa de sabáticos del MEC para el área de Matemáticas es muy escaso. Por otra parte, la figura de profesor visitante está muy poco desarrollada en los Departamentos.

En cuanto a los investigadores en formación, su número ha decrecido de manera alarmante en los últimos años, pese a que doce programas de Doctorado en Matemáticas han obtenido la *Mención de Calidad*, cantidad significativa en la *ratio* concedidos/impartidos frente a la media nacional en otras áreas.

La crisis en el número de matriculados en las Licenciaturas de Matemáticas de nuestro país es otra de las señales de alarma para poner de manifiesto que la estructura creada laboriosamente en los últimos veinte años puede dar síntomas de colapso si no se adoptan medidas inmediatas. Algunas de ellas pasan por una adaptación de la oferta formativa a la nueva configuración de los Títulos de Grado y Postgrado, si se sabe afrontar sobre la base de la planificación y la cooperación y pueden contribuir a la consolidación de la base de la investigación matemática.

Pero, de nuevo, se tropieza con las limitaciones estructurales señaladas al comienzo: dependencia de la realidad académica como base para la dinamización científica, estructuración exclusivamente departamental, escasa capacidad de riesgo por abordar líneas innovadoras, ausencia de una relación con la actividad productiva y el tejido industrial.

2 ¿Por qué un Centro Nacional de Matemáticas?

Para solventar algunas de las anteriores limitaciones, varias Universidades están potenciando Institutos Universitarios de Matemáticas como alternativas a la estructura departamental. No obstante, la repetición de los defectos estructurales de los mismos, la indefinición en su financiación y el reclutamiento de investigadores constituyen trabas importantes para su desarrollo.

Sólo el CRM en Barcelona ha estado dotado de una dinámica innovadora y su amplia experiencia es una referencia en este momento. La situación de indefinición en el CSIC ante un Instituto específico de Matemáticas, reclamado en los últimos años por investigadores adscritos al IMAFF, es otro de los problemas a resolver a corto plazo.

El *V Plan Nacional de I+D+I* para el cuatrienio 2004–07 contempla en

su *Programa Nacional de Matemáticas* la creación de un *Centro Nacional de Matemáticas* (CNMAT) como instrumento de política científica en nuestro campo; véase [1]. Su concreción es un tema prioritario para la comunidad matemática y, en mi opinión, debería contemplar los siguientes aspectos:

1. Estructura y contenidos dinámicos frente a la rigidez de la oferta académica, tanto en contenidos como en profesorado.
2. Facilitar el desarrollo de líneas de futuro basadas en prospectiva de líneas de investigación emergentes y escasamente desarrolladas en los Departamentos universitarios.
3. Potenciar la incorporación preferente de investigadores post-doctorales, cuya inserción en la estructura universitaria es lenta y con limitaciones a corto plazo, dada la actual configuración de las plantillas funcionariales y de personal contratado.
4. Desarrollar programas de investigación destinados a visualizar socialmente la investigación matemática y fomentar la relación con el tejido económico e industrial sin las trabas existentes en la configuración académica universitaria.
5. Servir de referencia a nivel internacional de la comunidad matemática española, a la vez que elemento cooperativo con las universidades y el CSIC.

Pero estos deseos deberían basarse en una serie de criterios inexcusables para una garantía de calidad:

- Existencia de un *Comité Asesor* externo, formado por reconocidas personalidades internacionales en el mundo de las Matemáticas. Evaluación periódica de las actividades.
- Estructura administrativa mínima pero eficaz y altamente profesionalizada.
- Financiación claramente definida por el cumplimiento de objetivos, con cargo al Plan Nacional y los proyectos que se puedan obtener independientemente.
- Movilidad de sus miembros no estables. Antes he señalado que la base serían Becarios post-doctorales con contratos de una duración de 2 + 3 años, así como investigadores “senior” de reconocido prestigio, adscritos a programas con una vinculación temporal por no más de un año. Se deberían facilitar estancias sabáticas de profesores permanentes universitarios para participar en líneas de investigación prioritarias para el CNMAT. Entre otras, señalaría, las relacionadas con Biomatemática, Simulación y Modelización Numéricas, Matemática Discreta, Criptografía, Matemática Financiera, así como Matemática básica (tanto Pura como Aplicada).

- Relación con el tejido económico y social mediante el desarrollo de proyectos conjuntos, programas de formación y estancias post-doctorales en empresas.

El CNMAT debería tener una sede física, seña de identidad del mismo, independientemente del trabajo en red con los Institutos Universitarios de Investigación, tanto nacionales como extranjeros, mediante acuerdos *ad hoc*. Su estructura jurídica debería contemplar tanto la agilidad en su funcionamiento como la rendición de cuentas en tanto servicio público. El modelo de Fundación de competencia estatal, de acuerdo con la Ley 50/2002, con un Patronato al que se pudieran incorporar el MEC, las universidades, el CSIC e instituciones privadas, facilitaría la gestión de manera notable.

3 A modo de conclusión

La necesidad de un CNMAT que dinamice la actividad matemática de nuestro país y permita mejorar no sólo la cantidad sino la calidad y la proyección de las Matemáticas es una tarea inexcusable para todos los que creemos y estamos comprometidos en el mantenimiento y mejora de nuestra Ciencia no sólo por su valor en sí sino para el desarrollo científico técnico de una sociedad que necesita de su concurso.

No hay tiempo para el diletantismo y el debate interminable, tan habituales en nuestros medios. Asimismo, el papel de las Sociedades Matemáticas debe ser un elemento de apoyo para que la comunidad matemática haga suyo este apasionante proyecto. Para información complementaria, consultar [2, 3].

References

- [1] J. M. FERNÁNDEZ DE LABASTIDA, E. ZUAZUA, Programa Nacional de Matemáticas. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 7 (1) (2004) 5–26.
- [2] M. DE LEÓN, E. ZUAZUA, Informe de la Accion especial BFM2002-12271-E, enero 2005.
- [3] <http://www.rsme.es>, Real Sociedad Matemática Española, Documento de Discusión sobre el CNMAT, 2004.

La I+D en España



JOSÉ M. F. LABASTIDA

Vicepresidente de Investigación Científica y Técnica
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

1 Introducción

En el año 1945, en el famoso informe de Vannevar Bush al Presidente Roosevelt, *Ciencia, la frontera sin fin*, se afirmaba que

“El progreso científico es una clave esencial para nuestra seguridad como nación, para nuestra mejor salud, para mejor empleo, para un mayor nivel de vida, y para nuestro progreso cultural”

y en base a esta idea se propuso un plan de choque. Posiblemente algunos de estos aspectos fueron clave para impulsar la ciencia en España en los años ochenta, período en el que se crearon las bases de una política científica y tecnológica. Veinte años después es necesario analizar adonde nos han conducido las distintas políticas después de aquel histórico comienzo. En líneas generales se puede afirmar que el resultado ha sido positivo en la componente científica pero negativo en la componente tecnológica. Ello no significa que debamos ser autocomplacientes en la parte científica y tratar de buscar soluciones únicamente en la parte tecnológica. Al contrario, la parte científica es aun muy mejorable y su engarce con la tecnológica es esencial para generar el impulso necesario.

2 La producción científica

Si se comparan los indicadores de producción científica y de producción tecnológica se observa una enorme diferencia. En el contexto de la Europa de los

15 (UE-15) la producción científica española por habitante es aproximadamente un 85 % de la correspondiente al promedio europeo. En cambio, este mismo indicador en su vertiente tecnológica tan sólo llega al 11 % del correspondiente promedio.

Debemos preguntarnos por qué estamos en esta situación. Hace veinte años ninguno de estos indicadores era significativo y nos encontramos en una situación en la que uno de ellos ha mejorado considerablemente mientras que el otro apenas ha despegado en términos relativos. Sin duda las políticas implementadas han funcionado mejor en un ámbito que en el otro. ¿ Qué ha fallado ? ¿ Qué debemos hacer para cambiar la situación ? Son preguntas a las que hay que dar una respuesta urgente.

En relación con la producción científica los indicadores nos dicen que la distancia que nos separa del promedio europeo es similar a la distancia que nos separa en el número de investigadores por habitante. Un incremento en el número de investigadores, si éstos resultan tan productivos en promedio como los que tenemos, nos situaría en el nivel medio europeo. Claramente el número de investigadores en España es bajo en relación con su población y por ello es necesario su incremento, tanto en el sector público como en el privado. Por otra parte se ha constatado que nuestros investigadores son en promedio de los más productivos del planeta. Existen indicadores que los sitúan a este respecto en posiciones de cabeza tanto en el contexto europeo como en el mundial. Bastaría por tanto un incremento en los efectivos para que, al menos en lo referente a la cantidad de producción, alcanzáramos el promedio europeo.

Si se estudia en más detalle la producción científica se observa que a pesar de que el avance ha sido notable queda todavía mucho margen para mejorar. Aunque en la cantidad nos acercamos al promedio europeo, en calidad estamos mucho más lejos de donde nos correspondería estar según nuestro nivel de riqueza. Además, aparecen síntomas preocupantes de desaceleración en la calidad de nuestras publicaciones a nivel global. Aunque el impacto de las publicaciones españolas sigue creciendo, este crecimiento no es tan rápido como lo ha sido a lo largo de la década de los noventa. Y esto no se explica porque se haya llegado a un nivel de saturación, aun queda bastante espacio para avanzar. La investigación de calidad necesita recursos humanos y materiales, apoyo técnico y de gestión, incentivación del riesgo, etc., aspectos en los que el sistema tiene mucho margen para mejorar.

Entrando en áreas concretas es instructivo recoger los datos que el ISI (Institute of Science Indicators) aporta sobre la producción científica española. Dejando aparte las Humanidades y teniendo en cuenta sólo publicaciones en el *Science Citation Index*, la situación en el período 1999–2003 queda reflejada en la Tabla I.

La segunda columna representa el porcentaje de publicaciones en las que participa al menos un investigador con adscripción a un centro de investigación español respecto al total mundial en el área. La tercera columna representa el porcentaje por encima (+) o por debajo (–) del promedio de impacto mundial del área correspondiente a dichas publicaciones. En términos globales, la producción española se sitúa en el 3,02 % de la mundial para el período en

Área científico-técnica	% Producción	Impacto
Ciencias del Espacio	5,79	-5
Ciencias Agrarias	5,30	7
Matemáticas	4,65	-6
Microbiología	4,41	-20
Química	4,25	-1
Ciencias de Plantas y Animales	3,88	-9
Medio Ambiente y Ecología	3,42	-15
Física	3,14	19
Biología y Bioquímica	2,97	-29
Ciencias de Materiales	2,90	1
Farmacología	2,86	-21
Neurociencias	2,73	-18
Biología Molecular	2,66	-10
Economía	2,64	-33
Inmunología	2,57	-27
Medicina Clínica	2,54	-5
Ciencias de la Tierra	2,51	-17
Ingeniería	2,32	5
Informática	2,26	-28
Psicología y Psiquiatría	1,91	-40
Ciencias Sociales	0,84	-12

Tabla I

cuestión. Es preocupante el alto número de indicadores negativos en la tercera columna. El número de citas por artículo para España es de 3,76, que aunque es prácticamente el doble que el que tenía en el período 1988-1992, sigue siendo el más bajo en la UE-15 a excepción de los de Grecia y Portugal. Aunque en la cantidad de producción hemos avanzado, en calidad queda todavía mucho camino. Una mitad de las áreas científico-técnicas experimenta cierto estancamiento. La otra mitad muestra una evolución favorable aunque, en general, el correspondiente indicador sigue teniendo signo negativo. En el área de Matemáticas, por ejemplo, se produjo un estancamiento en los períodos 1995-1999 a 1998-2002 del que parece que se está saliendo según los últimos indicadores.

Período (Matemáticas)	% Producción	Impacto
1995 - 1999	3,88	-15
1996 - 2000	4,16	-16
1997 - 2001	4,42	-13
1998 - 2002	4,53	-13
1999 - 2003	4,65	-6

Tabla II

Los datos generales indican que es necesario hacer un importante esfuerzo para mejorar la calidad de las publicaciones científicas. Para aumentar

significativamente la calidad es necesario dotarse de mejores infraestructuras y personal de apoyo, ámbitos en los que el sistema español de investigación tiene que avanzar, además de implementar nuevos procedimientos de evaluación y seguimiento.

3 La producción tecnológica

El despegue en la producción tecnológica es una asignatura pendiente. Se puede decir que las políticas desarrolladas desde la aprobación de la Ley de la Ciencia en 1986 (Ley 13/1986, de 14 de abril, de fomento y coordinación general de la investigación científica y técnica) no han sido capaces de mejorar de forma apreciable nuestra situación relativa en el contexto europeo. Además, los indicadores son preocupantes ya que no proporcionan optimismo para los próximos años. El número de patentes EPO españolas por cada millón de habitantes en el año 2000 fue de 18 mientras que el promedio en la UE-15 fue de 128, es decir nuestro indicador es el 11 % del europeo. Pero lo más alarmante es que el crecimiento medio del número de patentes EPO españolas en el período 1995–2000 fue del 13 % mientras el de la UE-15 fue del 10 %. Si se mantuvieran estos ritmos de crecimiento tardaríamos 71 años en alcanzar el promedio europeo, algo inaceptable. Estas cifras contrastan enormemente con las correspondientes a la producción científica, un cálculo análogo conduce a que si se mantuvieran los actuales ritmos de crecimiento en 6 años nos situaríamos en el promedio europeo. ¿ Por qué no terminamos de despegar en la producción tecnológica ? ¿ Qué ha fallado en las distintas políticas desarrolladas ?

La Organización Mundial de la Propiedad Intelectual publica una relación anual de las entidades que tienen un mayor número de solicitudes PCT. En el año 2003, la entidad española mejor situada en este *ranking* fue el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, ocupando el puesto 166. Aparte de lo alejada que está esta posición de los puestos de cabeza, lo más preocupante es que, contrariamente a otros países, no resulte ser una empresa la entidad mejor situada. La falta de un tejido empresarial con una importante componente de actividad en investigación y desarrollo tecnológico explica en parte nuestras carencias en la producción tecnológica. Pero esto no lo explica en su totalidad. El estancamiento en nuestra baja posición relativa demuestra que ni se han desarrollado políticas eficientes para mejorar la situación en el sector empresarial ni para fomentar la imprescindible colaboración entre los ámbitos público y privado. Quizá la falta de eficiencia de estas políticas se deba al bajo nivel de inversión pública en el sistema de investigación y desarrollo tecnológico. Esto en efecto puede explicar parte del problema pero no es la única causa.

4 La financiación y el gasto en I+D

El gasto en I+D en España en 2003 fue del 1,1 % del PIB, alejado del promedio de la UE-15, en torno al 2 %. Pero, ¿ cómo se compara este gasto en relación a la inversión pública ? A primera vista los datos oficiales relativos a España

respecto a inversión pública generan alarma. Por ejemplo, en el año 2001, según los datos que aportó España a la OCDE, los fondos públicos destinados a I+D suponían el 0,69 % del PIB. Dicho año el gasto en total en I+D fue del 0,96 % del PIB. Según esto, el factor multiplicador del sistema español de I+D, $0,96/0,69=1,39$, resultaba ser el más bajo de Europa.

La situación no es tan cruda como estos números indican. Al contrario que en el resto de Europa, en el dato español se incluyen los *créditos blandos* (Capítulo VIII), que en 2001 ya suponían una importante fracción del presupuesto. Si descontamos la parte correspondiente a Capítulo VIII con el fin de disponer de un indicador comparable al del resto de los países europeos, los fondos públicos ascendieron en 2001 al 0,41 % del PIB en lugar de al 0,69 %. Esto mejora el factor multiplicador español aunque para obtener un número realista es necesario tener en cuenta antes dos correcciones. Por una parte, los datos que España aporta a la OCDE no tienen en cuenta los fondos públicos de las Comunidades Autónomas destinados a programas propios de I+D. Estos fondos, aunque difíciles de medir, se estima que ascendieron en 2001 a aproximadamente 0,08 % del PIB. Por otra parte, deberían incluirse los *Fondos Estructurales de Desarrollo Regional* (FEDER), que aproximadamente significaron en 2001 un 0,06 % del PIB. Una vez tenidas en cuenta estas correcciones el factor multiplicador correspondiente a España es aproximadamente $0,96/0,55=1,75$, un valor por debajo del de países como Francia (2,14) pero muy inferior al de países como Alemania (3,09) o Suecia (4,49). Esto nos dice que sin duda hace falta más inversión pública, pero también que debemos plantearnos nuevas políticas. En efecto, nuestro factor multiplicador no es excesivamente bajo pero sí la cantidad a multiplicar. Por otro lado, si el factor multiplicador no está muy alejado del de Francia, ¿por qué no tenemos una producción tecnológica aceptable? Francia generó 120 patentes europeas por cada millón de habitantes en el año 2000 mientras que España sólo 18.

En los últimos años, la principal novedad en lo relativo a la financiación pública de la I+D por parte de la Administración General del Estado (Función 54) fue el fuerte incremento de los fondos destinados a créditos blandos (Capítulo VIII). Éstos pasaron del 0,01 % del PIB en 1996 al 0,28 % en 2004. En cambio, el porcentaje respecto al PIB del resto de la Función 54 sólo experimentó una ligera subida, del 0,24 en 1996 al 0,26 en 2004. Este estancamiento en términos relativos de los fondos no financieros se ha visto compensado por un incremento en los FEDER. Éstos suponen en promedio aproximadamente 6 centésimas adicionales cada año. La financiación de la I+D a lo largo de los últimos años en base a programas propios de las Comunidades Autónomas ha mantenido, en promedio, su porcentaje respecto al PIB, aunque hay diferencias entre los esfuerzos realizados por cada una de ellas.

El gasto en I+D se ha incrementado del 0,83 % del PIB en el año 1996 al 1,10 % en el año 2003. Esta subida de 27 centésimas se reparte en 20 para el sector empresas, que pasa de un 0,40 % a un 0,60 %, 6 para el sector enseñanza superior, que alcanza el 0,33 %, y 1 para la administración pública, que se sitúa en el 0,17 %. Los datos muestran que se ha producido un avance importante

en el gasto del sector empresarial que sin duda se debe a los créditos blandos, principal usuario de este tipo de fondos. Por otra parte, en el sector público sólo el ámbito de la enseñanza superior ha experimentado una subida relevante. El incremento en este sector se debe fundamentalmente a los Fondos Estructurales y a fondos provenientes del Capítulo VIII. En términos presupuestarios, los organismos dependientes de la Administración del Estado no han sido atendidos suficientemente durante dicho período. El hecho de que no hayan podido participar en las convocatorias sustentadas con créditos blandos ha supuesto una clara desventaja para ellos.

Este éxito aparente en el incremento del gasto en el sector de las empresas, debido sin duda a la enorme inyección de fondos ligados al Capítulo VIII, tiene sus luces y sus sombras. En el lado positivo se ha cambiado la tendencia decreciente de la primera mitad de la década de los noventa, incrementando el porcentaje hasta un nuevo record histórico, el 0,60 % del PIB, que supera con creces el del año 1990 (0,47 %). En el lado negativo, no se observa que este incremento en el gasto haya originado un incremento significativo en la producción tecnológica. En definitiva, la política llevada a cabo ha impulsado el gasto pero no la calidad de la actividad en I+D. Es necesario replantearse la forma en la que se están empleando estos fondos para que se gasten de manera eficaz con el objetivo de generar producción tecnológica de calidad. En el ámbito científico se implantaron unos criterios de calidad en los años ochenta que nos han conducido al lugar que ocupamos en la actualidad. ¿ Por qué no va a ser posible hacer lo mismo en el ámbito tecnológico ? Es urgente un rediseño de las políticas para alcanzar este objetivo.

5 El plan de choque

En el ámbito científico el nivel de financiación se ha mantenido durante los últimos años gracias a la existencia de FEDER. Se trata de todas formas de un nivel claramente insuficiente para dar un importante salto cualitativo en la calidad, objetivo en el que debe centrarse ahora el esfuerzo. Es necesaria una importante inyección de fondos adicionales que por una parte cubran el hueco que originará la ausencia de unos FEDER abundantes y, por otro, afronten el tan necesario incremento de la financiación en las infraestructuras, los proyectos de investigación y los recursos humanos. La desaparición o disminución de FEDER puede originar situaciones dramáticas si no se reemplazan adecuadamente. Por ejemplo, durante los últimos años las convocatorias generales de la Administración General del Estado de ayudas a proyectos de investigación a desarrollar en el sector público y privado sin ánimo de lucro se han incrementado notablemente con ayuda de estos fondos. Se ha pasado de los 157 millones de euros en 2001 a los 275 en 2004. Un aumento considerable, conseguido en parte gracias a los FEDER, que han supuesto aproximadamente el 40 % de los fondos utilizados en estas ayudas.

Asimismo, es necesario replantearse las políticas a desarrollar en el ámbito científico. Aun disponiendo del necesario incremento de fondos, se precisa un

diseño de las políticas que por una parte apunten más en profundidad hacia el desarrollo de la investigación de calidad y por otra fomenten la interacción con el ámbito tecnológico. Para ello es necesario poner en marcha un plan de choque que necesariamente debe materializarse en una reforma de la Ley de la Ciencia. Desde su promulgación en 1986 se han producido tres fenómenos importantes: se han desarrollado políticas científicas y tecnológicas en las distintas Comunidades Autónomas, así como en el marco europeo; se han aprobado una serie de iniciativas legislativas que han cambiado el entorno de desarrollo de esta Ley; y se han experimentado profundos cambios en la sociedad en su conjunto, se tienen unos valores distintos y estamos inmersos en un mundo globalizado. Es preciso, acometer la reforma de la Ley de la Ciencia creando instrumentos de articulación de las distintas políticas autonómicas; teniendo en cuenta el contexto europeo; legislando la especificidad de la I+D en el contexto de diversas leyes que afectan a su desarrollo como la Ley de Organización y Funcionamiento de la Administración General del Estado (6/97), la Ley Orgánica Universitaria (6/01), la Ley General de Subvenciones (38/03), la Ley General Presupuestaria (47/03), etc., y que en muchos casos su efecto negativo para fomentar una I+D competitiva es palpable; creando estructuras de gestión modernas, basadas en la responsabilidad gerencial, dotadas de una gran autonomía y con mecanismos de gestión por resultados, tanto en el ámbito del fomento como en el de la ejecución de la investigación científica y técnica; y estableciendo instrumentos de planificación, ejecución, seguimiento, evaluación y difusión que superen a los actuales.

La nueva Ley de la Ciencia debería otorgar un papel clave a la mayor entidad ejecutora de la investigación en España, el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, en un contexto reformado. Es natural que este Organismo sea el gestor de las grandes instalaciones científicas nacionales, el articulador de nuevos proyectos científico-técnicos, tanto nacionales como internacionales, así como el proveedor de investigadores altamente cualificados. No tendría sentido generar nuevas estructuras cuando se dispone de un Organismo con un alto nivel de reconocimiento internacional, con grandes capacidades para implementar políticas en todo el espectro temático de la investigación, y con unas amplias capacidades de ejecución, que comprenden desde la investigación más básica hasta el desarrollo tecnológico y la innovación.

En el ámbito tecnológico es preciso generar instrumentos que fomenten la colaboración entre los sectores público y privado. El tejido empresarial español, dominado por la pequeña y mediana empresa, está abocado a apostar por la especialidad si el objetivo es una investigación tecnológica de calidad. Es necesario en esta línea poner en marcha programas que conduzcan a la creación de empresas de base tecnológica con una importante participación de investigadores del sector público. También es necesario algo más complicado de implementar: una modificación del estatuto de los investigadores y un cambio de cultura en éstos y en los responsables de las empresas. Una nueva Ley de la Ciencia debería crear mecanismos para inducir estos cambios.

Las palabras de Vannevar Bush citadas al comienzo de este artículo así como el plan de choque que su informe proponía son de perfecta aplicación

en España 60 años después de que fueran recogidas en el informe que lleva su nombre. Quizá hoy habría que incluir en ellas el término “sostenible”, porque se es consciente de que el progreso científico y tecnológico tiene que tener esta naturaleza si se desea que el desarrollo del bienestar social perdure en el medio y largo plazo. España no debe dudar y apostar sin fisuras por la consolidación de su I+D. Sólo así será dueña de su futuro. Si no lo hacemos podemos encontrarnos con una España cuyo futuro dependa excesivamente de las preferencias turísticas de nuestros vecinos, o con otros escenarios aun más preocupantes.

Entrevista a Jesús M. Sanz Serna, Rector de la Universidad de Valladolid

Ofrecemos a continuación una entrevista a Jesús M. Sanz Serna, Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad de Valladolid y actualmente Rector de la misma.

Jesús M. Sanz Serna ha sido un referente del desarrollo de las Matemáticas (y en particular de la Matemática Aplicada) en España. Es autor de 2 libros y casi 100 trabajos de investigación, ha dirigido 15 Tesis Doctorales y ha sido galardonado con varios Premios de máximo prestigio (entre otros, el Premio Iberdrola de Ciencia y Tecnología 1995, el Premio Germund Dahlquist 1995 y el Premio de la Real Academia de Ciencias 1995). Fue elegido Rector de la Universidad de Valladolid en 1998, estando en la actualidad próximo a finalizar su segundo mandato. Por otra parte, formó parte del grupo de personas que impulsó la creación de SĒMA y fue Vicepresidente de nuestra Sociedad en su primera etapa.

Además, goza de una situación privilegiada para analizar la evolución actual de las Matemáticas en nuestro país y opinar sobre las ventajas e inconvenientes que pueden traer consigo las diferentes iniciativas.

Pregunta: Desde tu experiencia como Rector, ¿ cómo valoras la situación actual y las posibilidades de futuro de la Universidad en España ? ¿ Cuáles son los mejores logros y las peores sombras de los últimos años ?

La política universitaria en la legislatura 2000–2004 fue calamitosa. Se perdió una oportunidad de introducir las reformas que eran necesarias y se nos hizo derrochar energías en cambios contraproducentes, inspirados (lo viví en primera persona) por una profunda desconfianza en el trabajo de los profesores y alumnos. La política universitaria debería, en mi opinión, fomentar la responsabilidad: premiar económicamente y de otros modos a las universidades que usan su autonomía para hacer las cosas bien y no respaldar a las restantes.

P: En términos generales, ¿ es fácil hacer compatibles los intereses de las distintas universidades ?

Creo que, en general, los intereses de las distintas universidades públicas y los de las mejores universidades privadas no presentan excesivo número de puntos de conflicto mutuo. Los poderes públicos deberían controlar mucho más la creación y funcionamiento de las universidades privadas con ánimo de lucro, que a veces son meras academias de piso.

P: Recientemente se ha hablado mucho de la evolución de las Matemáticas en España en los últimos años. ¿ Qué puedes mencionar al respecto ?

El cambio a mejor no ha podido ser mayor. Cuando rememoramos la situación que teníamos hace treinta años (recomiendo sobre esto un reciente artículo de Antonio Córdoba) el punto de partida nos parece inverosímil. La Matemática española vivía en un mundo autista desconectado del panorama internacional. Aspiraba a la erudición, no a la resolución de problemas.

P: ¿ Cómo enjuicias el papel desarrollado por el gobierno central y los gobiernos autonómicos en este proceso ?

En Matemáticas, como en el resto de las ciencias, los mayores avances en política científica ocurrieron en el período 1982–1992: incentivación mediante sexenios de la investigación y simultáneo desenmascaramiento de algunas figuras que tenían gran predicamento y poder pero escaso nivel científico; proyectos de investigación financiados en función de su calidad; aumento espectacular del número de puestos de profesor.

Comunidades Autónomas: con alguna excepción, carecen de masa crítica para tener una política científica o Matemática propia ¿ diecisiete más una políticas para cuarenta millones de personas ? Por lo que sé, las políticas autonómicas a menudo son operaciones de imagen para fingir estar *à la page* en ciencia y tecnología. Y otras veces son un instrumento más de clientelismo.



**P: ¿ Y las universidades ?
¿ Han sido coherentes en su apuesta por impulsar la investigación matemática ?**

La principal herramienta de la política de una universidad es la configuración de su plantilla de profesorado. Ahí se encamina entre el 60 % y el 75 % del gasto corriente. Descontando electricidad, limpieza, mantenimiento, administración, vemos que el gasto en bibliotecas, proyectos, etc. no es hoy significativo. En Matemáticas, la universidad española ha malgastado un gran volumen de recursos en puestos de profesor de “servicio” en Escuelas de Ingenieros, Empresariales, etc., dándoselos a personas no vinculadas a la comunidad matemática activa. Y sigue sin resolver el problema de la movilidad de

profesores y alumnos, que sólo es abordable mediante estímulos económicos.

P: ¿ Qué estrategias pueden ser útiles para impulsar una investigación matemática de calidad en los próximos años ? En particular, ¿ qué piensas de la reciente iniciativa de creación del Centro Nacional de Matemáticas ?

Creo que ahora mismo el punto más débil del sistema es el escaso número y a menudo bajo perfil de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. Si el talento matemático es atraído sólo hacia las ingenierías, no podremos mantener el nivel actual, menos aún incrementarlo. El Centro es una gran idea. Pero ha de ser un paraguas que cobije a todos, no un departamento más.

P: Si hablamos de Matemática Aplicada, es inevitable referirnos a la conexión y colaboración universidad-empresa. ¿ Qué se puede decir de la situación actual y de las perspectivas existentes ?

Se ha avanzado notablemente, pero creo que todavía estamos lejos de la meta. Además los lazos con la empresa en Matemáticas no suelen estar en manos de matemáticos.

P: En relación con el desarrollo de la Matemática Aplicada en España, ¿ cuáles son en tu opinión las tendencias más interesantes que se observan en la actualidad ?

Me agrada particularmente la creciente diversificación de los temas y “escuelas” existentes. El panorama se expande y eso siempre es positivo.

P: Desde tu punto de vista, ¿ qué papel juegan las Sociedades Matemáticas en nuestro país ? ¿ Podrías indicar cuáles son a tu juicio sus principales virtudes y defectos ?

Creo que están en el mejor momento. También me agrada que se haya entrado en una fase de cooperación entre todas. Sumar y no restar.

P: En particular, ¿ qué puede decirse de SĕMA ? Habiendo conocido bien sus orígenes, ¿ qué opinión te merece su evolución y su estado actual ?

Impulsamos SĕMA en unas circunstancias concretas: la Matemática Aplicada no era generalmente reconocida en España (se llegaba a decir que no existía) y la Real Sociedad de Matemática Española era un cadáver viviente. Tras la refundación de la RSME, en la que tuve el honor de secundar a A. Martínez Naveira, y con el *status* actual de la Matemática Aplicada, se podría considerar alguna fórmula, respetuosa para todos, de fusión o confederación SĕMA-RSME.

P: ¿ Qué significa para la comunidad matemática española que el próximo ICM se celebre en España ?

El orgullo del reconocimiento internacional y la oportunidad de atraer talento joven a nuestra ciencia. Si se me permite decirlo, lamento no haber podido estar involucrado en la organización; mi invitación a ser conferenciante en el ICM 94 (Zurich) fue una de mis mayores satisfacciones.

P: ¿ Qué repercusiones cabe esperar tras la celebración del ICM ? En particular, ¿ puede sensibilizar este evento al resto de la comunidad científica ?

Todo depende de la profesionalidad de la campaña de comunicación que se monte. Las Sociedades (RSME, SĕMA, etc.) deberían pactar un gran programa de comunicación en torno al ICM, gestionado por profesionales. De lo contrario volveremos a ver en los medios noticias sobre matemáticos chiflados, cuadradores del círculo, exámenes de selectividad, personas que extraen mentalmente raíces cúbicas, etc.

Análisis de propiedades de los grafos circulantes en la modelización de redes

M.C. ESPINEL¹, C.E. RAMOS² Y R.M. RAMOS³

¹Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna

²Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación, Universidad de La Laguna

³Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad Complutense de Madrid

mespinel@ull.es, ceramos@ull.es, rramos@mat.ucm.es

Abstract

Una de las muchas aplicaciones de la teoría de grafos es ayudar a conectar redes de ordenadores. En el contexto de la teoría de grafos, se asocia a una red un grafo, $G=(V,E)$, donde los vértices V corresponden a procesadores de la red, y las aristas E a enlaces de comunicación en dicha red. Los modelos en anillo, doble bucle y algunos grafos circulantes gozan de algunas propiedades deseables como son regularidad, alta conectividad o diámetro óptimo. Nuestra aportación consiste en revisar algunos parámetros y propiedades de los grafos circulantes, en especial se estudia la geodeticidad propia, el número geodético, y la secuencia de distancias de grado que se utiliza para encontrar la distancia media en un grafo. La revisión de casos permite obtener optimalidad en los grafos circulantes que tengan número geodético pequeño frente a una geodeticidad propia grande, y distancia media pequeña.

Key words: *Grafos circulantes, redes de ordenadores, geodeticidad, número geodético, distancia media.*

AMS subject classifications: *05C99*

1 Introducción

Una de las aplicaciones tecnológicas que genera demanda de conocimiento científico es la mejora del rendimiento de las redes de ordenadores. Por ello

Fecha de recepción: 15/11/04

en los últimos años se está dedicando un esfuerzo notable al estudio de las propiedades de redes de interconexión con vistas al diseño y uso de estas redes, tanto en los sistemas multiprocesadores como en los sistemas distribuidos y de telecomunicación.

El diseño óptimo de una red contempla la optimización de ciertas cualidades básicas como son: el envío de mensajes de forma rápida y sin retraso en la comunicación entre los procesadores; la fiabilidad de la red, en cuanto a la vulnerabilidad a los fallos de los procesadores o enlaces; el alto índice de expandibilidad, es decir, la posibilidad de añadir nodos a la red con pocas modificaciones en los enlaces establecidos; la simetría de la misma; la uniformidad en el tráfico de información; el que facilite el diseño de algoritmos de comunicación y difusión de la información y por último, la seguridad de los esquemas de comunicación. En relación con éstas características de las redes, la topología o el grafo ideal para una red de interconexión es deseable que verifique ciertas propiedades, que citamos a continuación.

Es importante que las redes sean conexas para asegurar que entre dos procesadores cualesquiera siempre exista un camino para enviar un mensaje del uno al otro. La conectividad alude al mínimo número de aristas o vértices que se pueden eliminar para desconectar el grafo. Propiedad a tener en cuenta en el caso de averías en la red, ya que es conveniente que las redes puedan seguir funcionando ante el fallo de alguno de sus nodos o enlaces. En este caso, se habla de redes fiables o tolerantes a fallos.

Otro aspecto de la conectividad en la red se refleja en la dualidad conexión/contención. Cuantas más conexiones o enlaces haya entre los procesadores menos contención presenta la red y viceversa. Asimismo, a medida que aumenta el tráfico que la red soporta también aumenta la contención en la misma.

A partir de una red muy sencilla, como puede ser la estructura de anillo, una forma de mejorar el rendimiento de la red consiste en añadir enlaces de forma homogénea, de modo que el mecanismo de intercambio en cada nodo se pueda implementar fácilmente, y la información se pueda encaminar de manera sistemática. Por este motivo, es adecuado pensar en redes regulares o simétricas. También con vista a la expansión de la red, son más apropiadas las redes regulares. La regularidad implica que todos los vértices del grafo tengan el mismo grado.

Otra propiedad es el diámetro de un grafo que indica la máxima distancia que existe entre dos nodos cualesquiera del mismo. Desde el punto de vista de las redes de interconexión, el diámetro mide el máximo número de nodos que la información puede llegar a visitar hasta alcanzar su destino. Esto influye directamente en el rendimiento de la red, ya que un diámetro grande puede suponer un retraso considerable en la transmisión de la información entre los procesadores.

Otra forma de medir el retraso en la transmisión de la información es a través de la distancia media del grafo, la cual se refiere al número medio de posibles caminos. Por supuesto, interesa que esta distancia no sea muy elevada.

Otra medida alternativa ante posibles fallos en la red, es la h -geodeticidad

propia que indica el número de caminos mínimos (h) que existen al menos entre dos nodos de la red.

En relación con la expandibilidad de la red, se tendrá en cuenta el número geodético, el cual contabiliza el menor número de nodos a través de los cuales se puede alcanzar a todos los nodos de la red. Esto permite difundir la información a partir de unos pocos procesadores, si el número geodético no es muy grande.

Normalmente las condiciones que se les exige a los grafos que se utilizan para modelizar redes de ordenadores son regularidad, existencia de varios recorridos hamiltonianos, alta conectividad, y diámetro pequeño. Atendiendo a las propiedades vistas anteriormente, una red se considera destruida si después de quitar algún vértice o arista, el grafo no es conexo. A estos vértices en cuestión se les denomina puntos de articulación. Mientras que a las aristas se las llama istmos. En consecuencia, la vulnerabilidad de una red está íntimamente relacionada con la conectividad de los vértices y aristas del grafo que la representa. Los grafos circulantes gozan de varias propiedades como simetría, conectividad y regularidad (Boundy y Murty, 1976 [2]) que les convierte en modelos de redes fiables y no vulnerables.

Además del interés teórico que de por sí tiene el estudio de las familias de los Grafos Circulantes, nuestro objetivo se centra en estudiar las propiedades de estos grafos por su utilidad para modelizar redes de interconexión de procesadores, debido a que son un modelo de diseño sencillo y con buen rendimiento, como veremos a lo largo de este trabajo. Dentro de esta familia tienen cabida las redes más tradicionales como el anillo y las redes doble bucle, y dentro de éstas últimas, las redes Midimew.

Este trabajo se organiza de la siguiente forma. Después de una introducción se analizan algunas características, como regularidad y conectividad de los grafos circulantes. La tercera sección se dedica a la geodeticidad de estos grafos, la cual proporciona el número de caminos mínimos entre los vértices del grafo. También se analiza el número geodético que indica el mínimo número de vértices a través de los cuales accedemos a todos los vértices de la red. A continuación se estudia la distancia entre los vértices de estos grafos, con el fin de analizar el retraso en los mensajes y en este sentido se recoge la excentricidad, el radio y el diámetro de esta familia de grafos. También se estudia la distancia media con vistas a obtener menor recorrido entre los vértices de la red. Finalmente se presenta un estudio de la familia de los grafos circulantes que ayuda a elegir los saltos más adecuados que proporcionan la mejor red de interconexión.

2 Características de los grafos circulantes como modelos de redes

Una red de interconexión puede ser vista como un grafo donde n procesadores idénticos están localizados en los vértices del grafo y se comunican a través de las aristas. Se usará la terminología de grafos de los libros que se citan en la bibliografía (Wilson, 1983 [9] y Buckley-Harary, 1990 [4]).

Un grafo circulante $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ es un grafo con n vértices donde cada

vértice v_i está unido a todo vértice $v_{i \pm s_j \pmod n}$ siendo

$$s_1 < s_2 < \dots < s_k < (n + 1)/2.$$

A los valores s_i se les llama tamaño de los saltos. Nótese que la definición excluye saltos de tamaño mayor que $n/2$, ya que tales saltos producen el mismo resultado que un salto de tamaño $(n - s)$, donde $(n - s) < n/2$ (Boesch - Tindell, 1984 [3]).

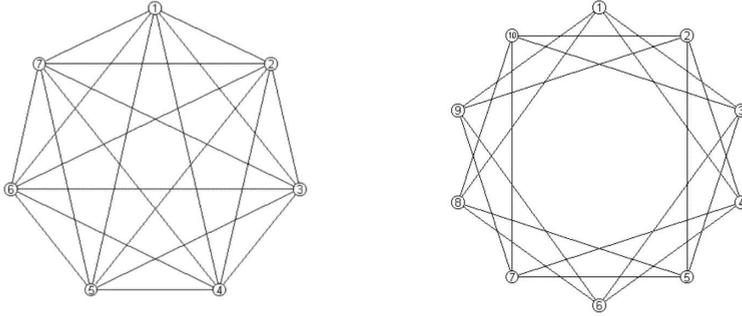


Figure 1: $C_7(1, 2, 3)$

$C_{10}(2, 3)$

Los grafos circulantes dan lugar a estructuras muy regulares, en las que todos los vértices tienen el mismo grado. Sea éste $\delta(v) = \delta$ para todo $v \in G$, en general se denota por $\delta(G) = \delta$ el grado del grafo. De hecho, si todos los saltos $s_i \neq n/2$, entonces el circulante es regular de grado $\delta = 2k$, donde k es el número total de saltos. Cuando n es par se permite el salto $s_i = n/2$ (llamado salto diagonal) y entonces el circulante tiene grado $\delta = (2k - 1)$. Véase en la Figura 1, el circulante $C_7(1, 2, 3)$ con tres tamaños de saltos, que es regular de grado 6 y el $C_{10}(2, 3)$ con dos saltos que es un grafo 4-regular. Los circulantes $C_n(1, 2, \dots, n/2)$ son grafos completos con máximo grado, como es el caso del $C_7(1, 2, 3)$ (Espinell, 1998 [6]).

Entre los circulantes más sencillos, los 2-regulares, se tiene el $C_n(1)$, que se denomina habitualmente **red anillo**, ya que es un ciclo en el que los vértices se conectan de forma consecutiva. Otro caso 2-regular es el circulante $C_n(s)$ con un solo salto $s \neq 1$ y $s \neq n/2$, al que llamaremos **polígono estrellado** por su analogía con la geometría clásica (Coxeter, 1971 [5]). Así, el polígono estrellado $C_7(2)$ es un grafo conexo que además tiene un ciclo Hamiltoniano, mientras que el $C_8(2)$ da lugar a un grafo desconexo formado por dos ciclos disjuntos, como podemos ver en la Figura 2. Los circulantes 3-regulares surgen cuando a los casos anteriores se les añade el salto $s = n/2$, correspondiente a un salto diagonal, como es el grafo $C_{12}(5, 6)$.

Teniendo en cuenta que interesan redes conexas, que en caso de avería ofrezcan caminos alternativos, se propone una clase especial de grafos circulantes construida ampliando el ciclo con otro anillo, denominadas redes doble bucle.

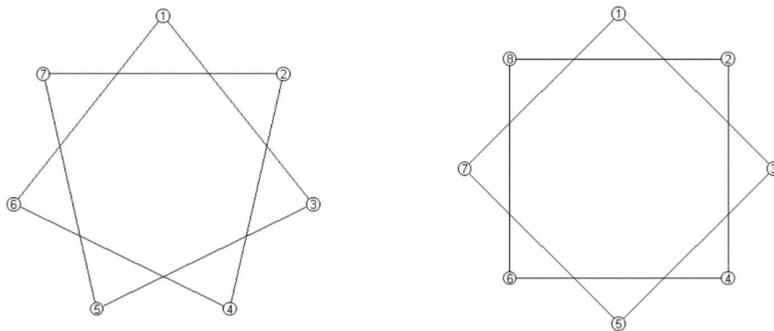


Figure 2: $C_7(2)$

$C_8(2)$

Una **red doble bucle** es un grafo $C_n(s, t)$, donde cada vértice v_i está unido a otros cuatro vértices $v_{i \pm s \pmod n}, v_{i \pm t \pmod n}$, con $0 < s \neq t < n/2$. Nótese que toda red doble bucle es un grafo circulante 4-regular. En esta familia existen grafos que no son conexos como por ejemplo $C_{10}(2, 4)$. Por supuesto, tienen especial interés los conexos que presentan dos ciclos Hamiltonianos disjuntos, como por ejemplo $C_7(2, 3)$. En particular, la red doble bucle $C_n(1, s)$ puede ser considerada como un anillo $C_n(1)$ (formado por el ciclo $0, 1, 2, \dots, n - 1, 0$), además de las cuerdas correspondientes a los saltos s , esto es, $C_n(s)$. Por este motivo se denomina doble bucle (Bermond - Comellas - Hsu, 1995 [1]). Las investigaciones en general se centran en las redes doble bucle (loop networks) $C_n(1, s)$, y en aquellos $C_n(s, t)$ conexos.

La conectividad de un grafo se puede definir en relación a sus vértices o a sus aristas. La conectividad por vértices de un grafo G es el menor número de vértices que podemos suprimir del grafo a fin de desconectarlo, se denota por $\kappa(G) = \kappa$. La conectividad del grafo completo es $\kappa(K_n) = n - 1$. Análogamente, la conectividad por aristas de un grafo G es el mínimo número de aristas que podemos suprimir a fin de desconectar G , se denota por $\lambda(G) = \lambda$. Para cualquier grafo conexo G , se verifica la siguiente relación: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. Así, el grafo circulante $C_{12}(1, 3, 4, 5)$ tiene $\kappa(G) = 6$, $\lambda(G) = 8$ y $\delta(G) = 8$. En general, cuantas más aristas contiene un grafo, mayor es su conectividad por aristas. Un grafo de conectividad κ debe tener al menos $\lceil kn/2 \rceil$ aristas, donde $\lceil x \rceil$ es el menor entero mayor o igual que x .

Un grafo circulante $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ es conexo si y sólo si $m.c.d.(n, s_1, s_2, \dots, s_k) = 1$ (Boesch - Tindell, 1984 [3]). Así, el grafo $C_{12}(2, 3)$ es un grafo conexo. Notemos que en los grafos circulares $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, donde existen s_i, s_j tal que $m.c.d.(s_i, s_j) = 1$, implica que $m.c.d.(n, s_1, s_2, \dots, s_k) = 1$. Por tanto, en dicho caso el grafo es conexo. Por otro lado, el recíproco no es cierto. Si se impone que $s_1 = 1$ se tiene que para cualquier salto s_i el $m.c.d.(1, s_i) = 1$, por tanto el grafo correspondiente es conexo. Por ello interesan especialmente los grafos circulares $C_n(1, s_2, \dots, s_k)$.

Un **k-anillo (k-Chordal Ring)** es un grafo circulante $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ tal que para cualquier salto s_i , el $m.c.d.(n, s_i) = 1$. En particular, el denominado polígono estrellado es un 1-anillo $C_n(s)$ con un único salto primo con el número de vértices. Las redes doble bucle son grafos circulantes $C_n(s, t)$ con dos tamaños de salto distintos, pero no necesariamente son 2-anillos.

Debido a la simetría de los grafos circulantes se podría esperar que éstos tengan conectividad máxima, es decir, que la conectividad por vértices $\kappa(G)$, sea igual al grado de regularidad, $\delta(G)$. Este tipo de redes tienen especial interés en el diseño de redes fiables. Los grafos circulantes que tienen todos los saltos consecutivos, esto es, $C_n(1, 2, 3, \dots, s)$, verifican dicha propiedad. Se sabe que si $\delta \geq n - 2$, entonces $\delta = \kappa$. Así, las redes doble bucle verifican esta propiedad con $\delta = 4 = \kappa$. Sin embargo, si $\delta \geq n/2$, entonces $\delta = \lambda$, como es el caso del circulante $C_8(1, 3, 4)$, donde $\delta = 5 = \lambda$ y $\kappa = 4$.

3 Geodeticidad y número geodético

Es importante la búsqueda de redes donde el recorrido que ha de realizar la información sea lo más corto posible. En este sentido interesan redes que de alguna manera garanticen caminos mínimos entre los vértices de la red. En particular para obtener mayor fiabilidad en la red, sería deseable que entre dos vértices cualesquiera exista más de un camino mínimo, y que además sean disjuntos, esto es, caminos en los que tanto las aristas como los vértices sólo formen parte de uno de los caminos.

Si una red es tal que entre todo par de vértices hay a lo sumo un camino mínimo entre ellos, se dice que la red es **geodética** o que el grafo es geodético. Si en lugar de exigir que exista a lo sumo un camino mínimo, exigimos que haya a lo sumo h caminos mínimos diremos entonces que el grafo es **h -geodético**. En general todo grafo h -geodético es también $(h+n)$ -geodético para cada $n \geq 0$.

Si enlazamos la idea de conexión a través de caminos mínimos con la conexión entre vértices a distancia dada en el grafo, tenemos los llamados **grafos débilmente geodéticos** y **débilmente h -geodéticos**. Estos grafos son aquellos en los cuales cada par arbitrario de vértices, a distancia menor o igual que 2, están conectados por a lo sumo un camino mínimo. Y si la conexión entre cada par arbitrario de vértices es a lo sumo por h caminos mínimos entre vértices que están a distancia menor o igual que $h + 1$, entonces el grafo es débilmente h -geodético. Por último, si la conexión por medio de caminos mínimos se hace por caminos de longitud menor o igual que el diámetro del grafo, el grafo se llamará **fuertemente geodético**. Así, la generalización de estos últimos nos conduce a los grafos **fuertemente h -geodéticos**, esto es, aquellos grafos en los que dos vértices cualesquiera están unidos por a lo sumo h caminos de longitud menor o igual que el diámetro (Ramos, Ramos y Sicilia, 1998 [8]).

Entre los grafos circulantes cabe indicar que los grafos completos son redes geodéticas y por consiguiente, h -geodéticas para cualquier valor de h . Esto no garantiza que existan $h \neq 1$ caminos mínimos entre dos vértices del grafo. Sería deseable garantizar en el grafo al menos dos vértices conectados por más de un

camino mínimo. Así surgen los siguientes conceptos.

Un grafo se dice ***h-geodético propio*** si es un grafo *h-geodético* y existen al menos dos vértices conectados por exactamente *h* caminos mínimos. Con estos grafos garantizamos que si falla un vértice o una arista en algún camino mínimo contamos con otros caminos mínimos que nos conecten los dos vértices dados.

En la Figura 1, el completo $C_7(1, 2, 3)$ es geodético propio, mientras que el grafo $C_{10}(2, 3)$ es 4-geodético propio, ya que por ejemplo entre los vértices 1 y 6 existen cuatro caminos de longitud mínima.

En relación con estas propiedades surge el concepto de **número geodético** que introduciremos seguidamente. Este número nos indica el cardinal del menor conjunto geodético de vértices. Esto es $g(G) = \min_{I(S)=V(G)} |S|$, donde $I(S) = \cup_{u,v \in S} I(u, v)$, con $S \neq \emptyset$, $S \subset V$ y $I(u, v)$ es el conjunto de todos los vértices que forman parte de algún camino mínimo entre *u* y *v*. La geodeticidad propia de un grafo mantiene la siguiente relación con el número geodético: $h \leq n - g(G) \leq n - 2$. El número geodético del grafo $C_7(3)$ que se muestra en la Figura 2 es 3, mientras que el grafo $C_8(2)$ de esta figura no es conexo.

4 Distancias medias en grafos circulantes

Definir distancias en grafos conduce a los conceptos de excentricidad, radio, diámetro, distancia media, etc. Si $d(u, v)$ indica la distancia entre los vértices *u* y *v* de *V*, en el grafo $G = (V, E)$, entonces la **excentricidad** de un vértice *u* se define como $e_G(u) = \max_{v \in V} \{d(u, v)\}$. El **radio** de un grafo *G* es el mínimo de las excentricidades, y lo expresamos por $r(G) = \min_{u \in V} \{e_G(u)\}$. Mientras que el **diámetro** de un grafo *G* es el máximo de las excentricidades y se expresa por $d(G) = \max_{u \in V} \{e_G(u)\}$.

Existen dos problemas clásicos aplicados a los grafos circulantes, el primero de ellos consiste en encontrar el diámetro de un grafo para un determinado conjunto de vértices y saltos, y el segundo plantea la búsqueda de grafos circulantes con un determinado diámetro. En particular, ha sido intensamente estudiado, para un *n* dado, encontrar los saltos *s* y *t* tales que el diámetro del grafo $C_n(s, t)$ sea mínimo. En general, se sabe que para cualquier *n* hay un par (s, t) tal que el diámetro alcanza la cota $\lceil (\sqrt{2n-1} - 1)/2 \rceil$, como ocurre con el $C_7(2, 3)$. Sin embargo, si se fija $s = 1$ hay valores de *n* para los que el diámetro del grafo $C_n(1, t)$ no alcanza la cota anterior. Un grafo circulante $C_n(1, s)$ es **óptimo** si su diámetro es igual a esta cota. Se han desarrollado métodos heurísticos para determinar el tamaño del salto *s* para el cual el grafo $C_n(1, s)$ es óptimo o lo más próximo a un óptimo.

Se dice que un grafo circulante es **denso** si tiene el máximo número posible de vértices para un diámetro dado *k*. Además, si *k* es un entero positivo, un anillo denso $C_n(1)$ tiene $n = 2k + 1$ vértices. Hay otro anillo no denso con $2k$ vértices. Cuando se añade otro salto a la lista, cada entero *k* define una familia de grafos $C_n(s, t)$ que son $4k$ óptimos (con distancia media mínima y además diámetro mínimo). Estos grafos son las redes Midimew de diámetro

k , con $s = b - 1$ y $t = b$, donde $b = \lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \rceil$. Los miembros densos de esta familia tienen $2k^2 + 2k + 1$ vértices. Por ejemplo, el grafo circulante $C_{25}(3, 4)$ cuyo diámetro es 3. Los otros $4k - 1$ grafos de la familia se corresponden con grafos no densos (Martínez y otros, 2003 [7]). En los grafos circulantes todos los vértices tienen la misma excentricidad, por tanto, el diámetro coincide con el radio $r(G) = d(G)$.

Otra medida de la efectividad de una red es su distancia media. La forma tradicional de calcularla es mediante el producto de matrices de adyacencia. No obstante, utilizaremos el método propuesto por Buckley-Harary, 1990 [4], ya que en su proceso de cálculo se obtiene información adicional acerca de otras medidas de los grafos analizados. Se denota por D_i el número de pares de vértices que se encuentran a distancia i en un grafo G conexo, esto es, $D_i = (\sum_{v \in V} d_i(v))/2$, donde $d_i(v)$ representa el número de vértices a distancia i del vértice v . Teniendo en cuenta esto, notemos que D_1 sería igual al número de aristas q en G .

A partir de los D_i se define la distribución de distancias de G como la secuencia $ddG = (D_1, D_2, \dots, D_{d(G)})$, con $d(G)$ el diámetro de G , y a partir de los $d_i(v)$ se define la secuencia de distancias de grado del vértice v como $dds(v) = (d_0(v), d_1(v), \dots, d_{e_G(v)}(v))$ donde:

- (1) $d_0(v) = 1, \forall v \in V$;
- (2) $d_1(v) = \delta(v)$, grado del vértice v ;
- (3) La longitud de la secuencia $dds(v)$ es uno más que la excentricidad de v , y
- (4) $\sum_i d_i(v) = n$, siendo n el número de vértices.

En el caso de la red $C_{15}(1, 2)$, como el grafo es regular, la secuencia $dds(v)$ es igual para todo $v \in V$, siendo $(d_0(v), d_1(v), d_2(v), d_3(v), d_4(v)) = (1, 4, 4, 4, 2)$ (véase Figura 3). Mientras que los D_i tomarían los valores: $dd(G) = (D_1, D_2, D_3, D_4) = (30, 30, 30, 15)$.

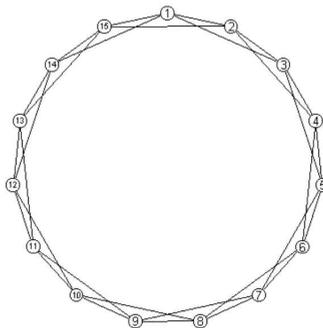


Figure 3: $C_{15}(1, 2)$

En base a lo anterior, la distancia media de un grafo G se define como la media de las distancias entre pares de vértices, y se expresa por

$$\mu_D(G) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{d(G)} iD_i \right)}{\binom{n}{2}}$$

con $d(G)$ el diámetro del grafo. Para la red $C_{15}(1,2)$ de la Figura 3 la distancia media sería $\mu_D(G) = 2.285714$.

5 Análisis comparativo de algunas características en grafos circulantes

Históricamente las conexiones utilizadas en el diseño de redes han sido las siguientes: **bus**, un cable que es compartido por todos los procesadores de la red; **estrella**, procesadores que se conectan a uno central que realiza las funciones de la red y actúa como amplificador de la información; y **anillo**, conexión consecutiva de procesadores mediante un cable común uniendo los extremos.

Estas tres estructuras ya clásicas han sido utilizadas por su sencillez, pero presentan ciertas desventajas en relación con las propiedades ideales de una red. Así, el bus y el anillo son redes poco fiables, al contrario de la estrella. En cuanto a la regularidad y la posible capacidad de expansión, la mejor topología es el anillo. También presentan baja conectividad, así como un diámetro y una distancia media grande, a excepción de la estrella. A pesar de que el número geodético es bajo en las tres, su geodeticidad propia no ofrece recorridos alternativos.

El método más común para mejorar las desventajas anteriores, consiste en aumentar la conectividad a condición de que el diámetro sea pequeño. Esto se consigue añadiendo pocos enlaces en cada nodo de forma homogénea para que el intercambio de información entre los nodos se pueda implementar fácilmente, y la información se envíe a través de recorridos de forma sistemática. En este sentido, los grafos circulantes vienen a solucionar algunas de estas cuestiones, independientemente del interés en sí mismos. La construcción exhaustiva de distintos modelos de circulantes, partiendo de un número de vértices n pequeño, nos lleva a observar determinadas características que a simple vista llaman la atención. Este trabajo se acompaña de una tabla con varios circulantes que permite analizar algunas propiedades de estos grafos, como son: la geodeticidad propia, el número geodético, la conectividad por vértices, la conectividad por aristas, la secuencia de distancias de grado de los vértices, y por último, la distancia media.

Comenzamos con los modelos de redes más sencillos, esto es, el ciclo y el polígono estrellado. En relación con la h -geodeticidad propia, se puede observar en la tabla, que si n es par entonces $h = 2$, ya que al elegir los vértices

diagonalmente opuestos, tenemos 2 caminos mínimos entre ellos. Si n es impar, entonces $h = 1$. Por ejemplo, el ciclo $C_8(3)$ es bigeodético, sin embargo para n impar el ciclo $C_{11}(4)$ es geodético. La red anillo tiene conectividad 2 y diámetro $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. En los anillos $C_{2n}(1)$ y $C_{2n+1}(1)$, el diámetro permanece constante.

Para las redes doble bucle el estudio de la h -geodeticidad lleva a los siguientes resultados. La red $C_n(1, s)$ con $s = n/2$ es 2-geodética propia si s es par, y es 3-geodética propia si s es impar. Así, la red $C_6(1, 3)$ es bigeodética propia, mientras que $C_{10}(1, 5)$ es 3-geodética propia. Otro caso es la red $C_{2n}(1, n-1)$, que es 4-geodética propia. En cualquier caso, las redes doble bucle $C_n(1, s)$ que presentan mayor geodeticidad propia, son las que tienen un salto $s = n/2 - 1$ para n par y $s = \lfloor n/2 \rfloor$ para n impar. Mientras que la red $C_n(s, t)$ es bigeodética propia si alguno de los saltos es diagonal. La conectividad por vértices de las redes $C_n(s, t)$ conexas es $\kappa(G) = 4$. Con esta característica está el $C_{10}(1, 2)$. Mientras que los $C_n(s, t)$ con saltos diagonales, tienen una conectividad $\kappa(G) = 3$, como es el caso del $C_{10}(1, 5)$. También se observa que las redes doble bucle $C_{2n}(1, n)$ presentan una secuencia de distancias de grado cuya estructura es homogénea a medida que aumenta el tamaño del grafo, y sólo difiere en el último valor de la secuencia, que se corresponde con el número de vértices que están a la máxima distancia y que para un n dado es 2 y para el siguiente $n + 1$, es 4.

La mayoría de los grafos de la tabla tienen igual conectividad por vértices, por aristas y grado. Especialmente los 3-anillos $C_n(1, s_1, s_2)$ tienen una alta conectividad $\kappa(G) = 6$, como ocurre con $C_7(1, 2, 3)$, $C_9(1, 2, 4)$, y $C_{11}(1, 2, 3)$. Existen excepciones como el $C_8(1, 3, 4)$, donde $\delta(G) = \lambda(G) = 5$, y $\kappa(G) = 4$.

Como conclusión, este estudio pone de manifiesto que interesan grafos que tengan una geodeticidad propia grande, ya que entonces siempre se va a poder conectar la red a través de ese número de caminos mínimos. Mientras que, en el caso del número geodético, cuanto más pequeño sea éste, se podrá acceder a toda la red con pocos vértices. Por ejemplo, los grafos $C_6(1, 2)$, $C_8(1, 2, 3)$, $C_{10}(1, 2)$, $C_{10}(1, 2, 3, 4)$ $C_{12}(1, 2, 3, 4, 5)$ mantienen el número geodético en 2. En este sentido indicar que los circulantes con un número par de vértices y todos los saltos salvo $n/2$, tienen número geodético mínimo 2 y máxima geodeticidad propia, mientras que con los completos K_n , ocurre lo contrario. También es importante que las redes consideradas tengan un diámetro reducido, así como distancia media pequeña, puesto que con ello se acorta el retraso de los mensajes en la red. Así, con estas características se cita el $C_8(1, 2, 3)$, el $C_9(1, 2, 4)$, y el $C_{10}(1, 2, 3)$. Otro aspecto a resaltar, es que fijado un número n de vértices determinado y a medida que se añaden aristas la distancia media decrece. Véase en la tabla como la distancia media para $n = 10$ pasa de ser 2.777 en el anillo $C_{10}(1)$ a 1.111 para el $C_{10}(1, 2, 3, 4)$.

De los datos observados en la tabla se desprende que al diseñar una red de interconexión mediante el modelo de grafos circulantes interesa conectar primero los vértices más próximos, continuando con saltos consecutivos, y evitando los saltos más alejados, en especial el salto diagonal, ya que con esto se consiguen redes que optimizan los factores o propiedades analizadas en este trabajo.

Grafos Circulantes	Geodet. propia	$g(G)$	κ	λ	$(d_0(v), \dots, d_e(v))$	Distancia Media
$C_3(1) = K_3$	$h = 1$	3	2	2	(1,2)	1
$C_4(1)$	$h = 2$	2	2	2	(1,2,1)	1.333333
$C_4(1,2) = K_4$	$h = 1$	4	3	3	(1,3)	1
$C_5(1)$	$h = 1$	3	2	2	(1,2,2)	1.5
$C_5(2)$	$h = 1$	3	2	2	(1,2,2)	1.5
$C_5(1,2) = K_5$	$h = 1$	5	4	4	(1,4)	1
$C_6(1)$	$h = 2$	2	2	2	(1,2,2,1)	1.8
$C_6(1,2)$	$h = 4$	2	4	4	(1,4,1)	1.2
$C_6(1,3)$	$h = 3$	3	3	3	(1,3,2)	1.4
$C_6(2,3)$	$h = 2$	3	3	3	(1,3,2)	1.4
$C_6(1,2,3) = K_6$	$h = 1$	6	5	5	(1,5)	1
$C_7(1)$	$h = 1$	3	2	2	(1,2,2,2)	2
$C_7(2)$	$h = 1$	3	2	2	(1,2,2,2)	2
$C_7(3)$	$h = 1$	3	2	2	(1,2,2,2)	2
$C_7(1,2)$	$h = 3$	3	4	4	(1,4,2)	1.333333
$C_7(1,3)$	$h = 3$	3	4	4	(1,4,2)	1.333333
$C_7(2,3)$	$h = 3$	3	4	4	(1,4,2)	1.333333
$C_7(1,2,3) = K_7$	$h = 1$	7	6	6	(1,6)	1
$C_8(1)$	$h = 2$	2	2	2	(1,2,2,2,1)	2.285714
$C_8(3)$	$h = 2$	2	2	2	(1,2,2,2,1)	2.285714
$C_8(1,2)$	$h = 2$	4	4	4	(1,4,2,1)	1.571428 P
$C_8(1,3)$	$h = 4$	4	4	4	(1,4,3)	1.428571 P
$C_8(1,4)$	$h = 2$	4	3	3	(1,3,4)	1.571428 P
$C_8(2,3)$	$h = 2$	4	4	4	(1,4,3)	1.428571 P
$C_8(3,4)$	$h = 2$	4	3	3	(1,3,4)	1.571428 P
$C_8(1,2,3)$	$h = 6$	2	6	6	(1,6,1)	1.142857 P
$C_8(1,2,4)$	$h = 4$	3	5	5	(1,5,2)	1.285714 P
$C_8(1,3,4)$	$h = 4$	4	4	5	(1,5,2)	1.285714 P
$C_8(2,3,4)$	$h = 4$	3	5	5	(1,5,2)	1.285714 P
$C_8(1,2,3,4) = K_8$	$h = 1$	8	7	7	(1,7)	1
$C_9(2)$	$h = 1$	3	2	2	(1,2,2,2,2)	2.5
$C_9(4)$	$h = 1$	4	2	2	(1,2,2,2,2)	2.5
$C_9(1,2,3)$	$h = 5$	3	6	6	(1,6,2)	1.25
$C_9(1,2,4)$	$h = 6$	3	6	6	(1,6,2)	1.25
$C_9(1,3,4)$	$h = 5$	3	6	6	(1,6,2)	1.25
$C_9(2,3,4)$	$h = 5$	3	6	6	(1,6,2)	1.25
$C_{10}(1)$	$h = 2$	2	2	2	(1,2,2,2,2,1)	2.7777777
$C_{10}(1,2)$	$h = 4$	2	4	4	(1,4,4,1)	1.666666
$C_{10}(1,4)$	$h = 4$	4	4	4	(1,4,5)	1.555555
$C_{10}(1,5)$	$h = 3$	3	3	3	(1,3,4,2)	1.888888
$C_{10}(2,3)$	$h = 4$	4	4	4	(1,4,5)	1.555555
$C_{10}(2,5)$	$h = 2$	4	3	3	(1,3,4,2)	1.888888

Grafos Circulantes	Geodet. propia	$g(G)$	κ	λ	$(d_0(v), \dots, d_e(v))$	Distancia Media
$C_{10}(1, 2, 3)$	$h = 4$	4	6	6	(1,6,3)	1.3333333
$C_{10}(1, 2, 5)$	$h = 4$	4	5	5	(1,5,4)	1.4444444
$C_{10}(1, 4, 5)$	$h = 2$	6	4	5	(1,5,4)	1.4444444
$C_{10}(2, 3, 5)$	$h = 2$	5	4	5	(1,5,4)	1.4444444
$C_{10}(2, 4, 5)$	$h = 1$	6	5	5	(1,5,4)	1.4444444
$C_{10}(1, 2, 3, 4)$	$h = 8$	2	8	8	(1,8,1)	1.1111111
$C_{10}(1, 2, 3, 5)$	$h = 6$	3	7	7	(1,7,2)	1.6666666
$C_{11}(4)$	$h = 1$	3	2	2	(1,2,2,2,2)	3
$C_{11}(1, 2, 3)$	$h = 3$	5	6	6	(1,6,4)	1.4
$C_{11}(1, 2, 4)$	$h = 5$	4	6	6	(1,6,4)	1.4
$C_{12}(5, 6)$	$h = 2$	5	3	3	(1,3,4,4)	2.0909090909
$C_{12}(1, 2, 3, 5)$	$h = 10$	2	8	8	(1,8,3)	1.27272727
$C_{12}(1, 3, 4, 5)$	$h = 6$	2	6	8	(1,8,3)	1.27272727

Tabla 1

References

- [1] J.C. Bermond, F. Comellas and D.F. Hsu. Distributed Loop Computer Networks: A Survey. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 24, 2–10, 1995.
- [2] J.A. Boundy and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Elsevier North-Holland, 1976.
- [3] F. Boesch and R. Tindell. Circulants and Their Connectivities. *Journal of Graph Theory*, 8, 487–499, 1984.
- [4] F. Buckley and F. Harary. *Distance in Graphs*. Addison Wesley, 1990.
- [5] H.S.M. Coxeter. *Fundamentos de Geometría*. Limusa-Wiley, 1971.
- [6] M.C. Espinel. Grafos: algunas estructuras regulares. *Educación Matemática*, 10(1), 89–98, 1998.
- [7] C. Martínez, R. Beivide, C. Izu and J.M. Alonso, Characterization of the Class of Optimal Dense Circulant Graphs of Degree Four. *XIV Jornadas de Paralelismo-Leganés*. Septiembre de 2003.
- [8] R.M. Ramos, M.T. Ramos and J. Sicilia A generalization of geodetic graph: k-geodetic graph. *Investigación Operativa*, 6, 85-101, 1998.
- [9] R.J. Wilson. *Introducción a la teoría de grafos*. Alianza Universidad, 1983.

A review of basic theoretical results concerning the Navier-Stokes and other similar equations

ENRIQUE FERNÁNDEZ-CARA

Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla
Aptdo. 1180, 41080 Sevilla, Spain

cara@us.es

Abstract

These notes are devoted to provide an introductory approach to the Navier-Stokes and some other related equations. Most concepts and arguments recalled below are very general and we believe that this presentation can be of help for the theoretical analysis of many PDE's arising from Sciences and Engineering. First, we recall the Navier-Stokes equations, we explain the meaning of the variables and data and we state some technical results needed for our study. Then, we state and give the proofs of some basic existence, uniqueness and regularity results. In the proof of existence, we apply usual compactness arguments to a family of Galerkin approximations. We also discuss briefly some of the main open problems arising in the three-dimensional case. In a final section, we review briefly the state of the art for other similar equations and we indicate some related open questions.

Key words: *Navier-Stokes equations; nonlinear PDE's in fluid mechanics; compactness methods for nonlinear PDE's; Galerkin's approximations; existence, uniqueness and regularity results.*

AMS subject classifications: *35Q30, 35Q35, 35K55, 65M60*

1 Introduction. Formulation of the problem and main results

In these notes, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded connected open set at least of class $C^{0,1}$ ($N = 2$ or $N = 3$) and we have $0 < T \leq +\infty$. We will use the notation $Q = \Omega \times (0, T)$ and $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ and we will denote by C a generic positive constant, usually depending on Ω , T and maybe other data.

We will first be concerned with the nonlinear problem

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, & \nabla \cdot u = 0 & \text{in } Q, \\ u = 0 & & \text{on } \Sigma, \\ u(x, 0) = u^0(x) & & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

where $\nu > 0$, $f = f(x, t)$ and $u^0 = u^0(x)$ are given.

This serves to model the behavior of a Newtonian viscous incompressible fluid whose particles fill the spatial domain Ω during the time interval $(0, T)$.

In (1), the unknowns are the \mathbb{R}^N -valued function $u = u(x, t)$ (the velocity field) and the real-valued function $p = p(x, t)$ (the pressure). The data are $f = f(x, t)$ (a density of external forces) and $u^0 = u^0(x)$ (an initial velocity field). It is assumed that the mass density of the fluid is equal to 1. The first equality is the conservation of momentum law, i.e. Newton's second law, written along the trajectories. The second one indicates that the fluid is incompressible, i.e. that the volume occupied by a set of particles is independent of time. We have complemented these equations with boundary conditions on Σ that express that the particles adhere to the wall (and therefore do not slip) and initial conditions at time $t = 0$.

Our first aim in this paper is to recall the main known existence, uniqueness and regularity results that hold for (1), as well as the main ideas needed in their proofs; a complete analysis can be found for instance in [7, 13, 19, 20, 22, 31, 33]. In view of the generality of the concepts and arguments presented below, we believe that this can be of help for the theoretical analysis of the Navier-Stokes and many other PDE's arising from Sciences and Engineering.

From the viewpoint of mechanics, to try to solve (1) is full of sense: we assume that the mechanical state of the fluid at time $t = 0$ and the external forces acting on the fluid during $(0, T)$ are known and we try to determine the mechanical state for $t \in (0, T)$.

However, the equations in (1) are not always appropriate for the description of the flow of an incompressible fluid. Thus, there are many (realistic) modifications of (1) that lead to related mathematical problems. Let us mention some of them:

- The term $-\nu \Delta u$ in (1) is the contribution of viscosity to the motion of particles. In some *idealized* situations, it may be adequate to assume that $\nu = 0$ (this means that the role of viscosity is negligible). Then we find the so called Euler equations:

$$u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0. \quad (2)$$

- Sometimes, it is more accurate to assume that the mass density of the fluid is not a constant. Then we must introduce an additional unknown in (1), the positive real-valued function $\rho = \rho(x, t)$ and we must complete (1) with the *mass conservation* law. The resulting equations are the following:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u + \nabla p = \rho f, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (3)$$

These are the nonhomogeneous incompressible Navier-Stokes equations.

- For more complex flows, ν is not a constant but depends on the mechanical state of the fluid. It is then usual to assume that ν is a positive function of $|Du|$, where $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ is the symmetric part of the gradient of u . This leads to the equations for the so called *quasi-Newtonian* fluids:

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2\nabla \cdot (\nu(|Du|)Du) + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0. \quad (4)$$

- More generally, it may happen that viscous effects depend on u globally, for instance through the solution of a transport equation governed by u . There are many situations where this is the right way to model the fluid. For instance, this is the case for the so called *visco-elastic* fluids of the Oldroyd kind, which obey to the following system:

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = \nabla \cdot \tau + f, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \tau_t + (u \cdot \nabla)\tau + c\tau + g_a(\nabla u, \tau) = bDu. \end{cases} \quad (5)$$

Here, $\tau = \tau(x, t)$ is a symmetric tensor known as the extra elastic stress tensor, c and b are positive constants and $g_a : \mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^{N \times N} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$ is an appropriate bilinear tensor-valued function.

For more details on these and other equations arising in fluid mechanics, see for instance [6, 11, 15, 22, 27, 29]. See also section 5 for a brief review of known results.

There are mainly two reasons to consider problem (1). First, as mentioned above, it can be used for the description of an important family of flows. On the other hand, from a mathematical viewpoint, the analysis of (1) is of high interest, since it leads in practice to the main difficulties one usually encounters when dealing with nonlinear PDE's. To get an idea of the large number of relevant open questions raised by (1), see [14].

Of course, before presenting the main results, we have to give a sense to (1) and specify the kind of solution we are looking for.

We will need some function spaces and basic results. First, let us introduce

$$\mathcal{V} := \{ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^N : \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ in } \Omega \},$$

where $C_0^\infty(\Omega)$ stands for the space formed by the functions $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ of class C^∞ with compact support in Ω . Then we have the following well known De Rham's lemma:

Lemma 1 *Let $S \in \mathcal{D}'(\Omega)^N$ be given, with*

$$\langle S, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

Then there exists $q \in \mathcal{D}'(\Omega)$ such that $S = \nabla q$.

Another version of De Rham's lemma will be given below; see lemma 13 in section 3.

We will denote by H (resp. V) the adherence of \mathcal{V} in the Hilbert space $L^2(\Omega)^N$ (resp. in $H_0^1(\Omega)^N$). Of course, H (resp. V) is a new Hilbert space for the norm of $L^2(\Omega)^N$ (resp. the norm of $H_0^1(\Omega)^N$), which will be denoted by $|\cdot|$ (resp. $\|\cdot\|$).

Moreover, we have

$$H = \{v \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot v = 0 \text{ in } \Omega, v \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}. \quad (6)$$

Here, $n(x)$ is by definition the outward normal vector to Ω at x (a point of $\partial\Omega$). It is known that, for any $v \in L^2(\Omega)^N$ such that $\nabla \cdot v \in L^2(\Omega)$, we can give a sense to the normal trace $v \cdot n$ on $\partial\Omega$ in a space that contains $L^2(\partial\Omega)$. This justifies (6).

As a consequence of lemma 1, we also find that

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla \cdot v = 0 \text{ in } \Omega\}. \quad (7)$$

Another property of the Hilbert spaces H and V is the following:

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V', \quad (8)$$

with dense and compact embeddings; furthermore, V' can be identified (isomorphically and isometrically) to the quotient space $H^{-1}(\Omega)^N / \nabla L^2(\Omega)$. In other words, the "points" of V' can be viewed as the classes of $H^{-1}(\Omega)^N$ determined by the following equivalence relation

$$f \sim g \text{ if and only if } f - g = \nabla q \text{ for some } q \in L^2(\Omega).$$

We will also need to speak of the space of distributions $\mathcal{D}'(D; X)$, where $D \subset \mathbb{R}^m$ is an open set and X is a Banach space; very often, we will have $D = (0, T)$. By definition, $\mathcal{D}'(D; X)$ is the space of linear sequentially continuous mappings $S : \mathcal{D}(D) \mapsto X^1$.

For given $S \in \mathcal{D}'(D; X)$ and $\varphi \in \mathcal{D}(D)$, we will denote by $\langle S, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(D; X), \mathcal{D}(D)}$ or more simply $\langle S, \varphi \rangle$ the point of X assigned by S to φ . We will say that the sequence $\{S_n\}$ converges to S in $\mathcal{D}'(D; X)$ if

$$\langle S_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle S, \varphi \rangle \text{ in } X \text{ for every } \varphi \in \mathcal{D}(D).$$

Every $f \in L_{\text{loc}}^1(D; X)$ determines uniquely a distribution $S_f \in \mathcal{D}'(D; X)$ through the formula

$$\langle S_f, \varphi \rangle = \int_D f(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D).$$

Furthermore, the mapping $f \mapsto S_f$ is linear, sequentially continuous and one-to-one. Accordingly, $L_{\text{loc}}^1(D; X)$ can be identified to a subspace of $\mathcal{D}'(D; X)$

¹Recall that $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(D)$ if all the supports of the functions φ_n are contained in the same compact set $K \subset \subset D$ and any derivative of any order of φ_n converges uniformly in K to the corresponding derivative of φ .

and S_f can be denoted by f . This will be made in the sequel. In particular, for any $p \in [1, +\infty]$, $L^p(D; X)$ is also a subspace of $\mathcal{D}'(D; X)$.

Notice however that there are (many) distributions in $\mathcal{D}'(D; X)$ that do not belong to $L^1_{\text{loc}}(D; X)$. Indeed, if ξ is a point of D and we set

$$\langle \delta_\xi, \varphi \rangle = \varphi(\xi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D),$$

then $\delta_\xi \in \mathcal{D}'(D; X)$, but there is no function $f \in L^1_{\text{loc}}(D; X)$ such that $\delta_\xi = S_f$.

If $S \in \mathcal{D}'(D; X)$ is given, we can give a sense to any derivative of S of any order. Thus, if $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ is a standard multi-index and we set $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $\partial^\alpha S$ is by definition the X -valued distribution given as follows:

$$\langle \partial^\alpha S, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle S, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D).$$

In particular, we can speak of any derivative of a function in $L^1_{\text{loc}}(D; X)$. Notice that, for each α , the linear operator $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(D; X) \mapsto \mathcal{D}'(D; X)$ is sequentially continuous.

The following results are well known. Their proofs can be found for instance in [8] and [31].

Lemma 2 *Let X be a Banach space. Assume that $1 \leq p_0, p_1 \leq +\infty$, $f \in L^{p_0}(0, T; X)$ and $f_t \in L^{p_1}(0, T; X)$. Then $f \in C^0([0, T]; X)$ and we have the estimate*

$$\|f\|_{C^0([0, T]; X)} \leq C \left(\|f\|_{L^{p_0}(0, T; X)} + \|f_t\|_{L^{p_1}(0, T; X)} \right),$$

where C only depends on p_0 and p_1 .

Lemma 3 *Let V and H be Hilbert spaces satisfying (8) with dense and continuous embeddings. Assume that $1 < p < +\infty$, $f \in L^p(0, T; V)$ and $f_t \in L^{p'}(0, T; V')$. Then $f \in C^0([0, T]; H)$ and we have the estimate*

$$\|f\|_{C^0([0, T]; H)} \leq C \left(\|f\|_{L^p(0, T; V)} + \|f_t\|_{L^{p'}(0, T; V')} \right),$$

where C only depends on p . Furthermore, the function $t \mapsto \|f(t)\|_H^2$ is absolutely continuous and one has

$$\frac{d}{dt} \|f(t)\|_H^2 = 2 \langle f_t(s), f(s) \rangle_{V', V} \quad \text{a.e. in } (0, T). \quad (9)$$

Consequently, the following identity holds for any $t_1, t_2 \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \|f(t_2)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|f(t_1)\|_H^2 = \int_{t_1}^{t_2} \langle f_t(s), f(s) \rangle_{V', V} ds. \quad (10)$$

Lemma 4 *Let X and Y be Banach spaces. Assume that X is reflexive, $X \hookrightarrow Y$ with a continuous embedding and $v \in L^\infty(0, T; X) \cap C^0([0, T]; Y)$. Then $v \in C^0_w([0, T]; Y)$, i.e. for every $L \in Y'$ the real-valued function $t \mapsto \langle L, v(t) \rangle_{Y', Y}$ is continuous.*

Following [20], we can now present a first rigorous formulation of (1):

PROBLEM I: Given $f \in L^2(Q)^N$ and $u^0 \in H$, find u and p such that

$$\begin{cases} u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), & p \in \mathcal{D}'(Q), \\ u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{in } \mathcal{D}'(Q), \\ u|_{t=0} = u^0. \end{cases} \quad (11)$$

It will be seen below that any function u satisfying $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ and $u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f$ in $\mathcal{D}'(Q)$ for some $p \in \mathcal{D}'(Q)$ also satisfies $u_t \in L^\sigma(0, T; V')$ for an appropriate $\sigma > 1$. Thus, in view of lemma 2, $u \in C^0([0, T]; V')$ and it is meaningful to speak of $u|_{t=0}$ and to ask for the initial condition in (11) *at least as an equality in V'* .

Notice that, if u and p solve (11), we automatically have $u(\cdot, t) \in V$ for t a.e. in $(0, T)$. Consequently, we have in some sense $\nabla \cdot u = 0$ in Q and $u = 0$ on the lateral boundary Σ .

Let us now give a second formulation of (1):

PROBLEM II: Given $f \in L^2(Q)^N$ and $u^0 \in H$, find u such that

$$\begin{cases} u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ \langle u_t, v \rangle_V + b(u, u, v) + \nu a(u, v) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in V, \\ u|_{t=0} = u^0. \end{cases} \quad (12)$$

Here, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ stands for the duality pairing associated to V and V' , $\ell = \ell(t)$ with

$$\langle \ell(t), v \rangle_V = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T] \quad \text{a.e.}$$

and we have introduced the bilinear and trilinear forms $a(\cdot, \cdot)$ and $b(\cdot, \cdot, \cdot)$, given as follows:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall u, v \in V, \quad (13)$$

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)v \cdot w dx \quad \forall u, v, w \in V. \quad (14)$$

Since $f \in L^2(Q)^N$, we have $\ell \in L^2(0, T; V')$ and $\langle \ell, v \rangle_V \in L^2(0, T)$ for any $v \in V$. On the other hand, if $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, it is not difficult to check that, for each $v \in V$, we have $a(u, v) \in L^2(0, T)$ and, at least,

$$b(u, u, v) \in L^1(0, T) \quad \text{and} \quad \langle u_t, v \rangle \in \mathcal{D}'(0, T).$$

Consequently, the equalities in (12) can be understood in the sense of $\mathcal{D}'(0, T)$.

Let us introduce the linear operator $A : V \mapsto V'$, with

$$\langle Au, v \rangle_V = a(u, v) \quad \forall u, v \in V$$

and the bilinear operator $B : V \times V \mapsto V'$, with

$$\langle B(u, v), w \rangle_V = b(u, v, w) \quad \forall u, v, w \in V.$$

Then an equivalent formulation of (12) is the following:

$$\begin{cases} u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ u_t + B(u, u) + \nu Au = \ell \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, T; V'), \\ u|_{t=0} = u^0. \end{cases} \quad (15)$$

It will be seen below that any function $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ that satisfies $u_t + B(u, u) + \nu Au = \ell$ belongs to $C^0([0, T]; V')$. Thus, the initial conditions in (12) and (15) again make sense.

The main results concerning the existence and uniqueness of solution for problem II are the following:

Theorem 5 *Assume that $f \in L^2(Q)^N$ and $u^0 \in H$ are given. Then there exists at least one solution of problem II.*

Theorem 6 *Assume that $N = 2$ and $f \in L^2(Q)^2$ and $u^0 \in H$ are given. Then problem II possesses exactly one solution.*

We will see in section 3 that any solution of problem II is, together with some p , a solution of problem I. As a consequence, theorems 5 and 6 show that the original system (1) can be solved in an appropriate class.

2 Proof of uniqueness

In this section, we will prove that, when $N = 2$, problem II possesses at most one solution. We will need some previous results:

Lemma 7 *Assume that $N = 2$. Then there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\|v\|_{L^4} \leq C|v|^{1/2}\|v\|^{1/2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (16)$$

The proof can be found in [20]. A consequence of this lemma is the following:

Lemma 8 *Assume that $N = 2$. Then for every $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ one has $B(v, v) \in L^2(0, T; V')$. Furthermore, there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\|B(v, v)\|_{L^2(0, T; V')} \leq C\|v\|_{L^\infty(0, T; H)}\|v\|_{L^2(0, T; V)} \quad (17)$$

for all such v .

Proof: Assume that $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Let us try to estimate $\langle B(v(t), v(t)), w \rangle_V$ for each $w \in V$.

We have:

$$\begin{aligned} \langle B(v(t), v(t)), w \rangle_V &= \int_{\Omega} (v(t) \cdot \nabla) v(t) \cdot w \, dx = - \int_{\Omega} (v(t) \cdot \nabla) w \cdot v(t) \, dx \\ &\leq C \|v(t)\|_{L^4}^2 \|w\| \leq C |v(t)| \|v(t)\| \|w\|. \end{aligned}$$

Hence,

$$\|B(v(t), v(t))\|_{V'} \leq C |v(t)| \|v(t)\|$$

for t a.e. in $(0, T)$ and we obviously have $B(v, v) \in L^2(0, T; V')$ and (17). \blacksquare

Remark 1 When $N = 3$, the estimates (16) and (17) do not hold. In this case, instead of (16) we only have

$$\|v\|_{L^4} \leq C |v|^{1/4} \|v\|^{3/4} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (18)$$

Accordingly, it can be proved that for every $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ one has $B(v, v) \in L^{4/3}(0, T; V')$ and the estimates

$$\|B(v(t), v(t))\|_{V'} \leq C |v(t)|^{1/2} \|v(t)\|^{3/2}$$

a.e. in $(0, T)$ and

$$\|B(v, v)\|_{L^{4/3}(0, T; V')} \leq C \|v\|_{L^\infty(0, T; H)}^{1/2} \|v\|_{L^2(0, T; V)}^{3/2}, \quad (19)$$

but nothing better than this. \blacksquare

Now, assume that $N = 2$ and u and u' are two solutions of (15), where the data $f \in L^2(Q)^2$ and $u^0 \in H$ are given.

Observe that, in this case, u_t and u'_t belong to $L^2(0, T; V')$.

Indeed, we have

$$u_t = \ell - B(u, u) - \nu Au.$$

It is immediate that $\ell, Au \in L^2(0, T; V')$ and, on the other hand, in view of lemma 8, we also have $B(u, u) \in L^2(0, T; V')$. Consequently, $u_t \in L^2(0, T; V')$. A similar argument holds for u'_t .

Let us set $w = u - u'$. Then $w \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $w_t \in L^2(0, T; V')$,

$$w_t + \nu Aw = -B(u, u) - B(u', u') \equiv -B(u, w) - B(w, u') \quad (20)$$

and $w|_{t=0} = 0$.

In view of lemma 3, $w \in C^0([0, T]; H)$ and we have

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 = \langle w_t(t), w(t) \rangle_V \quad \text{a.e. in } (0, T).$$

This, together with (20), yields the following:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu \|w(t)\|^2 &= -b(w(t), u'(t), w(t)) \\ &\leq C |w(t)| \|w(t)\| \|u'(t)\| \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|w(t)\|^2 + C \|u'(t)\|^2 |w(t)|^2. \end{aligned}$$

After integration in time, we deduce at once that

$$|w(t)|^2 \leq C \int_0^t \|u'(s)\|^2 |w(s)|^2 ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (21)$$

and, from Gronwall's lemma, we find that $w \equiv 0$ and u and u' must coincide. This ends the proof of theorem 6. ■

Remark 2 With an argument a little more complicate, it can also be proved that the solution u of problem II depends continuously of the data f and u^0 . For more details, see for instance [31]. ■

Remark 3 In general, the uniqueness of solution of (12) with $N = 3$ and not necessarily small data f and u^0 is unknown. Actually, this is a major open problem in Navier-Stokes theory². ■

When $N = 3$, we have uniqueness of regular solution. For instance, if the solution of (12) satisfies

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \cap L^s(0, T; L^r(\Omega)^3)$$

with $2/s + 3/r \leq 1$ and $r > 3$, then u is the unique solution in this class.

This is a result from [20] (see also [28]) that can be proved as follows:

- It is sufficient to consider the case in which $2/s + 3/r = 1$ and $r > 3$. Let u and u' be two solutions with the previous regularity and let us set $w = u - u'$. Then u_t and u'_t belong to $L^2(0, T; V')$. Indeed, we have for instance that

$$|\langle B(u(t), u(t), v) \rangle_V| \leq |u(t)|^{2/s} \|u(t)\|^{3/r} \|u(t)\|_{L^r} \|v\|$$

for all $v \in V$ and the function $|u|^{2/s} \|u\|^{3/r} \|u\|_{L^r} \in L^2(0, T)$. Consequently, we also have $w_t \in L^2(0, T; V')$.

- Proceeding as in the proof of theorem 6, we have

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu \|w(t)\|^2 = -b(w(t), u'(t), w(t))$$

a.e. in $(0, T)$. But now

$$|\langle B(u(t), u(t), v) \rangle_V| \leq |u(t)|^{2/s} \|u(t)\|^{3/r} \|u(t)\|_{L^r} \|v\|,$$

whence we have again (21) and $w \equiv 0$.

Remark 4 More recently, under the assumption

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \cap C^0(0, T; L^3(\Omega)^3),$$

the uniqueness of solution of (12) with $N = 3$ has been established; see [23]. ■

²When $N = 3$, regularity results for non necessarily small data are also open; see section 4.

3 Proof of existence. Galerkin approximations and the compactness method

This section is devoted to provide the proof of theorem 5. We will use a compactness method in combination with a Galerkin approximation scheme with special basis.

More precisely, we will first choose a very particular basis of V , we will construct a family of approximated solutions u^m ($m \geq 1$) and we will deduce appropriate estimates for u^m and u_t^m which lead to the existence of “weakly convergent” subsequences. Then, we will check that any of these subsequences converge strongly somewhere and consequently the corresponding limit is a solution to problem II. This last point is needed (and even crucial) in the proof, since the problem is nonlinear and therefore, roughly speaking, weak convergence does not suffice to pass to the limit in the equations.

Let us then begin with the proof. Recall that, in the sequel, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ stands for the duality pairing connecting V and V' ; we will denote by (\cdot, \cdot) the usual scalar products in $L^2(\Omega)$ and H .

We will use the following well known result, which is a consequence of Hilbert-Schmidt theorem and the compactness and density of the embeddings in (8):

Lemma 9 *There exists a Hilbert basis $\{w^1, w^2, \dots\}$ of V with the w^m satisfying*

$$\begin{cases} (\nabla w^m, \nabla v) = \lambda_m(w^m, v) & \forall v \in V, \quad w^m \in V, \\ |w^m| = 1, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_m \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (22)$$

The functions w^m are orthogonal in V and orthonormal (and also complete) in H .

Let V_m be the space spanned by the m first eigenfunctions w^1, \dots, w^m and let $\tilde{P}_m : V' \mapsto V_m$ the orthogonal projector defined by

$$\tilde{P}_m g = \sum_{i=1}^m \langle g, w^i \rangle_V w^i \quad \forall g \in V'.$$

The important property satisfied by $\{w^1, w^2, \dots\}$ is that, regarded as a linear bounded operator from V' into itself, the norm of \tilde{P}_m is equal to 1:

$$\|\tilde{P}_m\|_{\mathcal{L}(V'; V')} = 1 \quad \forall m \geq 1. \quad (23)$$

Let $\{f^m\}$ be a sequence in $C^0(\overline{Q})^N$ satisfying $f^m \rightarrow f$ strongly in $L^2(Q)^N$ as $m \rightarrow \infty$. We will divide the proof in five steps:

STEP 1: CONSTRUCTION OF THE APPROXIMATED SOLUTIONS.

For each $m \geq 1$, we consider the following finite dimensional problem: Find a C^1 function $u^m : [0, T] \mapsto V_m$ such that

$$\begin{cases} (u_t^m, v) + b(u^m, u^m, v) + \nu a(u^m, v) = (f^m, v) & \forall v \in V_m, \quad t \in (0, T), \\ u^m|_{t=0} = u^{0m}. \end{cases} \quad (24)$$

Here, $u^{0m} = P_m u^0$, where $P_m : H \mapsto V_m$ is the usual orthogonal projector, given as follows:

$$P_m h = \sum_{i=1}^m (h, w^i) w^i \quad \forall h \in H$$

(compare with the definition of \tilde{P}_m).

If we put

$$u^m(t) = \sum_{i=1}^m \eta_{im}(t) w^i, \quad (25)$$

then (24) can be regarded as a Cauchy problem for a first order ordinary differential system where the unknowns are the functions η_{im} . More precisely, an equivalent formulation of (24) is the following:

$$\begin{cases} \eta'_{jm} + \sum_{i,k=1}^m b(w^i, w^k, w^j) \eta_{im} \eta_{km} + \nu \lambda_j \eta_{jm} = (f^m, w^j) & \forall j = 1, \dots, m, \\ \eta_{jm}(0) = (u^0, w^j) & \forall j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (26)$$

Therefore, the classical existence and uniqueness theory for ordinary differential systems can be applied and we can affirm that, for each $m \geq 1$, there exist $T_m > 0$ and a unique function $u^m : [0, T_m) \mapsto V_m$ that solves (24) at least in $[0, T_m)$. Furthermore, for every m the following alternative holds:

$$\text{Either } T_m = T, \text{ or } \limsup_{t \rightarrow T_m} |u^m(t)| = +\infty. \quad (27)$$

The estimates we are going to deduce for the functions u^m will show that only the first of these two assertions can be true.

STEP 2: A PRIORI ESTIMATES OF u^m .

The aim in this and the following step is to get estimates of u^m independent of m . We will then apply some general principles in Functional Analysis that state that, in many Banach spaces, bounded sets are relatively weakly sequentially compact and consequently possess weakly convergent subsequences (see propositions 10 and 11 below).

The first (and most important) estimates that we can find are the so called *energy estimates*. They are obtained as follows.

For each $t \in [0, T_m)$, let us take $v = u^m(t)$ in (24). We get the identity

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u^m(t)|^2 + \nu \|u^m(t)\|^2 = (f^m(\cdot, t), u^m(t)). \quad (28)$$

Integrating in the time interval $[0, t]$, we also have

$$\frac{1}{2}|u^m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u^m(s)\|^2 ds = \frac{1}{2}|u^{0m}|^2 + \int_0^t (f^m(\cdot, s), u^m(s)) ds. \quad (29)$$

Now, using Young's inequality and the definitions of u^{0m} and ℓ , it is immediate that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u^m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u^m(s)\|^2 ds &= \frac{1}{2}|u^{0m}|^2 + \int_0^t (f^m(\cdot, s), u^m(s)) ds \\ &\leq \frac{1}{2}|u^0|^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|u^m(s)\|^2 ds + C \int_0^t |f(\cdot, s)|^2 ds \end{aligned} \quad (30)$$

and

$$|u^m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u^m(s)\|^2 ds \leq |u^0|^2 + C \|f\|_{L^2(Q)}^2. \quad (31)$$

This holds for all $t \in [0, T_m)$. Consequently, in view of (27), we have $T_m = T$ and

$$\|u^m\|_{L^\infty(0, T; H)} + \|u^m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad (32)$$

where C depends on Ω , T , ν , $|u^0|$ and $\|f\|_{L^2(Q)}$ but is independent of m .

The identity (29) (that hold for all $t \in [0, T]$) is known as the energy equality for u^m . It can be interpreted as follows:

The sum of the kinetic energy of the fluid particles at time t and the energy that has been dissipated (or lost) as a consequence of viscosity during the interval $(0, t)$ is equal to the sum of the initial kinetic energy and the mechanical work due to external forces.

For this reason, the Banach space $E = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ (endowed with the sum of the norms in the left hand side of (32)) is called the *energy space* of the solutions of problem II. Accordingly, (31) and (32) are the so called energy estimates.

STEP 3: A PRIORI ESTIMATES OF u_t^m .

It will be seen below that, due to the nonlinear terms, the estimates (32) do not suffice to pass to the limit in (24). We will also need some uniform estimates of u_t^m .

In order to obtain them, we argue as follows. First, we notice that

$$(u_t^m(t), v) = \langle \ell^m(t) - B(u^m(t), u^m(t)) - \nu A u^m(t), v \rangle_V$$

for all $v \in V_m$ a.e. in $(0, T)$, where $\ell^m \in L^2(0, T; V')$ is defined by the equalities

$$\langle \ell^m(t), v \rangle_V = \int_\Omega f^m(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T] \quad \text{a.e.}$$

Consequently, since $u_t^m(t) \in V_m$, we have

$$u_t^m(t) = \tilde{P}_m(\ell^m(t) - B(u^m(t), u^m(t)) - \nu Au^m(t))$$

a.e. in $(0, T)$. Recalling (23), we see that

$$\|u_t^m(t)\|_{V'} \leq \|\ell^m(t)\|_{V'} + \|B(u^m(t), u^m(t))\|_{V'} + \nu \|Au^m(t)\|_{V'} \quad \text{a.e.} \quad (33)$$

It is clear that $\|\ell^m(t)\|_{V'} \leq |f^m(\cdot, t)| \leq C|f(\cdot, t)|$. When $N = 2$, we can apply lemma 8 and (32) and deduce that u_t^m is uniformly bounded in $L^2(0, T; V')$. When $N = 3$, we can instead apply remark 1; we see in this case that u_t^m is uniformly bounded in $L^{4/3}(0, T; V')$. Summarizing, we have:

$$\|u_t^m\|_{L^\sigma(0, T; V')} \leq C \quad \text{with } \sigma = 2 \text{ if } N = 2 \text{ and } \sigma = 4/3 \text{ if } N = 3. \quad (34)$$

STEP 4: THE CHOICE OF CONVERGENT SUBSEQUENCES.

In this step, we will use (32) and (34) to extract several subsequences of $\{u^m\}$ with appropriate convergence properties. For simplicity, all them will be indexed again with m .

We will need below the following results, whose proofs can be found for instance in [3]:

Proposition 10 *Let X be a reflexive Banach space and let $B \subset X$ be a bounded set. Then B is weakly relatively sequentially compact. In other words, any sequence in B possesses weakly convergent subsequences. In particular, this holds in any Hilbert space.*

Proposition 11 *Let X be a separable Banach space, let us denote by X' the associated dual space and let $B \subset X'$ be a bounded set. Then B is weakly-* relatively sequentially compact. In other words, any sequence in B possesses weakly-* convergent subsequences.*

Notice that $L^2(0, T; V)$ is a Hilbert space and u^m is uniformly bounded in $L^2(0, T; V)$. Hence, in view of proposition 10, there exists a first subsequence satisfying

$$u^m \rightharpoonup u \quad \text{weakly in } L^2(0, T; V). \quad (35)$$

From (35), one also has $u^m \rightharpoonup u$ in $\mathcal{D}'(0, T; V')$, whence

$$u_t^m \rightharpoonup u_t \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, T; V'). \quad (36)$$

Secondly, observe that $L^\infty(0, T; H)$ can be identified with the dual of the separable Banach space $L^1(0, T; H)$. Accordingly, using proposition 11 we find a new subsequence satisfying (35) and

$$u^m \rightharpoonup^* u \quad \text{weakly-* in } L^\infty(0, T; H). \quad (37)$$

Let us now consider the sequence $\{u_t^m\}$ in $L^\sigma(0, T; V')$. Taking into account (34) and the fact that $L^\sigma(0, T; V')$ is a reflexive Banach space and applying proposition 11, we see that, at least for a new subsequence, we have (35), (37) and

$$u_t^m \rightarrow z \text{ weakly in } L^\sigma(0, T; V'). \quad (38)$$

From (36), it is clear that $z = u_t$ and thus

$$u_t^m \rightarrow u_t \text{ weakly in } L^\sigma(0, T; V'). \quad (39)$$

We will now use a *compactness result* in order to deduce from (35) and (39) a strong convergence property for u^m :

Theorem 12 *Let X_0 , X and X_1 be three Banach spaces such that X_0 and X_1 are reflexive and*

$$X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1, \quad (40)$$

where the first embedding is compact and the second one is continuous. Assume that $1 < p_0, p_1 < +\infty$ and let us introduce the linear space

$$W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1) = \{z \in L^{p_0}(0, T; X_0) : z_t \in L^{p_1}(0, T; X_1)\},$$

which is endowed with the “natural” norm

$$\|z\|_{W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1)} = \|z\|_{L^{p_0}(0, T; X_0)} + \|z_t\|_{L^{p_1}(0, T; X_1)}.$$

Then $W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1)$ is a reflexive Banach space and the embedding

$$W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; X)$$

is compact.

This result is due to J.-L. Lions and J. Peetre; see [21]. It will be applied here with $X_0 = V$, $X = H$, $X_1 = V'$, $p_0 = 2$ and $p_1 = \sigma$. Thus, in view of (35) and (39), extracting if necessary a new subsequence, one has:

$$u^m \rightarrow u \text{ strongly in } L^2(0, T; H). \quad (41)$$

Obviously, it is then not restrictive to assume that

$$u^m \rightarrow u \text{ strongly in } L^2(Q)^N \text{ and a.e.} \quad (42)$$

A crucial point is that (35), (37) and (42) together imply

$$B(u^m, u^m) \rightarrow B(u, u) \text{ weakly in } L^\sigma(0, T; V'). \quad (43)$$

Indeed, $B(u^m, u^m)$ is uniformly bounded in $L^\sigma(0, T; V')$. Consequently, at least for a subsequence one has $B(u^m, u^m) \rightarrow \tilde{B}$ weakly in this space. For any $\varphi \in \mathcal{V}$ and any $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, we then have

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \tilde{B}(t), \varphi \rangle_V \psi(t) dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \langle B(u^m(t), u^m(t)), \varphi \rangle_V \psi(t) dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \iint_Q (u^m \cdot \nabla) u^m \cdot \varphi \psi dx dt = - \lim_{m \rightarrow \infty} \iint_Q (u^m \cdot \nabla)(\varphi \psi) \cdot u^m dx dt. \end{aligned}$$

But this coincides with

$$-\iint_Q (u \cdot \nabla)(\varphi\psi) \cdot u \, dx \, dt = \iint_Q (u \cdot \nabla)u \cdot \varphi\psi \, dx \, dt,$$

because all the functions $u_i^m u_j^m$ converge strongly in $L^1(Q)$. We thus find that

$$\int_0^T \langle \tilde{B}(t), \varphi \rangle_V \psi(t) \, dt = \int_0^T \langle B(u(t), u(t)), \varphi \rangle_V \psi(t) \, dt$$

for all $\varphi \in \mathcal{V}$ and $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$. Obviously, this implies that $\tilde{B} = B(u, u)$. Since this argument can be applied to any subsequence converging weakly in $L^\sigma(0, T; V')$, we get (43).

STEP 5: THE PASSAGE TO THE LIMIT.

We are now ready to pass to the limit in (24).

Thus, let us consider a subsequence $\{u^m\}$ satisfying (35), (37), (39), (42) and (43). Of course, $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ and $u_t \in L^\sigma(0, T; V')$, whence in particular $u \in C^0([0, T]; V')$ and $u \in C_w^0([0, T]; H)$.

First of all, notice that

$$u^m(0) \rightarrow u(0) \text{ weakly in } V'. \tag{44}$$

Indeed, from (35), (39) and lemma 3 we know that $u^m \rightarrow u$ weakly in $C^0([0, T]; V')$. Since the linear mapping $v \mapsto v(0)$ is continuous from $C^0([0, T]; V')$ into V' , we have (44).

From (44) and the facts that $u^m(0) = u^{0m}$ and $u^{0m} \rightarrow u^0$ strongly in H , the following holds:

$$u|_{t=0} = u^0.$$

This shows that the initial condition in problem II is satisfied by u .

Now, let us fix v in the space $\cup_{j \geq 1} V_j$. For any sufficiently large m , one has

$$\langle u_t^m(t), v \rangle + \langle B(u^m(t), u^m(t)), v \rangle_V + \nu \langle Au^m(t), v \rangle_V = \langle \ell^m(t), v \rangle_V \tag{45}$$

a.e. in $(0, T)$. We will check that the three terms in the left hand side of (45) converge in $\mathcal{D}'(0, T)$ respectively to $\langle u_t, v \rangle_V$, $\langle B(u, u), v \rangle_V$ and $\nu \langle Au, v \rangle_V$.

Indeed, since $(u^m, v) \rightarrow (u, v)$ strongly in $L^2(0, T)$, we have $(u_t^m, v) = (u^m, v)_t \rightarrow (u, v)_t = \langle u_t, v \rangle_V$ in $\mathcal{D}'(0, T)$. It is also clear in view of (43) that $\langle B(u^m, u^m), v \rangle_V \rightarrow \langle B(u, u), v \rangle_V$ weakly in $L^\sigma(0, T)$. Finally, from (35), we also have $Au^m \rightarrow Au$ in $L^2(0, T; V')$ and $\langle Au^m, v \rangle_V \rightarrow \langle Au, v \rangle_V$ weakly in $L^2(0, T)$.

Taking into account that $\langle \ell^m, v \rangle_V \rightarrow \langle \ell, v \rangle_V$ strongly in $L^2(0, T)$, we conclude that the function u satisfies

$$\langle u_t, v \rangle_V + \langle B(u, u), v \rangle_V + \nu \langle Au, v \rangle_V = \langle \ell, v \rangle_V \text{ in } \mathcal{D}'(0, T) \tag{46}$$

for any $v \in \cup_{j \geq 1} V_j$. By density, it is obvious that (46) must also hold for any $v \in V$. Consequently,

$$u_t + B(u, u) + \nu Au = \ell \text{ in } \mathcal{D}'(0, T; V').$$

This shows that u solves problem II.

Consequently, theorem 5 is proved. \blacksquare

Remark 5 It is not difficult to prove that the solution we have found satisfies the energy inequalities

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|u(\cdot, t')|^2 + \nu \int_t^{t'} \|u(\cdot, s)\|^2 ds \\ & \leq \frac{1}{2}|u(\cdot, t)|^2 + \int_t^{t'} (f(\cdot, s), u(s)) ds \end{aligned} \quad (47)$$

for all $t, t' \in [0, T]$ with $t < t'$. However, in general it is unknown whether similar equalities hold. For more details about energy inequalities, see [22].

To end this section, let us prove that we have solved in fact problem I. More precisely, let us show that problems I and II are equivalent.

Thus, let u and p solve problem I. Then, for any $\varphi \in \mathcal{V}$ and any $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, we have:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p - f, \varphi \psi \rangle_{\mathcal{D}'(Q)^N, \mathcal{D}(Q)^N} \\ &= \iint_Q (-u \cdot (\psi \varphi)_t + (u \cdot \nabla)u \cdot (\psi \varphi) + \nu \nabla u \cdot \nabla(\psi \varphi)) dx dt \\ &\quad - \iint_Q f \cdot (\psi \varphi) dx dt \\ &= - \int_0^T \left(\int_\Omega u \cdot \varphi dx \right) \psi_t dt + \int_0^T (b(u, u, \varphi) + \nu a(u, \varphi) - \langle \ell, \varphi \rangle_V) \psi dt. \end{aligned}$$

Hence,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_\Omega u \cdot \varphi dx \right) + b(u, u, \varphi) + \nu a(u, \varphi) = \langle \ell, \varphi \rangle_V \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, T)$$

for all $\varphi \in \mathcal{V}$. This proves that u is a solution of problem II.

In order to prove the reciprocal, we will use the following Banach-valued version of De Rham's lemma:

Lemma 13 *Let E be a Banach space and let $S \in \mathcal{D}'(\Omega; E)^N$ be given, with*

$$\langle S, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

Then there exists $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ such that $S = \nabla q$. Furthermore, if $r \in (1, +\infty)$, $s \in \mathbb{Z}$ and $S \in W^{s,r}(\Omega; E)^N$, we can choose q in $W^{s+1,r}(\Omega; E)$ and depending continuously of S , i.e. such that the mapping $S \in W^{s,r}(\Omega; E)^N \mapsto q \in W^{s+1,r}(\Omega; E)$ is continuous.

Let u be a solution to problem II and let us set

$$S = u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u - f.$$

It is then easy to check that $S \in W^{-1,\infty}(0, T; H) + L^\sigma(0, T; H^{-1}(\Omega)^N) \subset W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$. But this last Banach space is isomorphic and isometric to $H^{-1}(\Omega; W^{-1,\infty}(0, T))^N$. Therefore, we can apply lemma 13 with $E = W^{-1,\infty}(0, T)$ (recall that $\langle S, \varphi \rangle = 0$ for all $\varphi \in \mathcal{V}$). The conclusion is that there exists $p \in L^2(0, T; W^{-1,\infty}(0, T))$ such that $S = -\nabla p$. In other words, for some $p \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$, one has

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f \text{ in } \mathcal{D}'(Q)^N.$$

This proves that u and p solve problem II.

Remark 6 There are other ways to prove the existence of solution of problem II. Some of them are nonconstructive and rely on appropriate fixed point theorems; see for instance [19, 33]. There are also other constructive proofs; see [20, 31, 22]. ■

Remark 7 With similar arguments, the existence of solutions of problems I and II can be proved under slightly more general assumptions. Thus, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ can be an arbitrary connected open set (not necessarily bounded), the right hand side f can belong to the space $L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)^N)$, etc. ■

Remark 8 Assume that the nonlinear term $b(u, u, v)$ is omitted in (12). Then we can argue as in steps 1 and 2 of the proof of theorem 5 and construct Galerkin approximations u^m satisfying (32). This suffices to choose a subsequence satisfying (35) and (37). But now this is enough to pass to the limit in the approximated problems in all the terms. Consequently, the need of the estimates (34) for the approximated solutions of (12) comes from the fact that this system contains nonlinear terms. ■

Remark 9 Lemma 12 is interesting by itself. It provides a criterion to ensure the relative compactness of a family $\mathcal{F} \in L^{p_0}(0, T; X)$. This subject has been investigated by J. Simon in [30]. There, the following assertion is proved:

Assume that X is a Banach space, $1 \leq p_0 < +\infty$ and $\mathcal{F} \subset L^{p_0}(0, T; X)$ is given. Then \mathcal{F} is relatively compact in $L^{p_0}(0, T; X)$ if and only if one has:

- The set

$$\left\{ \int_{t_1}^{t_2} f(s) ds : f \in \mathcal{F} \right\}$$

is relatively compact in X for any $t_1, t_2 \in [0, T]$ with $t_1 \leq t_2$.

- $\|\tau_h f - f\|_{L^{p_0}(0, T-h; X)} \rightarrow 0$ uniformly in $f \in \mathcal{F}$ as $h \rightarrow 0$. Here, $\tau_h f(t) \equiv f(t+h)$ for any $t \in [0, T-h]$ and any $h \in (0, T)$.

■

4 Some regularity results

Besides existence and uniqueness results, it is also interesting to investigate *regularity properties* of the solutions of problem II. Indeed, it is reasonable to expect that, when the open set Ω and the data f and u^0 are more regular than in theorem 5, so are the associated solutions.

When $N = 2$, this can be established rigorously. For instance, we have the following:

Theorem 14 *Assume that $N = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded connected open set of class $C^{1,1}$, $f \in L^2(Q)^2$ and $u^0 \in V$. Then the unique solution of problem II satisfies*

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2) \cap C^0([0, T]; V), \quad u_t \in L^2(0, T; H). \quad (48)$$

For the proof, it suffices to get uniform estimates of the Galerkin approximations u^m in $L^2(0, T; H^2(\Omega)^2)$ and $L^\infty(0, T; V)$ and uniform estimates of the time derivatives u_t^m in $L^2(0, T; H)$.

The estimates of u^m can be obtained by taking in (24) $v = Au^m(t)$ for each $t \in (0, T)$. Indeed, with the notation (25), we have

$$Au^m(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_{im}(t) w^i$$

and this shows that this choice of v is admissible. We easily deduce that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u^m(t)\|^2 + \nu \int_0^t |Au^m(s)|^2 ds &= \frac{1}{2} \|u^{0m}\|^2 + \int_0^t (f^m(\cdot, s), Au^m(s)) ds \\ &\quad - \int_0^t b(u^m(s), u^m(s), Au^m(s)) ds \\ &\leq \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t |Au^m(s)|^2 ds + C \int_0^t |f(\cdot, s)|^2 ds \\ &\quad + C \int_0^t |u^m(s)|^2 \|u^m(s)\|^4 ds. \end{aligned}$$

Here, we have used that $u^0 \in V$. These inequalities, together with (32), Gronwall's lemma and the regularity of Ω , yield the desired bounds for u^m .

For the estimates of u_t^m , we take $v = u_t^m(t)$ in (24). Now, we find that

$$\begin{aligned} |u_t^m(t)|^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|u^m(t)\|^2 &= (f^m(\cdot, t), u_t^m(t)) - b(u^m(t), u^m(t), u_t^m(t)) \\ &\leq \frac{1}{2} |u_t^m(t)|^2 + |f(\cdot, t)|^2 + C \|u^m(t)\|_{H^2}^2 \|u^m(t)\|^2 \end{aligned}$$

and integrating with respect to t we find that u_t^m is uniformly bounded in $L^2(0, T; H)$. For more details, see for example [7].

When $N = 3$, the situation is much more complicated. We can obtain results of the kind of theorem 14 only when the data are small (in appropriate norms). For instance, we have the following result:

Theorem 15 *Assume that $N = 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded connected open set of class $C^{1,1}$, $f \in L^2(Q)^3$ and $u^0 \in V$. Then there exists $\varepsilon > 0$ (depending on Ω) such that, whenever*

$$\|u^0\| + \|f\|_{L^2(Q)^3} \leq \varepsilon, \quad (49)$$

the solution of problem II furnished by theorem 5 satisfies

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3) \cap C^0([0, T]; V), \quad u_t \in L^2(Q)^3 \quad (50)$$

and is unique in this class.

For the proof, we try to find the same estimates above for the Galerkin approximations u^m and their time derivatives u_t^m . In this case, we find that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u^m(t)\|^2 + \nu \int_0^t |Au^m(s)|^2 ds &\leq \frac{1}{2} \|u^0\|^2 + C \int_0^t |f(\cdot, s)|^2 ds \\ &+ \frac{\nu}{2} \int_0^t |Au^m(s)|^2 ds + C \int_0^t \|u^m(s)\|^6 ds \end{aligned}$$

and, in order to conclude, the assumption (49) is needed (with ε sufficiently small).

We refer to [13] and [7] for more details.

Remark 10 Using appropriately lemma 13, we can deduce from (48) and (50) further regularity properties for p . In particular, under the assumptions of theorems 14 or 15, we find that $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Accordingly, the PDE's in (11) are satisfied a.e. in Q . ■

Remark 11 It is completely unknown whether “large” regular data f and u^0 lead to regular solutions when $N = 3$. In fact, one of the one-million dollars open problems proposed by the Clay Institute in 2000 is the following:

Assume that $\Omega = \mathbb{R}^3$, $f \equiv 0$ and $u^0 \in \mathcal{V}$. Prove that problem II possesses a solution u of class C^∞ .

See http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/ for more details. ■

5 Some other results and open questions

In this section, we will take $T = +\infty$, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ and $\Sigma = \partial\Omega \times (0, +\infty)$. Here, our aim is to recall very briefly some of the main known results concerning variants of the Navier-Stokes equations. We will only consider fluids modelled by the equations (2), (3), (4) and (5). We believe this is enough to get an idea of the variety and complexity of the subject.

5.1 The incompressible Euler equations

When viscous effects are negligible, it is admissible to take $\nu = 0$ in the motion equation. For example, this is the case when we are considering the flow of the air around an obstacle at high velocity and we observe the behavior of the fluid only at points located far from the obstacle. This leads to the incompressible Euler equations (2).

Now, the fluid is modelled by a system of nonlinear *first-order* equations. Accordingly, it is reasonable to look for solutions satisfying not so many complementary conditions as in (1). On the other hand, it is also realistic to expect that, in principle, the solution be less regular than in the Navier-Stokes case.

To fix ideas, we will consider the system

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, & \nabla \cdot u = 0 & \text{in } Q, \\ u \cdot n = 0 & & \text{on } \Sigma, \\ u(x, 0) = u^0(x) & & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (51)$$

where $u^0 = u^0(x)$ is given. It will be said that u is (together with some p) a weak solution of (51) if $u \in L^2(0, +\infty; V) \cap L^\infty(0, +\infty; H)$,

$$\langle u_t, v \rangle_V + b(u, u, v) = 0 \quad \forall v \in V \quad (52)$$

and $u|_{t=0} = u^0$. It should be noticed that this is equivalent to

$$\iint_Q u \cdot (\varphi_t + (u \cdot \nabla)P\varphi) \, dx \, dt + \int_\Omega u^0(x) \cdot \varphi(x, 0) \, dx = 0 \quad (53)$$

for any $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{Q})^N$ (recall that $P : L^2(\Omega)^2 \mapsto H$ is the usual orthogonal projector) and slightly stronger than

$$\iint_Q u \cdot (\varphi_t + (u \cdot \nabla)\varphi) \, dx \, dt + \int_\Omega u^0(x) \cdot \varphi(x, 0) \, dx = 0 \quad (54)$$

for any $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{Q})^N$ satisfying $\nabla \cdot \varphi = 0$ in Q .

Then the following is known:

Theorem 16 *Let us assume that $N = 2$, $u^0 \in H$ and $\nabla \times u^0 \in L^\infty(\Omega)$. Then (51) possesses exactly one weak solution u furthermore satisfying*

$$u \in C^0([0, +\infty); W^{1,q}(\Omega)^2) \quad \forall q \in (1, +\infty). \quad (55)$$

For the proof, see [32]. A similar existence result can also be proved when $u^0 \in H$ and $\nabla \times u^0 \in L^r(\Omega)$ for some $r \in (1, +\infty)$, but the uniqueness of weak solution is unknown in this case; for more details, see [22].

When $N = 3$, the situation is much more complicated (and less understood). In general, only local in time existence results can be ensured for large initial data (even if they are smooth). A lot of appropriate numerical results and the

analysis of some similar systems seem to indicate that regular solutions can blow-up at finite time; see for instance [12, 18] and the references therein. But the problem remains open at present.

For completeness, let us recall the following result, whose proof can be found in [1]:

Theorem 17 *Let us assume that $N = 3$ and $u^0 \in H^s(\Omega)^3 \cap H$ for some $s > 5/2$. Then there exists $T^* > 0$ such that (51) possesses exactly one weak solution in $\Omega \times (0, T^*)$. This solution satisfies*

$$u \in C^0([0, T]; H^s(\Omega)^3) \quad \forall T \in (0, T^*).$$

Furthermore, if $T^* < +\infty$, then

$$\int_0^{T^*} \|(\nabla \times u)(\cdot, t)\|_{L^\infty} dt = +\infty. \quad (56)$$

5.2 The variable density Navier-Stokes equations

In practice, it is frequent to find fluids for which mass-density is not a constant but a function of space and time. This can be the case of a river or a portion of an ocean. The resulting equations are (3), where $\mu > 0$.

Observe that, in (3), the new variable ρ satisfies a (first-order hyperbolic) *transport* equation governed by u which is called the continuity equation:

$$\rho_t + u \cdot \nabla \rho = 0.$$

Accordingly, it may happen that $\rho(\cdot, t)$ be a piecewise regular discontinuous function and the discontinuities of $\rho(\cdot, t)$ be transported by u . This is readily understood by rewriting the continuity equation in the form

$$\frac{d}{dt} \rho(X(x, t), t) = 0,$$

where $X(x, \cdot)$ is the *trajectory* determined by u and x , i.e.

$$\begin{cases} X_t(x, t) = u(X(x, t), t), & t \in (0, T), \\ X(x, 0) = x \end{cases} \quad (57)$$

(the components of X are also known as the Lagrangian coordinates; in fact, $X(x, t)$ is the position at time t of the particle located at x at time $t = 0$).

For simplicity, let us consider the following system for (3):

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0 & \text{in } Q, \\ \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 & \text{in } Q, \\ u = 0 & \text{on } \Sigma, \\ (\rho u)(x, 0) = m^0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho^0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (58)$$

where $\mu > 0$ is a constant and m^0 and ρ^0 are given. We will say that $\{\rho, u\}$ is (together with some p) a weak solution of (3) if

$$\begin{cases} \rho \in L^\infty(Q) \cap C^0([0, +\infty); L^q(\Omega)) \quad \forall q \in [1, +\infty), \\ u \in L^2(0, +\infty; V), \quad \rho|u|^2 \in L^\infty(0, +\infty; L^1(\Omega)) \end{cases} \quad (59)$$

the continuity equation $\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) = 0$ holds in Q in the distributional sense, $\rho|_{t=0} = \rho^0$ in the L^q sense for all $q \in [1, +\infty)$ and

$$\begin{cases} \iint_Q (\rho u \cdot \varphi_t + \rho u_i u_j \partial_i \varphi_j - \mu \partial_i u_j \partial_i \varphi_j) \, dx \, dt \\ + \int_\Omega m^0(x) \cdot \varphi(x, 0) \, dx = 0 \end{cases} \quad (60)$$

for any $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times [0, +\infty))^N$ satisfying $\nabla \cdot \varphi = 0$ in Q .

Then the following result holds:

Theorem 18 *Let us assume that $N = 2$ or $N = 3$, $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$, $\rho^0 \geq 0$ a.e. in Ω , $m^0 \in L^2(\Omega)^N$, $m^0 = 0$ a.e. when $\rho^0 = 0$ and $|m^0|^2/\rho^0 \in L^1(\Omega)$. Then (58) possesses at least one weak solution $\{\rho, u\}$.*

For the proof, see for instance [30] and [22]. In this last reference, the result is proved in a more general case and it is found that the solution satisfies appropriate energy inequalities. It is also proved there that the distribution function of $\rho(\cdot, t)$ is independent of t ; in other words, for any $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and any $t > 0$, one has

$$\text{meas} \{x \in \Omega : \alpha \leq \rho(x, t) \leq \beta\} = \text{meas} \{x \in \Omega : \alpha \leq \rho^0(x) \leq \beta\}$$

(in fact, this property can be viewed as a reformulation of the mass conservation law).

In general, the uniqueness of weak solution of (58) is unknown even when $N = 2$. The same can be said for regularity results.

However, if $N = 2$ and the initial data also satisfy

$$\rho^0 \geq a > 0 \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad \frac{1}{\rho^0} m^0 \in V,$$

the regularity of the solutions (and therefore uniqueness) can be obtained. More precisely, under these assumptions one has

$$u \in L^2(0, +\infty; H^2(\Omega)^2) \cap C^0([0, +\infty); V), \quad u_t \in L^2(0, +\infty; H).$$

5.3 Some quasi-Newtonian fluids

For a general incompressible fluid of constant density $\rho = 1$, the motion equation states that

$$u_t + (u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot \sigma + f, \quad (61)$$

where $\sigma = \sigma(x, t)$ is the *stress tensor*. This means that, for any regular open set $W \subset \Omega$, the resultant of the forces exerted on the particles in W by the other fluid particles at time t is given by

$$\mathcal{I}(W, t) = \int_{\partial W} \sigma(x, t) \cdot n(x) d\Gamma(x).$$

In the case of the Navier-Stokes equations, it is assumed that σ is furnished by the so called *Stokes law*. This means that the stress tensor σ is proportional to the *strain* or *deformation* tensor $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$. More precisely, we have

$$\sigma = 2\nu Du = \nu(\nabla u + \nabla u^t) \quad (62)$$

for some constant $\nu > 0$. Combining (62) and (61), we find at once the first equation in (1). The fluids satisfying this property are called *Newtonian*.

Sometimes, it is more accurate to assume a more general constitutive law for σ . Thus, instead of (62), we can assume that

$$\sigma = \nu(|Du|)(\nabla u + \nabla u^t), \quad (63)$$

where $\nu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ is a given function. This leads to the system (4). The fluids governed by (4) are called *quasi-Newtonian*.

In practical problems, many possible functions ν are found. Here, we will only consider the choice

$$\nu(s) = \alpha s^{r-2}, \quad (64)$$

where $r \geq 1$ and α is a positive constant. When $1 \leq r < 2$, $r = 2$ or $r > 2$, we are respectively considering a *visco-plastic*, *Newtonian* or *dilatant* fluid; in particular, in the limit $r = 1$, (63) must be understood as follows:

$$\sigma = \frac{2\alpha}{|Du|} Du \text{ if } Du \neq 0; \quad |\sigma| \leq 2\alpha \text{ if } Du = 0.$$

In this case, we are considering a visco-plastic *Bingham* fluid (see [4, 5, 9] and the references therein).

There are many real phenomena in chemistry, glaciology, biology, etc. where the previous constitutive laws are appropriate; see [25] and the references therein.

For simplicity, let us consider the following initial-boundary value problem:

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - 2\nabla \cdot (\nu(|Du|)Du) + \nabla p = 0, & \nabla \cdot u = 0 & \text{in } Q, \\ u = 0 & & \text{on } \Sigma, \\ u(x, 0) = u^0(x) & & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (65)$$

where u^0 is prescribed. Depending on the value of r , several different existence and/or uniqueness results can be established. In principle, as r increases, better results are found. Thus, for very small r , it can only be proved that a local regular solution exists for regular initial data; for moderate r , global in time

weak solutions exist. for larger r , the uniqueness of strong solution holds, etc. For a complete summary and a list of open questions, see [26].

In order to illustrate the situation, we will recall now one of these results.

We will assume that

$$\frac{3N}{N+2} < r < 2. \quad (66)$$

Let V_r be the adherence of \mathcal{V} in the Sobolev space $W_0^{1,r}(\Omega)^N$. Obviously, V_r is a separable reflexive Banach space for the norm

$$\|v\|_r = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^r dx \right)^{1/r} \quad \forall v \in V_r.$$

It will be said that u is (together with some p) a weak solution of (65) if $u \in L^r(0, +\infty; V_r) \cap L^\infty(0, +\infty; H)$ and

$$\begin{cases} \iint_Q (\rho u \cdot \varphi_t + \rho u_i u_j \partial_i \varphi_j) dx dt \\ -\frac{1}{2} \iint_Q \nu(|Du|)(\partial_i u_j + \partial_j u_i)(\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i) dx dt \\ + \int_{\Omega} u^0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0 \end{cases} \quad (67)$$

for any $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times [0, +\infty))^N$ satisfying $\nabla \cdot \varphi = 0$ in Q .

Theorem 19 *Assume that ν is given by (64) with r satisfying (66) and $u^0 \in H$. Then (65) possesses at least one weak solution.*

It may be also meaningful to consider quasi-Newtonian viscous incompressible fluids with variable density. Roughly speaking, they lead to problems that need an analysis inspired by the arguments used in the proofs of theorems 18 and 19. See for instance [2, 10] for further details.

5.4 Viscoelastic Oldroyd models

Sometimes, the molecular structure of the fluid under consideration is so complicated that the constitutive law (63) does not suffice to provide a good description of the flow.

In particular, this is the case if elastic efforts among particles are relevant. Then, it has to be assumed that the stress tensor σ is of the form

$$\sigma = \sigma_0 + \tau,$$

where σ_0 (the viscous-stress tensor) is given by Stokes law and τ (the elastic-stress tensor) satisfies an additional equation that is coupled to the conservation law (61) and serves to close the system.

The equation for τ can be a differential or an integral equation. Accordingly, it leads to a differential or to an integro-differential model. In differential

models, τ is determined by ∇u through a system of PDE's. It is assumed that this system must satisfy the *material objectivity* or *frame indifference* principle (in other words, the law must be invariant under time-dependent proper rotations $Q = Q(t)$). As a consequence, the resulting system must involve *objective time derivatives*. By this, we mean first order operators of the form

$$\partial_t + p_i(x, t)\partial_i$$

such that we always have

$$Q \cdot (\partial_t + p_i\partial_i)\tau \cdot {}^tQ = (\partial_t + p_i\partial_i) (Q \cdot \tau \cdot {}^tQ).$$

The usual material derivative $\partial_t + u_i\partial_i$ does not satisfy the principle of material objectivity. On the contrary, the so called Oldroyd derivatives

$$\frac{\mathcal{D}_a\tau}{\mathcal{D}t} = \tau_t + (u \cdot \nabla)\tau + g_a(\nabla u, \tau) \quad (68)$$

are objective derivatives. Here,

$$g_a(\nabla u, \tau) = \tau W(u) - W(u)\tau - a(D(u)\tau + \tau D(u)) \quad (69)$$

($a \in [-1, 1]$ is a constant). As before, $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ and $W(u)$ is the *vorticity* tensor, i.e.

$$W(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^t).$$

When $a = 0$, the corresponding derivative is known as the *Jaumann's* or *co-rotational* derivative. It is the following:

$$\frac{\mathcal{D}_0\tau}{\mathcal{D}t} = \tau_t + (u \cdot \nabla)\tau + \tau W(u) - W(u)\tau.$$

We will be concerned in this paragraph with the differential Oldroyd model. In dimensionless variables, this is (5), where $g_a(\nabla u, \tau)$ is given by (69). This provides a good description of the behaviour of some materials that have in part properties found for elastic solids and, also in part, properties similar to those of viscous fluids (this is why they are called viscoelastic). For a complete presentation and analysis, see for instance [15, 29].

Let us consider the problem

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = \nabla \cdot \tau, & \nabla \cdot u = 0 & \text{in } Q, \\ \tau_t + (u \cdot \nabla)\tau + c\tau + g_a(\nabla u, \tau) = bDu & & \text{in } Q, \\ u = 0 & & \text{on } \Sigma, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad \tau(x, 0) = \tau^0(x) & & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (70)$$

where u^0 and τ^0 are prescribed. For convenience, let us denote by L_s^2 the space of the symmetric tensors $\tau \in L^2(\Omega)^{N \times N}$. It will be said that $\{u, \tau\}$ is (together with some p) a weak solution of (70) if $u \in L^2(0, +\infty; V) \cap L^\infty(0, +\infty; H)$, $\tau \in L^\infty(0, +\infty; L_s^2)$,

$$\langle u_t, v \rangle_V + b(u, u, v) + \nu a(u, v) = \langle \nabla \cdot \tau, v \rangle \quad \forall v \in V, \quad (71)$$

$$\tau_t + (u \cdot \nabla)\tau + c\tau + g_a(\nabla u, \tau) = bDu \quad (72)$$

in the distributional sense, $u|_{t=0} = u^0$ and $\tau|_{t=0} = \tau^0$.

The system (70) is more difficult to analyze than (1) and (58). As the latter, it contains an equation of the Navier-Stokes kind coupled to a first-order hyperbolic equation for an additional variable. But now this additional variable and the associated first-order equation are nonscalar.

Furthermore, in general no a priori estimates are known for (70). In addition, even if we were able to find a family of approximated solutions $\{u^m, \tau^m\}$ a priori bounded in a *natural* energy space, it would be a difficult task to pass to the limit in the equations. Indeed, we may expect to get uniform bounds of ∇u^m and τ^m respectively in $L^2(Q)^N$ and $L^\infty(0, +\infty; L_s^2)$ but this is clearly insufficient, in view of the structure of $g_a(\nabla u^m, \tau^m)$.

To our knowledge, the unique global in time existence known result is the following:

Theorem 20 *Let us assume that $N = 2$ or $N = 3$, $u^0 \in H$, $\tau^0 \in L_s^2$ and $a = 0$, that is, the Oldroyd differential law for τ is*

$$\tau_t + (u \cdot \nabla)\tau + c\tau + \tau W(u) - W(u)\tau = bDu. \quad (73)$$

Then (70) possesses at least one global in time weak solution.

This has been proved by P.-L. Lions and N. Masmoudi in [24]. The argument they have used is very intricate and relies on the study of the behavior of the defect measure associated to a family of regular approximations. It would be interesting to know if the same result can be obtained adapting a compactness-Galerkin approach. When $N = 2$, it would also be interesting to know whether a simpler proof exists (notice that in the two-dimensional case to pass to the limit in $g_a(\nabla u^m, \tau^m)$ we just need strong convergence of the vorticity $\nabla \times u^m$).

In the general case, with $a \neq 0$, only local in time existence results can be established (at least if we do not impose additional geometric restrictions on the flow). Let us recall one of them, that has been taken from [11]:

Theorem 21 *Let us assume that $N = 3$, $3 < r < +\infty$, $u^0 \in W^{2,r}(\Omega)^N \cap V_r$, $\tau^0 \in L_s^2$ and $\tau_{ij}^0 \in W^{1,r}(\Omega)$ for all i, j . Then there exist $T^* \in (0, +\infty)$ and exactly one strong local solution $\{u, p, \tau\}$ of (70) in $[0, T^*]$ (p is unique up to a function depending only on t).*

This means that

$$\begin{aligned} u &\in L^s(0, T^*; W^{2,r}(\Omega)^N) \cap C^0([0, T^*]; V_r), & u_t &\in L^s(0, T^*; L^r(\Omega)^N), \\ p &\in L^s(0, T^*; W^{1,r}(\Omega)), \\ \tau &\in C^0([0, T^*]; W^{1,r}(\Omega)^{N \times N}), & \tau_t &\in L^s(0, T^*; L^r(\Omega)^{N \times N}) \end{aligned}$$

for all finite $s > 1$ and the equations in (70) are satisfied a.e. in $\Omega \times (0, T^)$.*

For more results concerning viscoelastic Oldroyd fluids and other related models, see [11] and the references therein. A very interesting approach to viscoelasticity is being developed recently with the introduction and analysis of the so called *micro-macro* models; see for instance [16, 17].

References

- [1] J. BEALE, T. KATO, A. MAJDA, *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Comm. Math. Phys. 94 (1984), no. 1, 61–66.
- [2] M. BÖHM, *On a nonhomogeneous Bingham fluid*, J. Differ. Equations 60, p. 259–284, 1985.
- [3] H. BREZIS, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid 1984.
- [4] D. CIORANESCU, *Sur une classe de fluides non-newtoniens*, Appl. Math. Optimiz. 3, p. 263–282, 1977.
- [5] D. CIORANESCU, *Quelques exemples de fluides newtoniens généralisés*, in “Mathematical topics in fluid mechanics”, Pitman Res. Notes Math. Ser., 274, 1992.
- [6] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN, *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer-Verlag, New-York 1979.
- [7] P. CONSTANTIN, C. FOIAS, *Navier-Stokes equations*, The University of Chicago Press, Chicago 1988.
- [8] R. DAUTRAY & J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques, tome 3*, Masson, Paris 1985.
- [9] G. DUVAUT, J.-L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [10] E. FERNANDEZ-CARA, F. GUILLEN, R.R. ORTEGA *Some theoretical results for visco-plastic and dilatant fluids with variable density*, Nonlinear Anal. T.M.A. 28, No. 6 (1997), p. 1079–1100.
- [11] E. FERNANDEZ-CARA, F. GUILLEN, R.R. ORTEGA, *Mathematical modeling and analysis of viscoelastic fluids of the Oldroyd kind*, Handbooks of Numerical Analysis, Part 2, Vol. VIII, p. 543–661, North-Holland, Amsterdam 2002.
- [12] S. FRIEDLANDER, N. PAVLOVIC, *Blowup in a three-dimensional vector model for the Euler equations*, Comm. Pure Appl. Math. 57 (2004), no. 6, 705–725.
- [13] J. HEYWOOD, *The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions*, Ind. U. Math. J., 29 (1980), 639–681.
- [14] J. HEYWOOD, *Open problems in the theory of the Navier-Stokes equations for viscous incompressible flow*, Lecture Notes in Math. No. 1431, pp. 1–22, Springer-Verlag, Berlin 1988.

- [15] D.D. JOSEPH, *Fluid dynamics of viscoelastic liquids*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 84, Springer-Verlag, New York 1990.
- [16] B. JOURDAIN, T. LELIEVRE, C. LE BRIS, *Existence of solution for a micro-macro model of polymeric fluid: the FENE model*, J. Funct. Anal. 4 209 (2004) 162–193.
- [17] B. JOURDAIN, T. LELIEVRE, C. LE BRIS, *Numerical analysis of micro-macro simulations of polymeric fluid flows: a simple case*, Mat. Models and Methods in Appl. Sci. 12, No. 9 (2002) 1205–1243.
- [18] R.M. KERR, *Evidence for a singularity of the three-dimensional, incompressible Euler equations*, Phys. Fluids A 5 (1993), no. 7, 1725–1746.
- [19] O.A. LADYZHENSKAJA, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York 1969.
- [20] J.-L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthiers-Villars, Paris 1969.
- [21] J.-L. LIONS, J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes, no. 19, Paris (1964), 5–68.
- [22] P.-L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. 1: Incompressible models*, Clarendon Press, Oxford 1996.
- [23] P.-L. LIONS, N. MASMOUDI, *Unicité des solutions faibles de Navier-Stokes dans $L^N(\Omega)$* , C.R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 491–496, 1998.
- [24] P.-L. LIONS, N. MASMOUDI, *Global solutions for some Oldroyd models of non-newtonian flows*, Chin. Ann. of Math. 21B:2 (2000), 131–146.
- [25] J. MALEK, K.R. RAJAGOPAL, M. RUZICKA, *Existence and regularity of solutions and stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity*, Math. Models and Methods in Appl. Sci. 5, No. 6, 789–812.
- [26] J. MALEK, J. NECAS, M. ROKYTA, M. RUZICKA, *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs*, Chapman & Hall, London 1996.
- [27] R.L. PANTON, *Incompressible Flow*, Wiley Interscience, New York 1984.
- [28] G. PRODI, *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes*, Annali di Mat. 48, 173–182 (1959).
- [29] M. RENARDY, W.J. HRUSA, J.A. NOHEL, *Mathematical problems in viscoelasticity*, Longman, London 1987.
- [30] J. SIMON, *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Annali Mat. Pura ed Appl. (IV), Vol. CXLVI, 1987, pp. 65–96.
- [31] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations*, 3rd Edition, North-Holland, Amsterdam 1984.

- [32] V.I. YUDOVITCH, *Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in dynamics of ideal incompressible fluid*, Math. Rev. Lett., 2 (1995), p. 27–38.
- [33] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications, Vol. IV*, Springer-Verlag, New York, 1988.

Blow-up. El problema matemático de explosión para ecuaciones y sistemas de reacción-difusión*

A. DE PABLO¹, R. FERREIRA¹, F. QUIRÓS² Y J.L. VÁZQUEZ²

¹Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

²Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

arturop@math.uc3m.es, raul.ferreira@uc3m.es,
fernando.quiros@uam.es, juanluis.vazquez@uam.es

Resumen

El presente artículo ofrece una panorámica de los fenómenos de explosión o *blow-up* para ecuaciones de reacción-difusión. Tras presentar el tema, enunciamos los principales problemas que la teoría propone: para qué ecuaciones y datos existe el *blow-up*; cuándo, dónde y cómo sucede; qué puede pasar después, tanto si hay catástrofe permanente como si no; cómo se calcula numéricamente y cuáles son las diferencias más notables entre ecuaciones y sistemas. Describimos después algunas de estas subáreas, guiados por los temas en que han participado los autores y sus colaboradores.

Palabras clave: *explosión, reacción-difusión, continuación, sistemas.*

Clasificación por materias AMS: *35K57, 35B33, 35K45, 65M12*

1 Introducción

Muchos procesos de las ciencias aplicadas se pueden modelar matemáticamente por medio de ecuaciones de evolución en que intervienen operadores diferenciales o, mejor aún, por sistemas de tales ecuaciones. Estas ecuaciones, llamadas genéricamente ecuaciones de estado, describen con mayor o menor precisión los fenómenos físicos a estudio. Si se les añaden oportunos datos complementarios, habitualmente en la forma de condiciones iniciales y de contorno, entonces lo normal y deseable es que se obtenga un problema bien planteado, que poseerá una solución bien definida en un adecuado contexto funcional. Nuestro propósito es examinar situaciones en que tal planteamiento falla al cabo de un rato de evolución.

* Financiado en parte por los Proyectos MCYT BMF2002-04572-C02-01 y 02.

Las teorías matemáticas clásicas hacen intervenir operadores lineales en las ecuaciones de estado. El desarrollo del Análisis Matemático para este tipo de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales, ha sido espectacular en los dos últimos siglos y ha permitido un correcto planteamiento de numerosos problemas de la Física Matemática con total rigor. Es sin embargo un hecho constatado que un gran número de los modelos más importantes de la ciencia implican ecuaciones diferenciales no lineales. Ello es particularmente claro en el caso de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas dinámicos, que ha sido no lineal en su planteamiento desde los tiempos de Newton. En el caso de las ecuaciones en derivadas parciales esto no fue siempre así, quizá por un problema de dificultad: comprender las ecuaciones lineales (del calor, del potencial, de ondas) ha representado ya una tarea enorme. Pero la realidad actual es incontestable: por poner dos ejemplos paradigmáticos, los modelos de la relatividad general y los modelos generales de la teoría de los fluidos, reactivos o no, implican ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales.

Aunque la artillería de las teorías lineales puede ser parcialmente utilizada (por ejemplo en los desarrollos perturbativos), los sistemas no lineales exhiben una serie de propiedades que son ajenas a las teorías lineales y que hacen que éstos sean más difíciles de analizar matemáticamente. Por otra parte, algunas de las propiedades originadas por el carácter no lineal de las ecuaciones están directamente relacionadas con características esenciales del fenómeno o fenómenos del mundo real que pretendemos describir; entonces la aproximación lineal pasa a ser sólo un primer paso del proceso que prepara en todo caso un análisis no lineal más realista. Dos de esos aspectos típicamente no lineales que han provocado no pocas cuestiones matemáticas son la descripción de los fenómenos que presentan fronteras libres y/o cambios de fase y la aparición de singularidades explosivas que estudiamos en este artículo. Ambos temas han sido objeto de estudio por nuestro equipo y colaboradores y deseamos transmitir parte de nuestra experiencia de estos años en el último campo, la aparición de singularidades explosivas.

Más en concreto, examinaremos la posibilidad de que las soluciones de ciertos problemas evolutivos presenten singularidades tras un cierto tiempo de evolución cuando los datos se toman en clases funcionales para las que se demuestra existencia, unicidad, dependencia continua y regularidad para pequeños intervalos de tiempo (que dependen de los datos). Se dice que un tal problema está *bien planteado localmente en el tiempo* pero no está bien planteado globalmente. No es cuestión de regularidad inicial, los datos pueden ser perfectamente lisos y sin embargo aparecer las singularidades. La forma más simple de singularidad espontánea en un problema no lineal es la originada cuando alguna de las variables que describen el sistema diverge a infinito tras un cierto tiempo de existencia clásica, es decir cuando t se acerca a un tiempo $T > 0$. Esto es lo que llamamos *explosión* o *blow-up*. Pero nótese que en no pocos problemas quienes explotan son las derivadas y no la función.

Señalemos que los problemas lineales no están exentos de singularidades, pero éstas están contenidas en los coeficientes o datos del problema

(singularidades fijas o propagadas), mientras que en los sistemas no lineales pueden surgir un poco a su aire, debidas a los mecanismos no lineales del problema; su localización en el espacio y tiempo es objeto de un análisis matemático como el que aquí describiremos (singularidades móviles).

El estudio de los procesos no lineales ha sido uno de los temas estrella en las Matemáticas del siglo XX y ha motivado la introducción de numerosos y novedosos métodos en las áreas del Análisis Matemático, las Ecuaciones Diferenciales, la Computación Científica y otras disciplinas, siendo uno de los campos de investigación más activos de las Matemáticas en los últimos decenios.

2 Un ejemplo elemental de explosión

Quizá el ejemplo más simple de explosión en tiempo finito, el más citado como ejemplo motivador, ocurre cuando nos planteamos la ecuación diferencial ordinaria (EDO) del *crecimiento cuadrático*: suponemos que la variable real $u = u(t)$ obedece a la ecuación

$$u_t = u^2, \quad t > 0. \quad (1)$$

Cuando el dato inicial $u(0) = a$ es positivo, existe una solución única en el intervalo temporal $0 < t < T$, donde $T = 1/a$, que es incluso explícita:

$$u(t) = \frac{1}{T - t}. \quad (2)$$

Por lo tanto, la evolución está expresada por una función lisa del tiempo si $t < T$. Cuando $t \rightarrow T^-$ vemos que $u(t) \rightarrow \infty$, es decir, la solución *explota*.

A partir de este ejemplo se generaliza el concepto de explosión como *el fenómeno en que las soluciones dejan de existir globalmente en el tiempo porque una o varias de las variables de estado que describen el proceso crecen infinitamente en un intervalo finito de tiempo*. Una primera extensión consiste en considerar las EDOs de la forma $u_t = u^p$ con $p > 1$ o, más en general, de la forma

$$u_t = f(u), \quad (3)$$

con f una función positiva y continua que cumple la *condición de Osgood* [93]

$$\int_1^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty. \quad (4)$$

Dejamos al lector que integre la ecuación separando variables y compruebe que esta condición es necesaria y suficiente para que exista blow-up en tiempo finito. Obtenemos la expresión $T = F(\infty) - F(a) < \infty$, donde F es una primitiva de $1/f$, y la explosión sucede para todo dato inicial $u(0) = a > 0$. Con ello hemos enunciado el primer teorema no trivial y representativo en la teoría de la explosión.

Podemos pensar en sistemas $u_t = f(t, u)$ con variable vectorial $u \in \mathbb{R}^n$. En ese caso podemos tener explosión debida al mismo mecanismo si f es

superlineal con respecto a u para $\|u\|$ grande, y también explosión debida al carácter singular de f con respecto a t en ciertos tiempos. Nos interesa aquí el primer caso. Hablando en general, el estudio de las EDOs proporciona claves, intuiciones y útiles básicos para la teoría de explosión de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) que abordaremos aquí y, también, para comprender la aparición de singularidades.

3 Explosión para EDPs

El estudio de la explosión es considerablemente más difícil (e interesante para el matemático) cuando se trabaja con ecuaciones en derivadas parciales, y de hecho tal estudio se ha convertido en un área muy activa con su arte y artesanía. Típicamente, en un problema de EDPs evolutivas se tiene una estructura espacio-temporal, $u = u(x, t)$, con $x \in \Omega$ un dominio de \mathbb{R}^n , mientras el tiempo transcurre en el intervalo $0 \leq t < T$. En estos casos más complejos no será en general posible tener fórmulas explícitas para describir el proceso de explosión, pero tendremos estimaciones que harán de sustitutos de forma suficiente pues nos proporcionarán información cualitativa y cuantitativa sobre los temas relevantes: para qué ecuaciones y datos hay explosiones, cuándo, dónde, cómo y con qué rapidez suceden, amén de qué pasa en el tiempo de explosión y después y cómo se calcula todo esto.

En las secciones que siguen examinaremos los principales problemas que se plantean en el marco de las ecuaciones de reacción-difusión, que es el área de actividad donde más esfuerzo se ha hecho para comprender la problemática del blow-up. Esta área del mundo de la explosión ha sido motivada por la dinámica de los procesos reactivos de la combustión, cf. [6, 14, 121]. El tema es de gran importancia en la ingeniería, pero es preciso decir que, como señalan las referencias anteriores, es un campo científico enorme y hay una gran distancia entre el análisis matemático de los modelos básicos y las aplicaciones reales; nosotros nos ocuparemos aquí sólo del primer aspecto.

Los problemas de explosión están hoy día de actualidad en el mundo matemático. Quizá los dos problemas de explosión más a la moda son los originados en la famosa Lista del Instituto Clay, que se puede consultar en <http://www.claymath.org>. Se trata de problemas abiertos, de ahí su encanto. Uno de ellos se refiere a los modelos matemáticos que describen la evolución de fluidos estándar (fluidos Newtonianos incompresibles) que son descritos por los sistemas de ecuaciones de Navier-Stokes (caso viscoso) y de Euler (caso no viscoso); por razones que no tenemos claras el premio es sólo para la resolución del primer modelo. El problema de Navier-Stokes y su relación con el blow-up están descritos por ejemplo en [114]. Una lectura muy recomendable sobre aparición de singularidades en éstos y otros problemas muy relacionados es el artículo de M. Fontelos publicado en este Boletín, [43]. El otro problema mencionado se refiere a la resolución de la Conjetura de Poincaré y más en general a la geometrización de 3-superficies según el programa de Thurston, mediante las ecuaciones del calor no lineales que conducen al flujo de Ricci.

Los trabajos de R. Hamilton sobre este flujo culminados por G. Perelman en 2002 pueden haber resuelto la Conjetura de Poincaré. Ver los surveys [1] en los Notices de la AMS y [91] en la Gaceta de la RSME.

El blow-up ha sido estudiado en años recientes para muy variadas ecuaciones y sistemas además de los citados. Se han descubierto diversos fenómenos que han sido más o menos analizados matemáticamente y el campo está en plena evolución, por lo que es muy atractivo para quienes inician su investigación o desean nuevos rumbos. El panorama resultante ofrece gran variedad y al tiempo importantes rasgos matemáticos comunes.

4 Las ecuaciones de reacción-difusión

Este tipo de ecuaciones se ha desarrollado en el pasado siglo para formar un área de investigación con interés para la Matemática, la Física y la Biología. En las teorías de propagación térmica y combustión es usual utilizar como ecuaciones de estado ecuaciones parabólicas de la forma

$$u_t = \nabla \cdot \mathcal{A}(u, \nabla u, x, t) + B(u, \nabla u, x, t), \quad (5)$$

con las condiciones de elipticidad estándar sobre el operador \mathcal{A} y condiciones de regularidad y crecimiento sobre \mathcal{A} y B ; ver por ejemplo el texto de Smoller [108] y las referencias a la combustión citadas en la sección anterior. Para fijar ideas, pensemos que (5) es un modelo de propagación del calor no lineal en un medio reactivo y que $u \geq 0$ es la temperatura.

Los modelos de reacción-difusión han jugado un papel predominante en el estudio del blow-up, cuyo concepto matemático pasamos a formular en su forma más simple.

(i) Comenzamos, como hemos mencionado antes, con un problema bien planteado para tiempos pequeños: suponemos suficiente regularidad en \mathcal{A} y B para tener existencia y unicidad para, por ejemplo, el problema de Cauchy, o un cierto problema de valores iniciales y de contorno, asociado a la ecuación (5), en un intervalo de tiempo $0 < t < t_0$.

(ii) Disponemos así mismo de una teoría de prolongabilidad de soluciones que permite asegurar que la solución se puede prolongar en el tiempo mientras se mantenga acotada. Para las soluciones clásicas de ecuaciones parabólicas esta teoría se suele basar en estimaciones de Schauder. Para soluciones débiles de problemas en forma de divergencia en espacios de Sobolev, o incluso para problemas *completamente no lineales*, hay que hacer uso de las estimaciones correspondientes.

La explosión, o blow-up, ocurre entonces si la solución se hace infinita en algún punto (o varios), cuando t se aproxima a cierto tiempo finito T , llamado *tiempo de explosión*, de manera que u está bien definida para $0 < t < T$, mientras que

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty. \quad (6)$$

La teoría matemática de explosión comenzó activamente en los años 60 con los trabajos de Kaplan [75], Fujita [47], [48], Friedman [44] y otros; no existe

todavía una teoría completa pero sí se han realizado estudios detallados de una serie de problemas de complejidad creciente, y se cuenta en la actualidad con una vasta literatura en este tema. Los dos modelos escalares clásicos son

$$u_t = \Delta u + \lambda e^u, \quad \lambda > 0 \quad (7)$$

y

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad p > 1. \quad (8)$$

El primero de ellos es el *modelo de reacción exponencial*, importante en teoría de la combustión [120] bajo el nombre de *modelo de combustible sólido* o *ecuación de Frank-Kamenetsky*, así como en geometría diferencial [76] y en otras aplicaciones. La explosión depende del parámetro $\lambda > 0$, el dato inicial y el dominio. El interés del segundo modelo radica en que es el ejemplo más simple en el que aparece la llamada *propiedad de Fujita*, que describiremos después: para ciertos valores del exponente p se puede tener que explotan todas las soluciones.

Otros modelos construidos a partir de operadores elípticos más generales se han hecho cada vez más populares en los últimos tiempos por la aparición de nuevos fenómenos asociados con la explosión, amén de por sus aplicaciones, por ejemplo en Mecánica de Fluidos. En particular mencionamos el operador de *medios porosos*

$$u_t = \Delta u^m + u^p, \quad m > 0, \quad (9)$$

y el operador *p-Laplaciano* (aquí *σ -Laplaciano*)

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla u|^\sigma \nabla u) + u^p, \quad \sigma > -1. \quad (10)$$

Todos estos modelos toman la forma $u_t = \mathbf{A}(u) + f(u)$, donde \mathbf{A} es un operador elíptico de segundo orden, posiblemente no lineal y degenerado y que representa la *difusión*, y $f(u)$ es una función superlineal de u que representa la *reacción*.

A la hora de mencionar algún texto que recoja los resultados conocidos sobre éstos y otros modelos de explosión, podemos empezar con los libros de Bebernes y Eberly [6] y de Samarskii et al. [107]. Sin embargo, éste es un campo muy activo en el que constantemente se producen nuevos avances. Para encontrar referencias más actualizadas se deben consultar los *surveys* de Levine et al. [83, 22], Bandle y Bruner [4], Galaktionov y Vázquez [62] y Fila [37].

5 Las preguntas básicas

En esta sección describiremos las principales cuestiones que surgen en el estudio de las ecuaciones de reacción-difusión. Una lista de tales cuestiones debería incluir las preguntas: ¿hay explosión?, ¿cuándo?, ¿dónde?, ¿cómo? Proponemos aquí una lista extendida de siete temas a tratar.

1. Existencia de explosión

- (a) ¿Hay explosión para algún dato?
- (b) ¿Para qué datos explotan las soluciones?

2. ¿Cuándo se produce la explosión?**3. ¿Cómo se produce la explosión?**

- (a) ¿Cuál es la velocidad de explosión?
- (b) ¿Cuál es la forma de la solución cerca de la explosión?

4. ¿Dónde se produce la explosión?**5. ¿Se puede continuar la solución después de la explosión?****6. En caso de sistemas, ¿hay simultaneidad?**

- (a) ¿Explotan todas las componentes, o sólo alguna?
- (b) ¿Es el conjunto de explosión el mismo para todas las componentes?

7. Cálculo numérico de la explosión

Esta relación se puede modificar y adaptar a otros problemas de aparición de singularidades. Naturalmente, el último tema ha aparecido sólo muy recientemente y es también un campo muy activo. Pasemos a describir brevemente lo que quiere decir cada cuestión. Nos centraremos siempre a lo largo de este artículo en soluciones no negativas, $u \geq 0$. Las respuestas pueden variar notablemente en el caso de soluciones con cambios de signo, ver por ejemplo [90, 41].

(1) La formulación del problema de explosión depende de la elección de una clase adecuada de soluciones, es decir, una vez que se ha elegido un marco funcional en el que “viven” las soluciones de nuestro problema, la explosión se puede interpretar como la imposibilidad de permanecer en dicho marco. De hecho, existen casos donde la explosión ocurre en un espacio funcional pero no en otro: así, la explosión en L^∞ no implica necesariamente la explosión en norma L^1 .

Fijado el marco funcional, la existencia de explosión depende en general de la forma de la ecuación (en términos de sus coeficientes o más generalmente de sus condiciones estructurales), del dato inicial, del espacio ambiente y de las condiciones de contorno.

En el caso en el que hay soluciones que explotan, tenemos dos posibilidades: todas las soluciones explotan o sólo lo hacen las soluciones pertenecientes a una determinada clase, que habría que identificar. El ejemplo clásico es el problema de Cauchy en \mathbb{R}^n para la ecuación semilineal del calor (8), donde toda solución

positiva explota si el exponente verifica $1 < p \leq 1 + 2/n$, mientras que si $p > 1 + 2/n$ existen tanto soluciones globales como soluciones que explotan. El número $p_c = 1 + 2/n$ se denomina *exponente de Fujita*, [47].

(2) En cuanto a la pregunta de cuándo explota la solución, se puede considerar el fenómeno de explosión en un sentido más general incluyendo la explosión en tiempo infinito. Tenemos así tres posibilidades:

- (a) explosión instantánea,
- (b) explosión en tiempo finito (*blow-up* estándar),
- (c) explosión en tiempo infinito (*grow-up*).

Centraremos nuestra atención en el *blow-up* estándar, aunque el interés sobre el fenómeno de *grow-up* aumenta día a día, cf. [52]. La explosión instantánea aparece menos en la literatura, sin embargo nos podemos encontrar con ella en un modelo tan sencillo como la ecuación (7), cf. [97, 113].

(3) Nos ocupamos ahora del comportamiento asintótico cerca del tiempo de explosión. Hay dos aspectos importantes:

- (a) la velocidad a la cual tiene lugar la explosión, la *tasa de explosión*. Esto es, estimar alguna norma de $u(\cdot, t)$ cuando $t \rightarrow T^-$. Por ejemplo, para la ecuación (8) se tiene que

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \sim (T - t)^{-1/(p-1)} \quad \text{para } t \rightarrow T^-;$$

- (b) la forma final de la solución, llamada *perfil de explosión*. En general, habrá que contentarse con dar la forma de la solución cerca del punto o puntos de explosión via un cambio de variables, [64]. Usualmente, dicha forma viene dada por una solución *autosemejante* del problema o de algún problema relacionado.

(4) Para saber dónde se produce la explosión, definimos el siguiente conjunto:

$$B(u) = \{x \in \Omega : \exists x_k \rightarrow x, t_k \rightarrow T^-, u(x_k, t_k) \rightarrow \infty\}. \quad (11)$$

Dependiendo del conjunto de explosión diremos que tenemos:

- (a) explosión puntual, si la solución explota en un número finito de puntos (o más en general en un conjunto de medida n -dimensional cero);
- (b) explosión regional, si la solución explota en un subconjunto propio de medida positiva;
- (c) explosión global, si la solución explota para todo punto de Ω : $B(u) = \Omega$.

Los dos primeros casos reciben en [107] el nombre de localización efectiva.

(5) Una cuestión que ha suscitado gran interés en los últimos años es: ¿qué ocurre después de la explosión?, [5, 62]. Lo primero será definir un concepto

razonable de solución después de la explosión. Esto se hace típicamente mediante aproximación por problemas cuyas soluciones no explotan. Pasando al límite recuperamos la solución para $t < T$, mientras que para $t > T$ obtenemos una de las tres posibilidades:

- (a) la solución es infinita en todo punto: explosión completa;
- (b) la solución es acotada en una región pero infinita en la complementaria: explosión incompleta;
- (c) la solución es acotada en todo punto para $t > T$, explosión transitoria (o evitable).

(6) Hablemos ahora de sistemas a los que se aplican las ideas anteriores. Si la solución de un sistema explota, a priori no hay ninguna razón por la que todas las componentes deban ir a infinito en el tiempo de explosión, [100]. Pudiera suceder que algunas componentes permanezcan acotadas. Para que esto sea posible el acoplamiento entre las distintas componentes tiene que ser “débil”, de manera que las componentes que explotan no arrastren a las otras hacia el blow-up.

Por otra parte, en ocasiones el acoplamiento no es lo suficientemente débil como para permitir la explosión no simultánea, pero sí para permitir que los conjuntos de explosión de las distintas componentes sean distintos.

Dado un sistema concreto, ¿cómo de débil tiene que ser el acoplamiento para que se pueda dar una u otra de las situaciones que acabamos de describir?

(7) La última cuestión se refiere a la implementación de métodos numéricos que detecten el fenómeno de explosión y que reproduzcan las propiedades anteriores. Las dificultades del análisis se deben, fundamentalmente, a que los teoremas de convergencia usuales no incluyen casos singulares como los que aparecen en los problemas de explosión, por lo que se hace necesario recurrir a otras técnicas, como principios de comparación discretos, estimaciones funcionales, desarrollos asintóticos cuidadosos de las soluciones numéricas, etc., que generan un campo de actividad útil y en cierta medida autónomo. Una buena referencia en este tema es el trabajo de Groisman y Rossi publicado en este Boletín, [67].

6 Problemas modelo: algunas técnicas

En esta sección describiremos con más detalle algunas de las cuestiones planteadas en la sección anterior y comentaremos algunas de las principales técnicas usadas para responderlas. Para ello nos serviremos de la ecuación modelo (8) y de su generalización (9). Para fijar ideas, dada la gran variedad de problemas que se tratan en la literatura, nos centraremos en el correspondiente problema de Cauchy asociado:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + u^p, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (12)$$

con $m, p > 0$ y $n \geq 1$. La ventaja que tiene utilizar este modelo como presentación en lugar de ceñirnos al caso semilineal $m = 1$ es que las respuestas a las preguntas básicas ofrecen una más amplia casuística en el caso $m > 0$ general. No obstante, para evitar fenómenos de extinción producidos por la difusión muy rápida consideraremos $m > m_c = (n - 2)_+/n$.

En cuanto al dato inicial, supondremos que es regular, no negativo y de soporte compacto.

6.1 Exponentes críticos de explosión

El fenómeno de explosión en problemas de reacción-difusión fue estudiado por primera vez por Kaplan en 1963 para la ecuación semilineal del calor (8) en su trabajo [75]. El argumento de Kaplan, que posteriormente ha sido adaptado a numerosas situaciones, consiste en multiplicar la ecuación por una función adecuada e integrar, obteniendo una inecuación diferencial que nos garantice la explosión. Se pasa así de una EDP a una EDO a la que se aplica la condición de Osgood (4) o similar. En su versión original, el problema se considera en un dominio acotado y la función elegida es la primera autofunción del operador $-\Delta$ normalizada. En \mathbb{R}^n se toma $\varphi(x) = (k\pi)^{-n/2} e^{-k|x|^2}$, que verifica $\Delta\varphi + 2kn\varphi \geq 0$. Así, definiendo $J(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t)\varphi(x) dx$, integrando por partes y aplicando la desigualdad de Jensen, llegamos a

$$J'(t) \geq -2knJ(t) + J^p(t).$$

Entonces, para cada $p > 1$, si $J(0)$ es suficientemente grande, mayor que la primera raíz de la ecuación

$$F(z) \equiv -2knz + z^p = 0,$$

es decir, si u_0 es suficientemente grande, se deduce inmediatamente que $J(t)$ debe explotar en tiempo finito y por tanto u explota en tiempo finito. Más aún, si miramos con cuidado la condición sobre el tamaño que debe tener u_0 , obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-k|x|^2} u_0(x) dx \geq Ck^\gamma \quad \gamma = \frac{1}{p-1} - \frac{n}{2},$$

donde C es independiente de p y de n . Vemos que esta condición se cumple para todo dato inicial no trivial con alguna $k > 0$ si y sólo si $\gamma > 0$. Este es el segundo resultado fundamental en la teoría, demostrado por Fujita en 1966: todas las soluciones explotan si $1 < p < p_c \equiv 1 + 2/n$, [47].

En el caso $p = p_c$ se tiene también el mismo resultado, que fue demostrado en la década siguiente, [68, 78]; una prueba más elegante de ambos resultados se encuentra en [119].

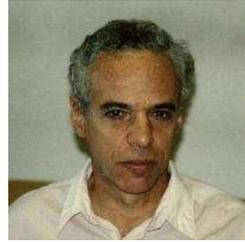


Figura 1: S. Kaplan

Si se intenta aplicar esta idea al problema (12), obtenemos la misma conclusión pero sólo para $\max\{m, 1\} < p < p_c \equiv m + 2/n$. Este resultado no es óptimo si $m > 1$. En este caso, necesitamos otra herramienta para llevar el extremo inferior del intervalo hasta $p = 1$.

Esta herramienta es clásica en las ecuaciones parabólicas y consiste en la comparación con **sub y supersoluciones** más o menos explícitas. Esta técnica podrá entonces ser aplicada a aquellos problemas para los que se pueda establecer un principio de comparación, y la dificultad residirá en la construcción de las funciones especiales, que servirán como barreras.

Aprovechando la homogeneidad de la ecuación en (12), es natural buscar sub y supersoluciones en forma autosemejante. Con subsoluciones de la forma

$$\underline{u}(x, t) = (t_0 - t)^{-\alpha} \psi(x(t_0 - t)^{-\beta}), \tag{13}$$

se puede demostrar explosión en tiempo $T < t_0$, mientras que con supersoluciones de la forma

$$\bar{u}(x, t) = t^{-\alpha} \psi(xt^{-\beta}) \tag{14}$$

se obtendrían soluciones globales, que incluso decaen a cero. Los exponentes de semejanza se obtienen de la propia ecuación: $\alpha = 1/(p - 1)$, $\beta = (p - m)\alpha/2$. Existen subsoluciones del primer tipo para todo $p > 1$; y existen supersoluciones del segundo tipo sólo si $p > p_c$. De este modo, queda determinado en qué condiciones hay explosión en tiempo finito. La mejor referencia para buscar estas funciones autosemejantes es [107].



Figura 2: H. Fujita

El número p_c , el exponente de Fujita (recordamos que todas las soluciones explotan si $1 < p \leq p_c$), se puede entender de diversas maneras. En [22] se propone un método simple de obtención del exponente crítico, y después se aplica a numerosos problemas, ver también [57]. Consiste en igualar las tasas de decrecimiento del término de difusión con la tasa de explosión del término de reacción: en cada rango de exponentes se impondrá un término u otro. Si $p > 1$, la solución explota si llega a alcanzar masa suficiente, cosa que ocurre con todas las soluciones si $1 < p \leq p_c$. Si $p > p_c$, la difusión impide que los datos pequeños crezcan lo suficiente, y de hecho tienden a cero. En el problema (12) el decrecimiento

producido por la difusión viene dado por la solución de Barenblatt

$$B(x, t; M) = t^{-a_D} \left(C(M) - \frac{a_D(m - 1)}{2mn} |x|^2 t^{-2a_D/n} \right)_+^{1/(m-1)}, \tag{15}$$

con $a_D = n/(2 + n(m - 1)) > 0$ (recordemos $m > m_c$); la tasa de explosión se obtiene resolviendo $u_t = u^p$, que da $a_R = 1/(p - 1)$. Así pues el exponente de Fujita, para el que $a_D = a_R$, marca el equilibrio entre los dos términos.

Como ejemplo mencionamos que en la ecuación σ -Laplaciana (10) se tiene $a_D = n/(\sigma + 2 + \sigma n)$ y por tanto $p_c = \sigma + 1 + (\sigma + 2)/n$, ver [49].

Otra técnica empleada en ocasiones para caracterizar las soluciones que explotan es el **método de concavidad**, introducido por Levine en [81] y [84]. Si consideramos la siguiente *energía*

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^m(x, t)|^2 dx - \frac{m}{p+m} \int_{\mathbb{R}^n} u^{p+m}(x, t) dx,$$

se tiene fácilmente que $E_u(t)$ es decreciente cuando u es una solución de (12). En [81] se demuestra que una condición suficiente de explosión en tiempo finito para el caso $p > m$ es que la energía sea negativa en algún momento, y de hecho en ese caso tenderá a $-\infty$. Para ello, se define una función auxiliar en una bola suficientemente grande

$$H(t) = \int_0^t \int_{|x| \leq R} u^{m+1}(x, s) dx ds + c_1(T - t) + c_2(t + c_3)^2$$

(donde las c_i dependen de u_0) y se prueba que si por ejemplo $E_u(0) < 0$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $H^{-\varepsilon}$ es no negativa, decreciente y cóncava. De aquí se obtiene que existe un $t_0 > 0$ en que $H^{-\varepsilon}$ se anula, de modo que $H(t_0) = \infty$, lo que a su vez implica que u explota en un tiempo $T \leq t_0$. Por otro lado, se puede comprobar que la solución de Barenblatt (15), convenientemente rescalada, tiene energía negativa si $m < p < p_c$. A partir de aquí, y utilizando el principio de comparación, se obtiene de nuevo el resultado de Fujita. Pero el interés principal del método radica en que para $p > p_c$ nos da un criterio de explosión en términos de la energía del dato inicial. En dominios acotados la anterior es una condición necesaria y suficiente de explosión en tiempo finito.

6.2 Tasas

Para el cálculo de las tasas de explosión presentamos aquí dos técnicas, basadas una en cambios de escala y la otra en comparación de intersecciones. Para simplificar consideraremos soluciones radialmente decrecientes.

El método de **cambios de escala** se debe a Giga y Kohn [64] para el caso $m = 1$. Describiremos aquí cómo funciona para m general, aunque necesitaremos que la solución sea creciente en tiempo, lo que se cumple si el dato inicial verifica $\Delta u_0^m + u_0^p \geq 0$. Resultados con datos iniciales más generales restringen el rango de parámetros para los que es válida la tasa.

A partir de una solución u que explota en el tiempo T , definimos la función rescalada

$$\varphi_\lambda(x, t) = \frac{1}{\lambda} u(\lambda^{(m-p)/2} x, \lambda^{1/(1-p)} t + s), \quad x \in \mathbb{R}, t \in (-s\lambda^{1/(p-1)}, 0),$$

donde $0 < s < T$ está fijado y $\lambda = u(0, s) = \max_{x \in \mathbb{R}} u(x, s)$. Observemos que φ_λ es de nuevo una solución de la ecuación (9). La estrategia consiste en demostrar que se verifica

$$0 < C_1 \leq \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial t}(0, 0) \leq C_2, \quad (16)$$

que traducido según el valor de λ implica $u^{-p}(0, t)u_t(0, t) \sim C$. Finalmente, integrando entre t y T se tiene

$$u(0, t) \sim C(T - t)^{-1/(p-1)}. \quad (17)$$

La demostración de la estimación superior en (16) se sigue de la teoría de regularidad de Di Benedetto [8]. Para la estimación inferior se procede por paso al límite a demostrar que, si $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_{\lambda_j}}{\partial t}(0, 0) = 0$, entonces $\Phi(x, t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{\lambda_j}(x, t)$ es una solución estacionaria no trivial de la misma ecuación de medios porosos, es decir $\Delta \Phi^m + \Phi^p = 0$ en \mathbb{R}^n . Esto contradice el resultado de [63] donde se demuestra que este problema no tiene solución si $p < p_s = m(n - 2)_+ / (n + 2)$, y se tiene la estimación inferior deseada en ese rango de exponentes.

En caso de que u_t no sea positiva, una restricción del tipo $p < p_s$ es necesaria en vista del resultado de [70], que muestra un ejemplo de explosión llamada superrápida, también llamada de tipo II, en el caso supercrítico para $n > 10$ cuando $p > p_*$, un exponente mayor que p_s . Ver también [87] y [88].

La segunda técnica que expondremos aquí, llamada de **comparación de intersecciones**, aunque válida sólo en dimensión uno en espacio, ha sido ampliamente utilizada en problemas de difusión, ver [107]. Se basa en el hecho de que, por un lado, el número de cambios de signo (cortes) entre dos soluciones no puede aumentar con el tiempo y, por otro, en que el principio de comparación impide que dos soluciones que exploten en el mismo tiempo estén ordenadas. En nuestro ejemplo queremos comparar nuestra solución con una solución autosemejante

$$U(x, t) = (T - t)^{-\alpha} G(x(T - t)^{-\beta}) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{1}{p-1}, \quad \beta = \frac{p-m}{2} \alpha, \quad (18)$$

donde el perfil G es solución de la ecuación

$$(G^m)''(\xi) - \beta \xi G'(\xi) - \alpha G(\xi) + G^p(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Utilizando un método de disparo a partir de $\xi = 0$ siempre podemos encontrar un perfil de subsolución de manera que $U(\cdot, 0)$ corta exactamente dos veces a nuestro dato inicial y su soporte está contenido en el soporte de u_0 . La teoría de intersecciones, junto con el principio de comparación, nos dice ahora que el número de cortes es siempre dos, lo que implica que

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq U(0, t) = C(T - t)^{-\alpha}.$$

Por otro lado, repitiendo el mismo argumento con la solución plana

$$W(x, t) = c_*(T - t)^{-\alpha}, \quad c_* = \alpha^\alpha,$$

obtenemos la estimación inferior, de lo que concluimos (17).

6.3 Comportamiento asintótico

Una vez que se conoce la tasa de explosión, para estudiar el comportamiento asintótico (cuando $t \rightarrow T$) debemos normalizar la solución de acuerdo a esta tasa, para obtener así una función acotada y cuyo máximo esté también acotado inferiormente por una constante positiva. Por otro lado, ya hemos comentado las ventajas que puede ofrecer la homogeneidad de la ecuación. Así pues, para nuestro problema (12) definimos la función

$$g(\xi, \tau) = (T - t)^\alpha u(x, t), \quad \text{con} \quad \xi = (T - t)^{-\beta} x, \quad \tau = \log(1 - t/T), \quad (20)$$

donde α y β son como antes. Este cambio de variables fue introducido para el caso $m = 1$ en [64], ver también [116, 69]. El cambio de la variable temporal permite traducir el estudio del comportamiento para t cercano a T de la solución en el estudio para $\tau \rightarrow \infty$ de la función g que verifica la ecuación

$$g_\tau = (g^m)_{\xi\xi} - \beta\xi g_\xi + g^p - \alpha g.$$

Mediante técnicas basadas en funcionales de Lyapunov se demuestra que g se estabiliza hacia una solución estacionaria (los perfiles autosemejantes introducidos antes). Estos funcionales no son siempre fáciles de construir, ver [51, 122].

En los casos en que la solución estacionaria es única, se obtiene que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g(\xi, \tau) = G(\xi) \quad (21)$$

uniformemente sobre compactos. Obsérvese que la solución estacionaria a la que se converge es universal, no depende del dato con el que empezamos.

En los casos en los que no hay unicidad, o no se conoce, tendremos que conformarnos con dar el resultado de estabilidad en términos del llamado conjunto ω -límite

$$\omega(g_0) = \left\{ G \in C(\mathbb{R}) : G \geq 0, \exists \tau_j \rightarrow \infty \text{ tal que} \right. \\ \left. \lim_{\tau_j \rightarrow \infty} g(\cdot, \tau_j) = G \text{ uniformemente sobre compactos de } \mathbb{R} \right\}.$$

Se tiene que $\omega(g_0)$ está contenido en el conjunto de soluciones de (19).

En nuestro caso la unicidad de perfil autosemejante se conoce sólo si $1 < p \leq m$, y así (21) implica

$$\lim_{t \rightarrow T^-} (T - t)^\alpha |u(x, t) - G(x)| = 0$$

en conjuntos de la forma $\{|x| \leq C(T - t)^\beta\}$. La unicidad del perfil autosemejante para $p > m$ es un problema abierto de gran dificultad.

6.4 Conjuntos de explosión

La descripción del conjunto de explosión para las soluciones del problema (12) es en general un problema difícil de tratar incluso en el caso $m = 1$, sobre

todo en varias variables, [115]. Sin embargo, para casos particulares se tienen resultados sencillos. Por ejemplo, siguiendo con $m = 1$, si el dato inicial es radial con un único máximo en el origen, entonces el conjunto de explosión se reduce a este punto, $B(u) = \{x = 0\}$. De hecho se tiene una estimación del tipo $u(x, t) \leq c|x|^{-2/(p-1)}$, [46]. Más en general, si u_0 tiene un número finito de máximos, el conjunto de explosión consiste en un número no mayor de puntos, cf. [18].

Consideremos ahora el caso $m \neq 1$ y fijémonos de nuevo en un dato inicial radialmente decreciente. Aquí se tienen las tres posibilidades:

$$\begin{aligned} 1 < p < m &\Rightarrow B(u) = \mathbb{R}^n, && \text{explosión global,} \\ p = m &\Rightarrow B(u) = \{|x| \leq R_0\}, && \text{explosión regional,} \\ p > m &\Rightarrow B(u) = \{x = 0\}, && \text{explosión puntual.} \end{aligned}$$

El caso de explosión puntual se demuestra mediante una estimación similar al caso de la difusión lineal, ver [51]. En el caso en que $1 < p < m$ la convergencia al perfil autosimilar nos da la explosión global. Sin embargo, si $p = m$ esta convergencia no es suficiente y necesitamos estimar la velocidad a la cual se converge a cero fuera del soporte del perfil autosimilar, ver [19].

Si $m > 1$, es bien conocido que el problema (12) tiene velocidad finita de propagación, [92]. Esto quiere decir, por ejemplo en dimensión $n = 1$, que si u_0 tiene soporte acotado, por ejemplo por la derecha, entonces la solución $u(\cdot, t)$ también tiene soporte acotado por la derecha, y aparece una interfase (derecha), $s(t) = \sup\{x \in \mathbb{R} : u(x, t) > 0\}$. Pues bien, si $p \geq m$ esta interfase está acotada uniformemente para todo $0 < t < T$, lo que se denomina *localización*, pero si $0 < p < m$, la interfase explota con la solución, y de hecho se tiene $s(t) \sim (T - t)^\beta$, que se demuestra utilizando la teoría de intersecciones mencionada antes, véase [107].

7 Continuación después de la explosión

La continuación tras el tiempo de explosión de las soluciones que experimentan una explosión en un determinado tiempo es un tema de gran interés aplicado. Se trata de saber si existe una forma natural de realizar tal extensión y, si la respuesta es positiva, qué aspecto y propiedades tiene.

7.1 Concepto de continuación. Soluciones propias

El primer paso en este estudio es el examen de las opciones de continuación que sean más razonables físicamente cuando la mera continuación clásica ha fallado. Baras y Cohen [5] atacaron esta cuestión en 1987 para las ecuaciones del calor semilineales de la forma

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

La propuesta de continuación es la de sustituir el término reactivo $f(u)$ por un término regularizado $f_k(u)$, en que f_k es una función lisa con crecimiento

a lo más lineal para $u \gg 1$; se pide además convergencia monótona $f_k \nearrow f$. Ello implica que existe la solución u_k del problema de Cauchy aproximado y está definida globalmente en el tiempo; como el principio del máximo se aplica, la sucesión $\{u_k\}$ es monótona creciente en k , y podemos pasar al límite por monotonía,

$$\tilde{u}(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t). \quad (22)$$

La función \tilde{u} extiende la solución clásica u más allá del tiempo de explosión, sea con valores finitos o infinitos. Si se obtiene que

$$\tilde{u}(x, t) = \infty \quad \text{para todo } x \in \Omega, t > T, \quad (23)$$

entonces se dice que la *explosión es completa*, en otras palabras, la continuación es trivial, y ya no hay nada más que hacer. Ésta fue la situación encontrada en [5] para $f(u) = u^p$ con p en el *rango de parámetros subcrítico de Sobolev*: $1 < p < p_s = (n+2)/(n-2)$, si $n \geq 3$ (ó $1 < p < \infty$ si $n = 1, 2$). El caso $p > p_s$ quedó abierto en ese momento.

Brezis planteó el problema de encontrar ecuaciones de reacción-difusión para las que existiera continuación no trivial, es decir *explosión incompleta*. Este problema fue estudiado por Galaktionov y Vázquez en tres artículos [59], [60] y [61]. Los resultados muestran que la continuación es un fenómeno simple de caracterizar para ecuaciones de reacción-difusión en dimensión uno y mucho más complejo en varias dimensiones de espacio. Desde entonces se han realizado grandes progresos en esta dirección.

Este método de aproximación “desde abajo”, que permite también tratar datos iniciales no acotados aproximándolos de modo creciente por datos acotados, produce al final un objeto que puede ser finito or infinito; tales objetos se llaman “soluciones límite”. En [60] se prueba la unicidad del límite así construido. Se trata de una continuación en el sentido de que coincide con la solución habitual (clásica o débil) antes de la explosión; en casos de no unicidad del problema original, coincide con la llamada solución *minimal*. Le hemos dado el nombre de **solución propia** para distinguirla del resultado obtenido mediante otras posibles aproximaciones, no desde abajo. Se trata de una especie de *solución de viscosidad* pero ese aspecto no ha sido estudiado en detalle.

7.2 Caracterización de la explosión completa en 1D

En lo que sigue la continuación se discutirá en términos de soluciones propias, y prescindiremos de la tilde, $\tilde{u} = u$.

Resumimos los resultados de [59]. Se consideran las soluciones no negativas de las ecuaciones de la forma

$$u_t = \phi(u)_{xx} + f(u), \quad (24)$$

bajo hipótesis generales sobre las funciones constitutivas (no negativas) ϕ y f y el dato inicial (que de acuerdo con la costumbre establecida suponemos que tiene forma de campana).

Obtenemos una caracterización de la posibilidad de continuación no trivial en términos de las propiedades asintóticas de las funciones ϕ y f . Se trata de hecho de tres condiciones integrales. Recordamos para empezar que una condición necesaria (que no suficiente), es la condición de Osgood

$$(B1) \quad \int^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty.$$

Una condición suficiente de explosión debe involucrar también a la función ϕ . El problema de explosión completa depende de dos integrales más. Una es

$$(B2) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \int^u f(s)\phi'(s) ds < \infty,$$

que mide la potencia conjunta de la difusión y la reacción. La tercera condición

$$(B3) \quad \int^{\infty} \frac{\phi'(s)}{s} ds < \infty,$$

afecta sólo a la capacidad difusiva para u grande. Esta condición es equivalente a la propiedad de velocidad finita de propagación para grandes valores de u .

Los resultados que se obtienen en [59] son:

- Si se cumplen estas tres condiciones integrales (B1)–(B3), se tiene continuación global, esto es la *zona quemada*, donde u se hace infinita tras la explosión, es un conjunto acotado (explosión incompleta) ó bien el conjunto vacío (explosión transitoria).
- Si (B2) falla tenemos explosión completa, es decir $u \equiv \infty$ para todo $t > T$.

Veamos estos resultados para nuestro problema modelo (12). Se tiene (B1) si $p > 1$, (B2) si $m + p \leq 2$ y (B3) si $m < 1$. Así, (B1)–(B3) se cumplen si $m \leq 2 - p < 1$, un régimen de la llamada *difusión rápida*. En particular (B3) excluye la difusión lineal habitual, razón probable de que este llamativo fenómeno de continuación no trivial pasara desapercibido. Para la evolución de la zona “quemada” en casos concretos en que aparecen interfases explosivas ver [61].

Las pruebas están basadas en el *método de las ondas viajeras*, que sustituye en este análisis al método más usual de los estados estacionarios, ver [107]. Se procede primero a una clasificación completa de las posibles ondas viajeras y luego se usan para mostrar continuación o explosión completa. El último caso se prueba mediante la técnica de barrido.

Es interesante señalar que exactamente las mismas técnicas permiten tratar el problema de *extinción en tiempo finito* para ecuaciones de la forma

$$u_t = \phi(u)_{xx} - f(u), \quad (25)$$

planteado por Levine [82], lo que fue hecho también en [59]. En este problema u toca el nivel cero en tiempo finito y quien explota es u_t y no u , lo que se denomina *quenching*.

7.3 Explosión transitoria en varias dimensiones

En contraste con los resultados que acabamos de describir, la situación en varias dimensiones es mucho más compleja. Se han encontrado nuevas formas de explosión descritas por un tipo de soluciones a las que se ha dado el nombre de soluciones *peaking*: explotan sólo en un punto y en un instante de tiempo, después del cual tienen una continuación clásica. Representan una forma transitoria de explosión.

Consideramos el problema (12) con $n \geq 3$ (y $m > (n - 2)/n$). Mientras que para $1 < p \leq p_s = m(n + 2)/(n - 2)$ la alternativa entre explosión completa e incompleta nos recuerda al caso unidimensional, la novedad de las soluciones *peaking* aparece en el rango supercrítico, $p > p_s$. Más precisamente, existen soluciones propias de peaking en el intervalo de parámetros $p \in (p_s, p_p)$, donde $p_p = \infty$ para $n \leq 10$, mientras en dimensiones $n \geq 11$, y denotando $N = n - 10 > 0$, se tiene

$$p_p = 1 + \frac{3m + [(m - 1)^2 N^2 + 2(m - 1)(5m - 4)N + 9m^2]^{1/2}}{N}. \quad (1)$$

Este nuevo (e impresionante) exponente fue introducido por primera vez en [80] para $m = 1$, donde toma la forma un poco más simple $p_p = 1 + 6/N$.

La solución *peaking* se construye de forma autosemejante, tanto para $t < T$ como para $t > T$. Esto quiere decir que

$$u(x, t) = \begin{cases} (T - t)^{-\alpha} \theta_1(|x|(T - t)^{-\beta}), & t < T, \\ (t - T)^{-\alpha} \theta_2(|x|(t - T)^{-\beta}), & t > T, \end{cases} \quad (2)$$

con $\alpha = 1/(p - 1)$ y $\beta = (p - m)/2(p - 1)$ como antes. Los perfiles θ_1 y θ_2 satisfacen la condición de conexión

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \theta_1(s) s^{2/(p-m)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \theta_2(s) s^{2/(p-m)} > 0, \quad (3)$$

lo que les permite ser partes de una misma solución global.

Estas soluciones *peaking* presentan la forma más débil de explosión. De hecho, es fácil comprobar a posteriori que $u \in C([0, \infty) : L_{\text{loc}}^r(\mathbb{R}^n))$ para todo $1 < r < n(p - m)/2$, un número que para $p > p_s$ es mayor que $2mn/(n - 2)$. También son *soluciones débiles* de la ecuación en el sentido estándar de la integración por partes.

Como precedente a los resultados anteriores mencionamos el trabajo de Lacey y Tzanetis [79] para la ecuación exponencial (7), aunque allí la conexión entre ambos desarrollos es formal. Nótese también que los patrones de explosión incompleta son estructuralmente *inestables*. La construcción de soluciones *peaking* bajo condiciones que no permitan la autosemejanza no es fácil. Hay resultados recientes debidos a Fila y Matano [39]. La existencia de una solución con *peaking* sucesivo en varios tiempos (y siendo acotada para el resto de tiempos) es un problema bastante difícil que ha resuelto recientemente Mizoguchi [89].

7.4 Formación de avalanchas

Intentemos comprender mejor cómo se produce la explosión completa como el límite de un proceso de formación de avalanchas.

Consideramos el problema (12) con $m = 1$ y $p > 1$. Como ya se ha dicho, la solución límite explota completamente: después de explotar en $t = T$, la continuación es idénticamente infinita para todo $t > T$. Por consiguiente, en $t = T$ tiene lugar una fuerte discontinuidad de la solución propia en forma de un salto desde el perfil finito que se forma en $t = T^-$ hasta los valores infinitos que se toman en $t = T^+$. Esto es lo que se conoce como la *avalancha*, que fue estudiada por J. Rossi y dos de los autores en [105].

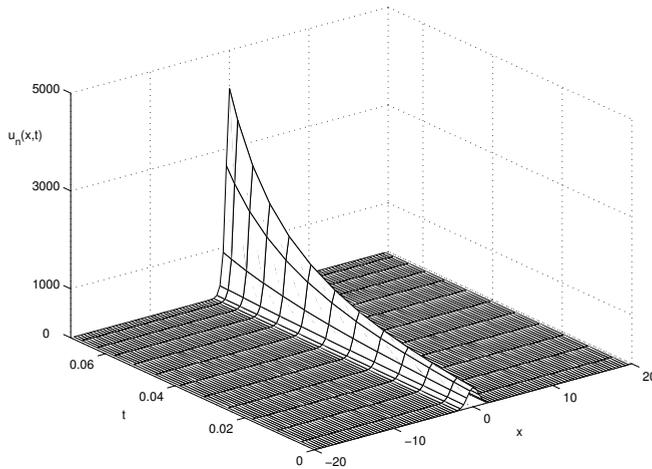


Figura 3: Comienzo de la explosión

Para visualizarla miramos lo que sucede con las aproximaciones u_k en las que está basada la construcción de la solución propia. De hecho, las aproximaciones tienen gran interés en sí mismas, pues describen la situación combustiva mejor que el problema original en el sentido siguiente: en los sistemas de ecuaciones termo-difusivos, los fenómenos de crecimiento de la temperatura se deben a reacciones exotérmicas que suceden en un rango de temperaturas, pasado el cual el término reactivo pierde fuerza por falta de combustible; bajo ciertos supuestos que estudia la literatura el sistema de ecuaciones se reduce a una ecuación con término reactivo del tipo $f_k(u)$ con f_k una función acotada.

Veamos el comportamiento de las aproximaciones u_k : para $t > T$, las soluciones de los problemas aproximados se acercan a una determinada forma asintótica cerca del lugar y el instante en que tiene lugar la explosión de u . Realizamos una renormalización adecuada que amplía el tiempo y el espacio cerca del primer punto de blow-up con una tasa que depende del parámetro de aproximación k . Las soluciones renormalizadas v_k tienden a una estructura, la

capa interna, que es la solución de un problema límite que se puede escribir de forma sencilla en términos de una EDO.

La acumulación interna produce en la región externa una onda viajera cuya velocidad podemos calcular y es del orden de $k^{(p-1)/2}$, lo que confirma cuantitativamente el hecho de que en el límite la solución propia se propaga instantáneamente en tiempo $t = T$ para cubrir todo el espacio. El cálculo de la velocidad de la onda viajera en los problemas aproximados es importante en las aplicaciones, pues representa la velocidad de propagación de las llamas reales.

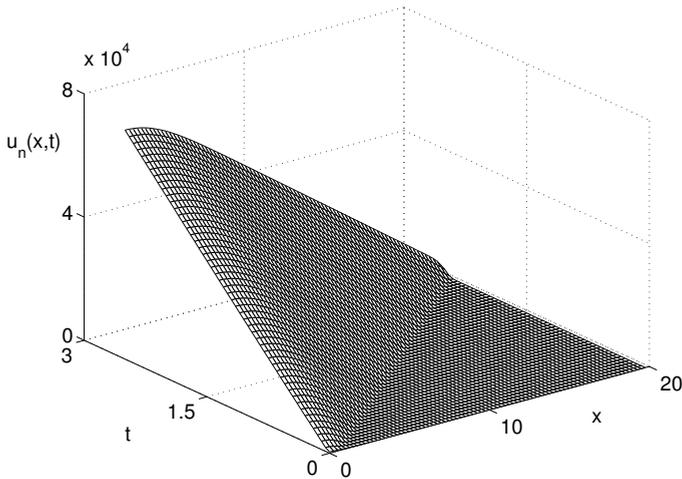


Figura 4: Avalancha térmica con onda viajera

En las figuras 3 y 4 mostramos dos estadios del fenómeno de avalancha térmica. En la primera gráfica se aprecia cómo, al acercarse al tiempo de explosión, se forma una singularidad explosiva que está confinada en el origen. En la segunda, en la que sólo representamos el semieje positivo de las x para apreciar mejor el crecimiento de la solución en el máximo, se ve la propagación del fenómeno explosivo por medio de una onda viajera.

En una tercera etapa del modelo aproximado (“truncado”) la onda expansiva, que va a gran velocidad, llega a los bordes del dominio, si los hay, donde las condiciones de contorno dictan la absorción o reflexión, y la consiguiente evolución tras el período anterior, que podríamos llamar *período de ignición*. Detalles analíticos y numéricos de todos estos procesos se pueden consultar en [105].

La avalancha está relacionada con la aparición de ondas viajeras que transportan información de la explosión desde el núcleo. Hay muchos aspectos de esta conexión que todavía no se comprenden bien. Los autores se han inspirado en el trabajo de Bebernes et al. [7]. Por otra parte, la formación y propiedades de las ondas viajeras es un tema principal en la teoría matemática de la combustión, como por ejemplo el estudio de ondas de deflagración planas en [14]. Hay muchas

variantes interesantes de estos problemas.

En [104] se analiza la formación de avalanchas cuando la reacción tiene lugar en la frontera y no en el interior.

8 Condiciones de frontera no lineales

La explosión no siempre se produce por una reacción en el interior del dominio, sino que también puede aparecer por el efecto de las condiciones de contorno, ver [38]. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema en la semirrecta:

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & x > 0, t \in (0, T), \\ -(u^m)_x(0, t) = u^q(0, t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \end{cases} \quad (4)$$

con $u_0 \geq 0$.

Muchas de las técnicas antes mencionadas para la ecuación de reacción-difusión (9) se pueden aplicar a este problema. En [56, 31] se prueba que existen soluciones que explotan en tiempo finito si y sólo si $q > (m+1)/2$. Por otro lado, al tratarse de un dominio no acotado, nos encontramos de nuevo con el fenómeno de Fujita: toda solución explota en tiempo finito si $(m+1)/2 < q \leq q_c \equiv m+1$, mientras que si $q > q_c$ existen soluciones que decaen a cero. El comportamiento cerca del tiempo de explosión viene dado por una solución autosemejante. La tasa de explosión es $\alpha = 1/(2q - m - 1)$. La explosión es puntual si $q > m$, regional si $q = m$ y global si $q < m$, ver [42, 31].

También podríamos considerar el problema (4) en un intervalo $[0, L]$, imponiendo condiciones de contorno para $x = 0$ y $x = L$. Por ejemplo, en [42] se considera que la frontera $x = L$ está aislada, $(u^m)_x(L, t) = 0$; en [36] se impone una absorción, $(u^m)_x(L, t) = -u^r(L, t)$. En este último caso cabe destacar dos propiedades interesantes: (i) la tasa de explosión no es continua con respecto a los parámetros del problema; (ii) existe un fenómeno del tipo Fujita, a pesar de tratarse de un dominio acotado.

En el caso en que el dominio es un semiespacio $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, sólo se conocen resultados para difusión lineal ($m = 1$), donde se prueba que el exponente de existencia global es $p_0 = 1$ y el exponente de Fujita es $p_c = 1 + 1/n$, ver [21].

Por otro lado, es interesante comparar los efectos de este flujo sobre la frontera con la reacción en el interior que hemos visto en las secciones anteriores. En [94] se estudia el problema

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^p, & x > 0, t \in (0, T), \\ -(u^m)_x(0, t) = u^q(0, t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Aquí, los exponentes críticos se convierten en *curvas críticas* en el plano p - q . La región de existencia global es $A_g = \{0 < p \leq 1, 0 < q \leq (m+1)/2\}$; la región en la que todas las soluciones explotan es $A_e = \{p > 1, q \leq m+1\} \cup \{p \leq m+2, 2q > m+1\}$; finalmente, en la región $A_{ge} = \{p > m+2, q > m+1\}$

coexisten los dos comportamientos. Conviene remarcar que si $1 < p \leq m + 2$ la reacción sola es capaz de producir la explosión de todas las soluciones, y que lo mismo ocurre con el flujo frontera si $(m + 1)/2 < q \leq m + 1$. En las dos regiones restantes de A_e es necesario el efecto combinado de los dos términos para producir la explosión: uno hace crecer la solución hasta un nivel en el que el otro término lo hace explotar.

En cuanto al comportamiento asintótico, se produce un efecto de simplificación a un problema u otro, (12) ó (4), dependiendo de los parámetros (y este fenómeno se produce a todos los niveles: tasas, conjuntos de explosión y perfiles asintóticos), salvo en la recta crítica $m + p = 2q$, donde los dos términos influyen en la evolución y la solución se comporta como una solución autosemejante del problema completo.

9 Sistemas

9.1 Condiciones de explosión. Curva de Fujita

Para fijar ideas consideramos el sistema modelo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + v^p, & v_t = \Delta v + u^q, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (6)$$

que fue estudiado por Escobedo y Herrero en [24]. Aquí nos encontramos de nuevo con curvas críticas. Por ejemplo, el problema tiene soluciones que explotan si y sólo si $pq > 1$. Por otra parte, cuando

$$pq > 1 \quad \text{y} \quad \gamma := \frac{\max\{p, q\} + 1}{pq - 1} \geq \frac{n}{2},$$

todas las soluciones no triviales explotan en tiempo finito, mientras que si $\gamma < n/2$ hay tanto soluciones que explotan en tiempo finito como soluciones globales. Por consiguiente, la curva $\gamma = n/2$ es la *curva de Fujita* para este problema.

Por lo demás, este sistema no presenta grandes novedades en relación con el correspondiente problema escalar. Si se consideran datos iniciales acampanados, ambas componentes explotan en un único punto, el origen. Por otra parte, el problema admite soluciones autosemejantes, homogéneas en espacio, que dan la tasa de explosión de cualquier otra solución, [2], y el comportamiento cerca del punto de explosión en los casos subcríticos.

Existen resultados similares para el mismo problema en dominios acotados, ver [54, 55, 16, 25, 45], así como para sistemas de ecuaciones del calor acopladas a través de su frontera mediante flujos no lineales, tanto en la semirecta como en dominios acotados; véase [20, 21, 118, 117, 102].

En el caso de difusiones no lineales, determinar las curvas de Fujita es un problema difícil que sólo ha sido resuelto en casos particulares, ver [107, 99].

9.2 Explosión no simultánea

Es evidente que, si una de las componentes de (6) permanece acotada, la otra también lo está. Por consiguiente, ambas componentes explotan cuando nos acercamos al tiempo de explosión. Esto no sucede para todos los sistemas. Consideremos por ejemplo el nuevo sistema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{p_{11}} v^{p_{12}}, & v_t = \Delta v + u^{p_{21}} v^{p_{22}}, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (7)$$

con los $p_{ij} \geq 0$. Este sistema tiene soluciones que explotan en tiempo finito si y sólo si los exponentes p_{ij} verifican alguna de las condiciones

$$p_{11} > 1, \quad p_{22} > 1 \quad \text{o} \quad (p_{11} - 1)(p_{22} - 1) - p_{12}p_{21} < 0, \quad (8)$$

véase [26]. En ese mismo artículo se da la condición de Fujita para el problema.

La novedad es que, si $p_{11} > p_{21} + 1$, entonces hay datos iniciales para los cuales una de las componentes del sistema permanece acotada mientras que la otra explota, fenómeno que se conoce como *explosión no simultánea*, véase [100]. Dado que $p_{21} \geq 0$, para tener explosión no simultánea necesitamos en particular que $p_{11} > 1$, de manera que u pueda explotar por sí misma, sin la ayuda de v . La condición $p_{11} > p_{21} + 1$ nos dice que p_{21} (que mide la influencia de u en la ecuación de v) es pequeña comparada con p_{11} (que mide la capacidad de u para explotar por sí misma); por consiguiente, cuando u explota, no tiene por qué arrastrar a v consigo.

Las cosas se ponen aún más interesantes si consideramos difusiones no lineales,

$$\begin{cases} u_t = (u^{m_1})_{xx} + u^{p_{11}} v^{p_{12}}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ v_t = (v^{m_2})_{xx} + u^{p_{21}} v^{p_{22}}, \end{cases} \quad (9)$$

con $p_{ij} \geq 0$, $m_i > 0$. Las soluciones de este problema explotan si y sólo si los exponentes p_{ij} satisfacen alguna de las condiciones (8).

La posibilidad de tener explosión no simultánea para este problema se menciona por primera vez en [107], aunque los autores se restringen a las soluciones planas. El sistema de EDOs asociado posee soluciones tales que u explota mientras que v permanece acotada si y sólo si $p_{11} > p_{21} + 1$. Sin embargo, en este caso la difusión no desempeña ningún papel. Surge una pregunta natural: ¿hay, fuera de este rango, soluciones no planas tales que u explota mientras que v permanece acotada? Como hemos visto antes, en el caso de difusión lineal la respuesta es que no.

En [12] se demuestra que la condición $p_{11} > p_{21} + 1$ sigue siendo la correcta cuando la componente que explota, u , está en el caso de difusión lenta, $m_1 > 1$.

La principal novedad se da cuando el exponente en la difusión de la componente que explota es menor que uno, $0 < m_1 < 1$. En este caso, si $p_{11} > \max\{1, p_{21} + (m_1 + 1)/2\}$ y $p_{12} = 0$, existen datos iniciales tales que u explota mientras que v permanece acotada. Hay por tanto explosión no simultánea en un rango de parámetros para el cual este fenómeno no es posible en el caso de las soluciones planas. Se conjetura que este resultado es cierto sin la

hipótesis extra $p_{12} = 0$. De hecho se tiene el recíproco: si $0 < m_1 < 1$ y u explota mientras que v permanece acotada, entonces $p_{11} > \max\{1, p_{21} + (m_1 + 1)/2\}$.

El análisis de la posibilidad de explosión no simultánea se ha llevado a cabo también para problemas en que la reacción se produce sobre la frontera, tanto para el caso de un dominio acotado [13], como en la semirecta [101]. Asimismo, se han considerado otros términos de reacción en el interior [110, 106], así como fenómenos de no simultaneidad para problemas con singularidades de tipo quenching, ver [95, 33].

En los casos en los que la explosión es no simultánea, en general es posible determinar la tasa de explosión y el conjunto de explosión, que coincidirán con los del problema escalar que se obtiene al sustituir v por una constante en la ecuación para la u . Sin embargo, cuando la explosión es simultánea, la situación se vuelve más difícil, y las tasas y conjuntos sólo se conocen para algunos rangos de parámetros.

9.3 Conjuntos de explosión distintos

Como ya se mencionó, las dos componentes del sistema (6) tienen el mismo conjunto de explosión, el origen. ¿Se pueden conseguir conjuntos de explosión distintos en el caso de difusión no lineal? El problema está abierto. Sin embargo, se conoce la respuesta para el problema similar con reacción sobre la frontera,

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & v_t = (v^r)_{xx}, & x > 0, \quad 0 < t < T, \\ -(u^m)_x(0, t) = v^p(0, t), & -(v^r)_x(0, t) = u^q(0, t), & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & v(x, 0) = v_0(x), & x > 0, \end{cases} \quad (10)$$

donde $m, r > 1, p, q > 0$, estudiado en [102]. La curva de existencia global para este problema es $pq = \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{r+1}{2}\right)$. Por encima de la curva de existencia global el sistema admite soluciones autosemejantes de la forma

$$U(x, t) = (T - t)^{-\alpha_1} f\left(\frac{x}{(T - t)^{\beta_1}}\right), \quad V(x, t) = (T - t)^{-\alpha_2} g\left(\frac{x}{(T - t)^{\beta_2}}\right),$$

donde los exponentes se obtienen de la homogeneidad del problema. Se prueba también que la tasa de explosión de cualquier solución que explote es la de semejanza.

Estas tasas, combinadas con los resultados conocidos para el problema con condición de Dirichlet $u(0, t) = (T - t)^{-\alpha}$, ver [65], dan inmediatamente los conjuntos de explosión para el problema, que quedan determinados por los signos de β_1 y β_2 . En particular, si $\beta_1 > 0$, u explota puntualmente, teniéndose explosión regional cuando $\beta_1 = 0$ y explosión global para $\beta_1 < 0$. El signo de β_2 determina de forma análoga el conjunto de explosión de v . Nótese que los conjuntos de explosión para u y v son distintos si los signos de β_1 y β_2 también lo son.

Recordemos que en el caso de difusión lineal las dos componentes del sistema tienen el mismo conjunto de explosión, el origen. Así pues, surge una pregunta: ¿esta diferencia en los conjuntos de explosión está provocada por la difusión no

lineal (y distinta) de las dos ecuaciones? En [103] se demuestra que no es éste el caso. Si se tienen dos ecuaciones del calor en la semirecta, acopladas sobre la frontera mediante condiciones no lineales de la forma

$$-u_x(0, t) = f(v(0, t)), \quad -v_x(0, t) = g(u(0, t)), \quad t \in (0, T),$$

con datos iniciales dados, es posible escoger las funciones f y g de forma que los conjuntos de explosión de u y v sean, respectivamente, cualquier par de intervalos $[0, a]$, $[0, b]$. También es posible fijar el tiempo de explosión $T > 0$.

10 Numérico

Daremos a continuación un breve repaso a algunos de los métodos numéricos más conocidos para problemas de explosión. El objetivo de dichos métodos es intentar reproducir las propiedades cualitativas de la solución del problema que estamos aproximando. Por tanto, un estudio detallado de dichas propiedades en la aproximación numérica es necesario para poder predecir si un proceso de evolución desarrolla singularidades en los casos en que un estudio analítico es impracticable. En [4, 67], existe una larga lista de referencias sobre métodos numéricos para problemas con explosión.

Un primer intento consiste en utilizar los llamados métodos de líneas. La idea de estos métodos es discretizar sólo la variable espacial, sustituyendo el estudio de una EDP por el de un sistema de EDOs. Ilustremos esto con un ejemplo, considerando el problema

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^p, & (x, t) \in (-L, L) \times (0, T), \\ u(-L, t) = u(L, t) = 1, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (-L, L), \end{cases}$$

con un buen dato inicial: regular, par y decreciente para $x \in (0, L)$.

Para discretizar la variable espacial utilizaremos elementos finitos con *mass lumping* sobre una malla fija, obteniendo el sistema de EDOs

$$MU'(t) = -AU^m(t) + MU^p(t), \quad (11)$$

donde A es la matriz de rigidez y M es la matriz de masa (en la que se ha utilizado *mass lumping*). Las operaciones entre vectores se entienden componente a componente.

En [28] se demuestra que la solución numérica reproduce “aceptablemente” las propiedades de la solución. Tenemos convergencia de segundo orden del método en $L^\infty([-L, L] \times (0, T - \tau))$, convergencia de los tiempos de explosión y que tanto la solución numérica como la solución exacta explotan con la misma tasa. En cuanto a los conjuntos de explosión tenemos que el método reproduce bien la explosión global, mientras que en el caso de explosión puntual en el problema numérico aparece un fenómeno de propagación del *blow-up* a los $K = K(m, p)$ nodos adyacentes a $x_0 = 0$ (ver figura 5); ahora bien, al no depender K de h obtenemos que $B(U) \subset B(u) + (-\varepsilon, \varepsilon)$ para todo $h < h_\varepsilon$.

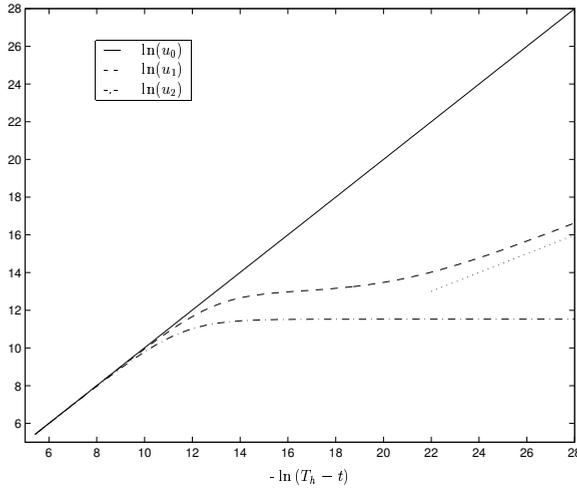


Figura 5: Tasas de explosión para $m = 1,5$, $p = 2$ ($K = 2$). Se observa que u_2 no explota.

Finalmente, en el caso de explosión regional continua, la solución numérica explota en todos los nodos, y lo hace con la misma tasa, es decir, en cada nodo se verifica

$$u_k(t) \sim w_k(h, t)(T_h - t)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Sin embargo, se puede recuperar la explosión regional ya que $w_k(h, t)$ es uniformemente acotada y verifica $\lim_{h \rightarrow 0} w_k(h, t) = 0$ para todos los nodos que no están en $B(u)$, ver figura 6.

Otros métodos de discretización en espacio son los llamados *moving mesh methods*, los cuales adaptan la malla espacial aprovechando la invariancia bajo cambios de escala de la solución, ver [72, 15]. El inconveniente de estos métodos es que no se conocen demostraciones de su convergencia y de su comportamiento asintótico.

Otra opción es discretizar también la variable temporal. Obtenemos de este modo los métodos totalmente discretos. En [66] se propone una discretización temporal para el sistema (11) con difusión lineal. En primer lugar, se analiza un método de Euler explícito (esto da lugar a tener que adaptar la malla temporal) y a continuación un método implícito (que permite eliminar las restricciones en el paso temporal). En ambos casos se prueban resultados análogos a los anteriormente expuestos.

Cuando se intenta aplicar estas técnicas a problemas con flujo en la frontera, nos encontramos con que los métodos de líneas con malla espacial fija en algunos casos no reproducen correctamente la tasa de explosión, ver [29]. Este inconveniente se resuelve en [27], donde se utiliza un método de refinamiento consistente en mover los puntos de la malla bajo un determinado criterio. En [11]

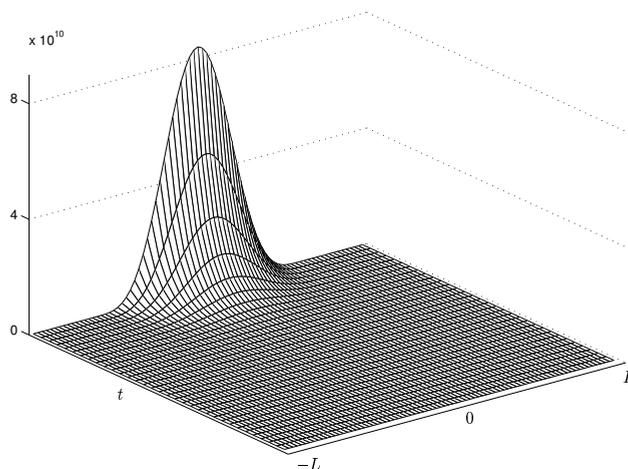


Figura 6: Evolución de la solución con $p = m = 2$

se aplica un método totalmente discreto. En todos estos trabajos se demuestra la convergencia de los métodos propuestos y se da una respuesta detallada a las preguntas básicas.

Finalmente observamos que no siempre es posible escribir el método de líneas como un sistema de EDOs del tipo (11). Por ejemplo, en [30] se estudia el problema de Dirichlet para la ecuación σ -Laplaciana (10). Si se aplican elementos finitos con mass-lumping, se obtiene el sistema

$$MU' = D_+ |D_- U|^\sigma D_- U + MU^p,$$

donde D_+ y D_- son las matrices de rigidez. En este caso se obtiene también que la solución numérica aproxima “aceptablemente” a la solución continua.

11 Otros problemas

Terminamos esta exposición sobre problemas de explosión mostrando otros problemas relacionados de alguna manera con los anteriores en los que también se desarrollan singularidades en tiempo finito. No pretende ser una lista exhaustiva, pues una tarea así resultaría imposible debido a la gran cantidad de trabajos que se han producido en los últimos 30 años dedicados a entender las propiedades de blow-up en ecuaciones tan dispares como las ecuaciones no lineales de ondas, Navier-Stokes o Hamilton-Jacobi, leyes de conservación, ecuaciones de Schrödinger o de Prandtl, por citar sólo algunas. Sólo dentro de las ecuaciones parabólicas no lineales nos encontramos con un amplio panorama donde centrar nuestra atención.

- Por ejemplo, los resultados que hemos descrito para la ecuación (9) tienen su equivalente en la ecuación (10), e incluso para la ecuación doblemente no lineal

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla u|^\sigma \nabla u^m) + u^p.$$

La dificultad en las demostraciones se encuentra ahora en que la degeneración del operador se produce también donde el gradiente de la solución se anula, véase [49, 50].

- Se puede considerar otro tipo de reacciones: reacción localizada

$$u_t = \Delta u^m + u^p(x_0, t)$$

o una reacción no local

$$u_t = \Delta u^m + \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(y) u^q(y, t) dy \right)^{p/q} u^r,$$

donde $K \in L^1$, $p > 0$, $q > 1$, $m > 1$, $r \geq 1$, ver [57, 109]. Por ejemplo, para este último problema el exponente de Fujita es $p_c = m + r + (m - 1)/q + 2/n$. Si el término de reacción es no autónomo,

$$u_t = \Delta u^m + a(x, t)u^p,$$

los exponentes de existencia global y de Fujita varían dependiendo del comportamiento de $a(x, t)$ para $|x|$ grande, [98]. El caso $a(x, t) = a(x)$ de soporte compacto se puede considerar (en dimensión $n = 1$) como un problema intermedio entre los problemas (12) y (4), [35].

- Otro tipo de problema, o más bien, otro enfoque de los problemas de explosión puede consistir en buscar reacciones que produzcan algún fenómeno particular. Por ejemplo, en el caso de la ecuación semilineal del calor,

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

determinar f para que la solución tenga blow-up regional, a pesar de la velocidad infinita de propagación. En [53, 58] se demuestra que ése es el caso si $f(u) = u \ln^2 u$. En [17], se generaliza este fenómeno para la ecuación de orden superior

$$u_t = -(-\Delta)^\nu u + f(u), \quad \nu > 1,$$

con $f(u) = u |\ln |u||^{2\nu}$. En el caso en que $f(u) = |u|^p$, el exponente de Fujita para este problema es $p_c = 1 + 2\nu/n$, ver [23].

- En la misma línea del punto anterior, en [40] se evalúa la influencia de datos de contorno “fríos” sobre la aparición de explosiones, obteniéndose el siguiente resultado bien sorprendente: existen funciones monótonas crecientes $f > 0$ tales que las soluciones de la ecuación semilineal del calor anterior tienen explosión en tiempo finito para todo dato inicial positivo y acotado si planteamos el problema en todo el espacio, pero por el contrario son todas ellas acotadas globalmente si el problema se plantea en un dominio acotado con datos de Dirichlet cero en el borde.

- En su artículo [85] aparecido en esta revista, López-Gómez considera las soluciones de ecuaciones elípticas superlineales del tipo $A(u) := \Delta u + \lambda u - a(x)u^p = 0$ en un dominio Ω , con $p > 1$, $a > 0$, y con valores $u = \infty$ en el borde del dominio, $\partial\Omega$ (llamadas “soluciones grandes” en la literatura) y las extiende por $u = \infty$ fuera de Ω . Demuestra la utilidad de estas funciones extendidas, que llama “metasoluciones”, al obtenerlas como límite para $t \rightarrow \infty$ del problema parabólico correspondiente, $u_t = Au$, planteado en todo el espacio (o en un dominio mayor) tras extender la función a por cero fuera de Ω . Se trata pues de fenómenos de blow-up incompleto en tiempo infinito (grow-up incompleto).
- En [86] se estudia la continuación no trivial tras la explosión para problemas con coeficiente de reacción con cambio de signo. Se demuestra que, bajo condiciones oportunas, no existe explosión completa en las zonas absorbentes.
- Merece la pena mencionar también algunas ecuaciones *completamente no lineales*. Así, para la ecuación con el operador dual del operador de medios porosos,

$$u_t = |u_{xx}|^{m-1}u_{xx} + u^p,$$

se caracteriza en [57] el exponente de Fujita en términos del exponente de decaimiento producido por la difusión, (recordemos el argumento introducido en 6.1), $p_c = 1 + 1/\mu$, donde μ es obtenido en [9].

- El último ejemplo parabólico que comentamos es el que aparece cuando sustituimos el operador Laplaciano o de medios porosos por un operador no en forma de divergencia:

$$u_t = u^s \Delta u + u^p.$$

Claramente, si $s < 1$ podemos convertir esta ecuación en (9) mediante el cambio de variable $v = u^{1-s}$. No ocurre lo mismo si $s > 1$, donde el cambio propuesto da lugar a un problema con difusión y absorción singulares, y al fenómeno de quenching. Este caso ha sido estudiado también por numerosos autores, ver por ejemplo [96]. Destacamos aquí [10], donde se considera en una dimensión el caso $s \geq 2, p = s + 1$, obteniéndose explosión superrápida. El mismo resultado se obtiene para el problema

$$\begin{cases} u_t = u^s u_{xx}, & x > 0, t \in (0, T), \\ -u_x(0, t) = u^q(0, t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \end{cases}$$

con $s \geq 2, q = 1$, ver [32]. Finalmente, si $s = 1$ las ecuaciones anteriores están escritas genuinamente en forma de no divergencia, ver [112, 34].

- Hemos mencionado muy de pasada los problemas de quenching donde u va a cero y quien explota es u_t . Otros ejemplos de explosión de las derivadas (y no de la función) se dan en procesos difusivos con términos no lineales de primer orden, como

$$u_t = u_{xx} + |u_x|^p.$$

Si la ecuación está planteada para $0 < x < 1$ con datos de contorno $u(0, t) = 0, u(1, t) = 1$, se demuestra que u_x puede explotar en $x = 0$, cf. [3, 111].

- Dentro del marco de los sistemas de tipo parabólico, quizá uno de los más populares es el de la *quimiotaxis*. Se trata del siguiente:

$$u_t = \Delta u - \chi \nabla(u \nabla v), \quad v_t = \gamma \Delta v - \mu v + \beta u,$$

propuesto por Keller y Segel [77], ver los estudios de explosión de [73] y [71].

- Fuera de las ecuaciones parabólicas, quizá el primer intento de extender el resultado de Fujita a otro tipo de problemas fue el trabajo de F. John [74], en el que considera la ecuación de ondas semilineal

$$u_{tt} = \Delta u + |u|^p$$

en dimensión $n = 3$ y demuestra que el exponente de Fujita viene dado por $p_c = 1 + \sqrt{2}$. El exponente de existencia global es $p = 1$. Para otras referencias sobre resultados y problemas abiertos en otras dimensiones se puede consultar [83].

- - -

Esperamos que estas reflexiones y resultados sirvan al lector para hacerse una primera idea de la variedad de los problemas matemáticos ligados a la existencia de explosiones y de su interés, dificultad y consecuencias. Es de señalar que, siendo el tema tan amplio y estando el texto enfocado hacia nuestros propios intereses, la panorámica es necesariamente parcial y ganará con el complemento de otras visiones.

Referencias

- [1] M. ANDERSON. *Geometrization of 3 - manifolds via the Ricci Flow*, Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004), 184–193.
- [2] D. ANDREUCCI, M. A. HERRERO Y J. J. L. VELÁZQUEZ. *Liouville theorems and blow-up behaviour in a semilinear reaction diffusion systems*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), 1–53.
- [3] J. ARRIETA, A. RODRÍGUEZ-BERNAL, PH. SOUPLET. *Boundedness of global solutions for nonlinear parabolic equations involving gradient blow-up phenomena*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **3** (2004), 1–15.
- [4] C. BANDLE Y H. BRUNER. *Blow-up in diffusion equations: A survey*, J. Comput. Appl. Math. **97** (1998), 3–22.
- [5] P. BARAS Y L. COHEN. *Complete blow-up after T_{max} for the solution of a semilinear heat equation*, J. Funct. Anal. **71** (1987), 142–174.
- [6] J. BEBERNES Y D. EBERLY. “Mathematical Problems from Combustion Theory”, Appl. Math. Sci. **83**, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [7] J. BEBERNES, C.M. LI Y Y. LI. *Travelling fronts in cylinders and their stability*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), 123–150.
- [8] E. DIBENEDETTO. *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 83–118.

- [9] F. BERNIS, J. HULSHOF Y J.L. VÁZQUEZ. *A very singular solution for the dual porous medium equation and the asymptotic behaviour of general solutions*. J. Reine Angew. Math. **435** (1993), 1–31.
- [10] M. BERTSCH Y P. BISEGNA. *Blow-up of solutions of a nonlinear parabolic equation in damage mechanics*. European J. Appl. Math. **8** (1997), 89–123.
- [11] C. BRÄNDLE, P. GROISMAN Y J.D. ROSSI. *Fully discrete adaptive methods for a blow-up problem*, Math. Models Methods Appl. Sci. **14** (2004), 1425–1450.
- [12] C. BRÄNDLE, F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *Non-simultaneous blow-up for a quasilinear parabolic system with reaction at the boundary*, aparecerá en Comm. Pure and Appl. Anal.
- [13] C. BRÄNDLE, F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *The role of nonlinear diffusion in non-simultaneous blow-up*, aparecerá en J. Math. Anal. Appl.
- [14] J.D. BUCKMASTER Y G.S.S. LUDFORD. “Lectures on Mathematical Combustion”, CBMS-NSF Regional Conf. Series Appl. Math. **43** SIAM, Philadelphia, 1983.
- [15] C.J. BUDD, W. HUANG Y R.D. RUSSELL. *Moving mesh methods for problems with blow-up*, SIAM J. Sci. Comput. **17** (1996), 305–327.
- [16] G. CARISTI Y E. MITIDIERI. *Blow-up estimates of positive solutions of a parabolic system*, J. Differential Equations **113** (1994), 265–271.
- [17] M. CHAVES Y V.A. GALAKTIONOV. *Regional blow-up for a higher-order semilinear parabolic equation*, European J. Appl. Math. **12** (2001), 601–623.
- [18] X.Y. CHEN, H. MATANO. *Convergence, asymptotic periodicity, and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations*, J. Differential Equations **78** (1989), 160–190.
- [19] C. CORTÁZAR, M. DEL PINO Y M. ELGUETA. *On the blow-up set for $u_t = \Delta u^m + u^m$, $m > 1$* , Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), 541–561.
- [20] K. DENG. *Global existence and blow-up for a system of heat equations with non-linear boundary conditions*, Math. Methods Appl. Sci. **18** (1995), 307–315.
- [21] K. DENG, M. FILA Y H.A. LEVINE. *On critical exponents for a system of heat equations coupled in the boundary conditions*. Acta Math. Univ. Comenian. **63** (1994), 169–192.
- [22] K. DENG Y H.A. LEVINE. *The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel*, J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), 85–126.
- [23] Y.V. EGOROV, V.A. GALAKTIONOV, V.A. KONDRATIEV Y S.I. POHOZAEV. *On the necessary conditions of global existence to a quasilinear inequality in the half-space*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330** (2000), 93–98.
- [24] M. ESCOBEDO Y M. A. HERRERO. *Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system*, J. Differential Equations **89** (1991), 176–202.
- [25] M. ESCOBEDO Y M. A. HERRERO. *A semilinear parabolic system in a bounded domain*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **165** (1993), 315–336.
- [26] M. ESCOBEDO Y H. A. LEVINE. *Critical blow-up and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), 47–100.

- [27] R. FERREIRA, P. GROISMAN Y J.D. ROSSI. *Numerical blow-up for a nonlinear problem with a nonlinear boundary condition*, Math. Models Methods Appl. Sci. **12** (2002), 461–483.
- [28] R. FERREIRA, P. GROISMAN Y J.D. ROSSI. *Adaptive numerical schemes for a parabolic problem with blow-up*, IMA J. Numer. Anal. **23** (2003), 439–463.
- [29] R. FERREIRA, P. GROISMAN Y J.D. ROSSI. *Numerical blow-up for the porous medium equation with a source*, Numer. Methods Partial Differential Equations **20** (2004), 552–575.
- [30] R. FERREIRA, A. DE PABLO Y M. PÉREZ-LLANOS. *Numerical blow-up for the p -laplacian equation with a source*, aparecerá en Comput. Methods Appl. Math.
- [31] R. FERREIRA, A. DE PABLO, F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *The blow-up profile for a fast diffusion equation with a nonlinear boundary condition*, Rocky Mountain J. Math. **33** (2003), 123–146.
- [32] R. FERREIRA, A. DE PABLO, F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *Superfast quenching*, J. Differential Equations **199** (2004), 189–209.
- [33] R. FERREIRA, A. DE PABLO, F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *Non-simultaneous quenching in a system of heat equations coupled at the boundary*, aparecerá en Z. Angew. Math. Phys.
- [34] R. FERREIRA, A. DE PABLO Y J.D. ROSSI. *Blow-up and localization properties for a degenerate diffusion problem not in divergence form*, aparecerá en Indiana Univ. Math. J.
- [35] R. FERREIRA, A. DE PABLO Y J.L. VÁZQUEZ. *Blow-up for the porous medium equation with a localized reaction*. En elaboración.
- [36] R. FERREIRA, F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *The balance between nonlinear inwards and outwards boundary flux for a nonlinear heat equation*. J. Differential Equations **184** (2002), 259–282.
- [37] M. FILA. *Blow-up of solutions of supercritical parabolic equations*, preprint.
- [38] M. FILA Y J. FILO. *Blow-up on the boundary: a survey*, Singularities and differential equations (Warsaw, 1993), 67–78, Banach Center Publ., **33**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1996.
- [39] M. FILA Y H. MATANO. *Blow-up in Nonlinear heat equations from the dynamical systems point of view*, Handbook of dynamical systems, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam 2002, pp. 723–758.
- [40] M. FILA, H. NINOMIYA, J.L. VÁZQUEZ, *Dirichlet boundary conditions can prevent blow-up in reaction-diffusion equations and systems*, aparecerá en Discrete Contin. Dyn. Syst.
- [41] S. FILIPPAS, M.A. HERRERO Y J.J.L. VELÁZQUEZ. *Fast blow-up mechanisms for sign-changing solutions of a semilinear parabolic equation with critical nonlinearity* R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **456** (2000), 2957–2982.
- [42] J. FILO. *Diffusivity versus absorption through the boundary*, J. Differential Equations **99** (1992), 281–305.
- [43] M. FONTELOS. *Formación de singularidades y problemas de frontera libre en mecánica de fluidos*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. **30** (2004), 143–166.

- [44] A. FRIEDMAN. *Remarks on nonlinear parabolic equations*. In: “Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics”, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965, pp. 3–23.
- [45] A. FRIEDMAN Y Y. GIGA. *A single point blow-up for solutions of semilinear parabolic systems*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), 65–79.
- [46] A. FRIEDMAN Y B. MCLEOD. *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*. Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 425–447.
- [47] H. FUJITA. *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math. **16** (1966), 105–113.
- [48] H. FUJITA. *On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $v_t = \Delta v + e^v$* , Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 132–135.
- [49] V.A. GALAKTIONOV. *On conditions for there to be no global solutions of a class of quasilinear parabolic equations*, USSR Comp. Math. & Math. Phys. **2** (1982), 72–90.
- [50] V.A. GALAKTIONOV. *Blow-up for quasilinear heat equations with critical Fujita’s exponents*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **124** (1994), 517–525.
- [51] V.A. GALAKTIONOV. *On asymptotic self-similar behaviour for a quasilinear heat equation: single point blow-up*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), 675–693.
- [52] V.A. GALAKTIONOV Y J.R. KING. *Composite structure of global unbounded solutions of nonlinear heat equations with critical Sobolev exponents*, J. Differential Equations **189** (2003), 199–233.
- [53] V.A. GALAKTIONOV, S.P. KURDYUMOV, A.P. MIKHAILOV Y A.A. SAMARSKIĬ. *Unbounded solutions of semilinear parabolic equations*, Keldysh Ins. Appl. Math. Acad. Sci. USSR, Preprint No. 161 (1979).
- [54] V.A. GALAKTIONOV, S.P. KURDYUMOV Y A.A. SAMARSKIĬ. *A parabolic system of quasilinear equations. I*. Differential’nye Uravneniya **19** (1983), 2123–2140.
- [55] V.A. GALAKTIONOV, S.P. KURDYUMOV Y A.A. SAMARSKIĬ. *A parabolic system of quasilinear equations. II*. Differential’nye Uravneniya **21** (1985), 1544–1559, 1651.
- [56] V.A. GALAKTIONOV Y H.A. LEVINE. *On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux conditions on the boundary*, Israel J. Math. **94** (1996), 125–146.
- [57] V.A. GALAKTIONOV Y H.A. LEVINE. *A general approach to critical Fujita exponents in nonlinear parabolic problems*, Nonlinear Anal. **34** (1998), 1005–1027.
- [58] V.A. GALAKTIONOV Y J.L. VÁZQUEZ. *Regional blow-up in a semilinear heat equation with convergence to a Hamilton-Jacobi equation*. SIAM J. Math. Analysis, **24** (1993), 1254–1276.
- [59] V.A. GALAKTIONOV Y J.L. VÁZQUEZ. *Necessary and sufficient conditions for complete blow-up and extinction for one-dimensional quasilinear heat equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), 225–244.
- [60] V.A. GALAKTIONOV Y J.L. VÁZQUEZ. *Continuación of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), 1–67.

- [61] V.A. GALAKTIONOV Y J.L. VÁZQUEZ. *Incomplete blow-up and singular interfaces for quasilinear heat equations*, Comm. Partial Differ. Equat. **22** (1997), 1405–1452.
- [62] V.A. GALAKTIONOV Y J.L. VÁZQUEZ. *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems A **8** (2002), 399–433.
- [63] B. GIDAS Y J. SPRUCK. *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 525–598.
- [64] Y. GIGA Y R. V. KOHN. *Characterizing blowup using similarity variables*. Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), 1–40.
- [65] B.H. GILDING Y M. A. HERRERO. *Localization and blow-up of thermal waves in nonlinear heat conduction with peaking*, Math. Ann. **282** (1988), 223–242.
- [66] P. GROISMAN. *Adapting the time-step to recover the asymptotic behavior in a blow-up problem*, preprint.
- [67] P. GROISMAN Y J.D. ROSSI. *Aproximando soluciones que explotan*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. **26** (2003), 35–56.
- [68] K. HAYAKAWA. *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proc. Japan Acad. **49** (1973), 503–505.
- [69] M.A. HERRERO Y J.J.L. VELÁZQUEZ. *Blow-up behaviour of one-dimensional semilinear parabolic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **10** (1993), 131–189.
- [70] M.A. HERRERO Y J.J.L. VELÁZQUEZ. *Explosion de solutions d'équations paraboliques semilinéaires supercritiques*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), 141–145.
- [71] M.A. HERRERO Y J.J.L. VELÁZQUEZ. *A blow-up mechanism for a chemotaxis model*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **24** (1997), 633–683.
- [72] W. HUANG, Y. REN Y R.D. RUSSELL. *Moving mesh partial differential equations (MMPDES) based on the equidistribution principle*, SIAM J. Numer. Anal. **31** (1994), 709–730.
- [73] W. JÄGER Y S. LUCKHAUS. *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis*. Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), 819–824.
- [74] F. JOHN. *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235–268.
- [75] S. KAPLAN. *On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 305–330.
- [76] J.L. KAZDAN Y F.W. WARNER. *Curvature functions for compact 2-manifolds*, Annals of Math. **99** (1974), 14–47.
- [77] E.F. KELLER Y L.A. SEGEL. *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*. J. Theor. Biol. **26** (1970), 399–415.
- [78] K. KOBAYASHI, T. SIRAO Y H. TANAKA. *On the growing up problem for semilinear heat equations*. J. Math. Soc. Japan **29** (1977), 407–424.
- [79] A.A. LACEY Y D. TZANETIS. *Global, unbounded solutions to a parabolic equation*, J. Differential Equations **101** (1993), 80–102.

- [80] L.A. LEPIN. *Self-similar solutions of a semilinear heat equation*, Mathematical Modelling **2** (1990), 63–74 (in Russian).
- [81] H.A. LEVINE. *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$* , Arch. Rational Mech. Anal. **51** (1973), 371–386.
- [82] H.A. LEVINE. *Quenching, nonquenching, and beyond quenching for solution of some parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **155** (1989), 243–260.
- [83] H.A. LEVINE. *The role of critical exponents in blow-up theorems*, SIAM Reviews **32** (1990), 262–288.
- [84] H.A. LEVINE Y P. SACKS. *Some existence and nonexistence theorems for solutions of degenerate parabolic equations*, J. Differential Equations **52** (1984), 135–161.
- [85] J. LÓPEZ-GÓMEZ. *Metasolutions*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. **24** (2003), 63–94.
- [86] J. LÓPEZ-GÓMEZ Y P. QUITTNER. *Complete and energy blow-up in indefinite superlinear parabolic problems*, aparecerá en Discrete Contin. Dynam. Systems.
- [87] H. MATANO Y F. MERLE. *On nonexistence of type II blowup for a supercritical nonlinear heat equation*, Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), 1494–1541.
- [88] N. MIZOGUCHI. *Type-II blowup for a semilinear heat equation*, Adv. Differential Equations **9** (2004), 1279–1316.
- [89] N. MIZOGUCHI. *Multiple blow-up of solutions for a semilinear heat equation*, Math. Annalen, **331** (2005) 461–473.
- [90] N. MIZOGUCHI Y E. YANAGIDA. *Critical exponents for the blow-up of solutions with sign changes in a semilinear parabolic equation*, Math. Ann. **307** (1997), 663–675.
- [91] V. MUÑOZ. *Cien años de la conjetura de Poincaré*, Gaceta Real Soc. Mat. Esp. **7** (2004), 629–653.
- [92] O.A. OLEINIK, A.S. KALASHNIKOV Y Y.L. CHOU. *The Cauchy problem and boundary-value problems for equations of unsteady filtration type*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **22** (1958), 667–704.
- [93] W.F. OSGOOD. *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $dy/dx = f(x,y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung*, Monats. Math. Phys. (Vienna) **9** (1898), 331–345.
- [94] A. DE PABLO, F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *Asymptotic simplification for a reaction-diffusion problem with a nonlinear boundary condition*, IMA J. Appl. Math. **67** (2002), 69–98.
- [95] A. DE PABLO, F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *Nonsimultaneous quenching*, Appl. Math. Lett. **15** (2002), 265–269.
- [96] R. DAL PASSO Y S. LUCKHAUS. *A degenerate diffusion problem not in divergence form*, J. Differential Equations **69** (1987), 1–14.
- [97] I. PERAL Y J.L. VÁZQUEZ. *On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term*, Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), 201–224.
- [98] Y.W. QI. *The critical exponents of parabolic equations and blow-up in R^n* . Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128** (1998), 123–136.

- [99] Y.W. QI Y H.A. LEVINE. *The critical exponent of degenerate parabolic systems*, Z. Angew. Math. Phys. **44** (1993), 249–265.
- [100] F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *Non-simultaneous blow-up in a semilinear parabolic system*, Z. Angew. Math. Phys. **52** (2001), 342–346.
- [101] F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *Non-simultaneous blow-up in a nonlinear parabolic system*, Adv. Nonlinear Stud. **3** (2003), 397–418.
- [102] F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *Blow-up sets and Fujita type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear boundary conditions*, Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), 629–654.
- [103] F. QUIRÓS Y J.D. ROSSI. *Blow-up sets for linear diffusion equations in one dimension*, Z. Angew. Math. Phys. **55** (2004), 357–362.
- [104] F. QUIRÓS, J.D. ROSSI Y J.L. VÁZQUEZ. *Complete blow-up and thermal avalanche for heat equations with nonlinear boundary conditions*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 395–424.
- [105] F. QUIRÓS, J.D. ROSSI Y J.L. VÁZQUEZ. *Thermal avalanche for blow-up solutions of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), 59–98.
- [106] J.D. ROSSI Y P. SOUPLLET. *Coexistence of simultaneous and non-simultaneous blow-up in a semilinear parabolic system*, aparecerá Differential Integral Equations **18** (2005), 405–418.
- [107] A.A. SAMARSKII, V.A. GALAKTIONOV, S.P. KURDYUMOV Y A.P. MIKHAILOV. “Blow-up in problems for quasilinear parabolic equations”, Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). English transl.: Walter de Gruyter, Berlin, 1995.
- [108] J. SMOLLER. “Shock-Waves and Reaction-Diffusion Equations”, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [109] P. SOUPLLET. *Blow-up in nonlocal reaction-diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 1301–1334.
- [110] P. SOUPLLET Y S. TAYACHI. *Slim Optimal condition for non-simultaneous blow-up in a reaction-diffusion system*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 571–584.
- [111] PH. SOUPLLET Y J.L. VÁZQUEZ. *Stabilization towards a singular steady state with gradient blow-up for a diffusion-convection problem*, aparecerá en Discrete Contin. Dynam. Systems.
- [112] M. UGHI. *A degenerate parabolic equation modelling the spread of an epidemic*, Ann. Mat. Pura Appl. **143** (1986), 385–400.
- [113] J.L. VÁZQUEZ. *Domain of existence and blowup for the exponential reaction-diffusion equation*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 677–709.
- [114] J.L. VÁZQUEZ. *La ecuación de Navier-Stokes. Un reto físico-matemático para el siglo XXI*, Real Acad. Ciencias Zaragoza **26** (2004), 31–56.
- [115] J.J.L. VELÁZQUEZ. *Estimates on the $(n - 1)$ -dimensional Hausdorff measure of the blow-up set for a semilinear heat equation*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 445–476.
- [116] J.J.L. VELÁZQUEZ. *Classification of singularities for blowing up solutions in higher dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 441–464.

- [117] M. WANG. *Fast-slow diffusion systems with nonlinear boundary conditions*, *Nonlinear Anal.* **46** (2001), 893–908.
- [118] M. WANG Y S. WANG. *Quasilinear reaction-diffusion systems with nonlinear boundary conditions*, *J. Math. Anal. Appl.* **231** (1999), 21–33.
- [119] F.B. WEISSLER. *Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation*, *Israel J. Math.* **38** (1981), 29–40.
- [120] YA.B. ZEL'DOVICH, G.I. BARENBLATT, V.B. LIBROVICH Y G.M. MAKHVILADZE. “The Mathematical Theory of Combustion and Explosions”, Consultants Bureau, New York, 1985.
- [121] YA.B. ZEL'DOVICH Y D.A. FRANK-KAMENETSKII. *The theory of thermal propagation of flames*, *Zh. Fiz. Khim.* **12** (1938), 100-105 (in Russian). English transl. in “Collected Works of Ya. B. Zeldovich”, Vol. 1, Princeton Univ. Press, 1992.
- [122] T.I. ZELENYAK. *Stabilization of solution of boundary value problems for a second-order parabolic equation with one space variable*. *Differ. Uravn.* Vol. **4** (1986), 34–45 (in Russian). English transl.: *Differential Equations* **4** (1986), 17–22.

Un estudio de esquemas bien equilibrados en sistemas hiperbólicos no homogéneos.

E.D. FERNÁNDEZ NIETO ¹

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

edofer@us.es

Resumen

En este trabajo pretendemos dar una visión sobre cómo abordar el problema de aproximar un sistema hiperbólico no homogéneo. Comenzamos introduciendo aproximaciones descentradas, para cuya motivación se considera un sistema parabólico. Aplicando la técnica de las características se deduce que no se pueden tomar aproximaciones centradas de los términos fuente. Se introduce entonces una técnica general que permite definir el tipo de discretizaciones descentradas asociadas a una familia de esquemas numéricos. En concreto, se analiza cómo obtener esquemas equilibrados, es decir, esquemas que calculan, al menos con orden dos, todas las soluciones estacionarias del sistema. Debido a que las soluciones de sistemas hiperbólicos pueden presentar choques y cambios de régimen, se define el concepto de esquema asintóticamente bien equilibrado. En el caso de ecuaciones no homogéneas, se presenta un resultado de estabilidad y convergencia. Finalmente, se aplica esta técnica general al caso de las ecuaciones de aguas someras con fondo no plano. Se presentan varios tests numéricos: en el primero de ellos se estudia la evolución de una onda de rarefacción doble, con un salto en la superficie libre provocado por la presencia de un obstáculo en el fondo. En el segundo test se parte de una perturbación de una solución estacionaria con fondos discontinuos y se estudia la solución estacionaria a la cual converge.

Palabras clave: *Bien equilibrado, volúmenes finitos, término fuente, aguas someras, problemas proyectados.*

Clasificación por materias AMS: *65N06, 76B15, 76M20, 76N99.*

1 Introducción

En este trabajo estudiamos la extensión de esquemas de volúmenes finitos a sistemas no homogéneos. Pediremos que los esquemas sean *bien equilibrados* en

Fecha de recepción: 7/04/05

el sentido de que calculen todas las soluciones estacionarias al menos con orden dos, para un sistema hiperbólico no homogéneo general. Se aplica la teoría desarrollada al sistema de las ecuaciones de aguas someras. En este ejemplo de aplicación, consideramos términos fuente debidos a las variaciones de la topografía.

El estudio de esquemas de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos no homogéneos es un área de trabajo en la que recientemente se están obteniendo resultados significativos. Se podrían atribuir los primeros avances significativos en este campo a Roe, en un artículo publicado en el año 1986 (ver [22]).

La técnica usual para estudiar la discretización de términos fuentes consiste en utilizar buenos esquemas para el sistema homogéneo y combinarlos con técnicas de “splitting” o “división del problema”: dividir cada iteración de tiempo el problema en dos, siendo el primero de ellos homogéneo, el cual se aproxima mediante esquemas descentrados, como puede ser el conocido método de Roe; la solución de este problema se inyecta en el segundo, ya no homogéneo; en este caso, la discretización del término fuente suele ser centrada.

Ésta es una técnica con la que se pueden obtener muy buenos resultados en el contexto de la discretización de sistemas parabólicos. Sin embargo, en problemas hiperbólicos, el esquema anterior puede presentar inestabilidades.

Nada más comenzar la introducción ya han surgido las palabras “centrado” y “descentrado”. Justamente, aquí parece estar el origen del problema. Comencemos analizando el problema homogéneo, sin término fuente.

Consideramos una ecuación lineal de convección-difusión

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad w(x, t) :]0, L[\times]0, T[\rightarrow \mathbb{R},$$

que vamos a aproximar mediante el método de diferencias finitas. Para obtener una buena aproximación de las derivadas en espacio, bastaría considerar la fórmula, bien conocida, que nos proporciona el desarrollo de Taylor. Aproximamos el término de convección centrado en espacio, aproximación de segundo orden. Si consideramos una aproximación en tiempo de tipo Euler explícito, obtenemos

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} + a \frac{w_{i+1}^n - w_{i-1}^n}{2\Delta x} - \varepsilon \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad (1)$$

donde w_i^n es la aproximación de la solución en $x_i = i \Delta x$ en el instante $t_n = n \Delta t$.

Éste es, posiblemente, el ejemplo más simple relacionado con la discretización por diferencias finitas donde pueden observarse la utilidad aparente de la elección de un esquema centrado: en lugar de las aproximaciones

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x} \quad \text{ó} \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{w_i - w_{i-1}}{\Delta x}, \quad (2)$$

que son de primer orden, tomamos la aproximación:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{w_{i+1} - w_i}{2\Delta x}.$$

El esquema resultante, bajo ciertas restricciones sobre los datos así como sobre Δt y Δx , es estable. De hecho, una de las condiciones necesarias para la estabilidad es la siguiente:

$$|a| \Delta x \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, si hacemos tender ε a cero, vemos que para que el esquema siga siendo estable, el paso de la discretización en espacio Δx debe tender igualmente a cero.

Así, si consideramos la ecuación hiperbólica lineal de transporte

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

e intentamos calcular una aproximación numérica de la misma con ayuda de (1) con $\varepsilon = 0$, vemos que el esquema resultante es inestable.

Es bien conocido que una buena forma de estabilizar el esquema consiste en tomar una aproximación descentrada de la derivada (2) en función del signo de a (ver, por ejemplo, los libros de LeVeque [15], Godlewski-Raviart [12] o Toro [24]).

Por tanto, es razonable pensar que la manera de discretizar una ecuación hiperbólica no homogénea debe estar relacionada con esta técnica. Es decir, por qué debería funcionar una aproximación centrada del término fuente.

Podemos encontrar una respuesta inmediata aplicando el método de las características. De este modo, se obtiene la generalización del *esquema descentrado* (“upwind scheme” en inglés).

Consideremos la ecuación de transporte no homogénea

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = g(x, W).$$

Si suponemos $a > 0$, el esquema adecuado es

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a (w_i^n - w_{i-1}^n) + \Delta t g_i, \quad (3)$$

donde g_i es una aproximación de

$$\frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2} - a\Delta t}^{x_{i+1/2} - a\Delta t} g(x, w(x, t)) dx dt.$$

Basta observar que, si $a\Delta t/\Delta x \leq 1$ (ésta es la conocida condición CFL), entonces, el único punto que está en el dominio

$$(x_{i-1/2} - a\Delta t, x_{i+1/2} - a\Delta t),$$

independientemente del valor de $a\Delta t$ es $x_{i-1/2}$. Y por lo tanto, una aproximación de primer orden de la integral anterior es

$$g(x_{i-1/2}, (w_{i-1}^n + w_i^n)/2).$$

Recordemos que la aproximación de $a\partial w/\partial x$ en (3) es también sólo de primer orden. Análogamente, si $a < 0$, tomaremos la aproximación *descentrada a derecha*

$$g(x_{i+1/2}, (w_i^n + w_{i+1}^n)/2).$$

Parece pues claro que es necesario aplicar esquemas descentrados, tanto para la discretización de la derivada en espacio como para el término fuente.

1.1 Algunas referencias

Se indican en los siguientes párrafos algunos de los muchos artículos escritos sobre el problema en los últimos años (muchos otros podrían también haber sido citados).

Ya hemos mencionado anteriormente el trabajo de Roe. Es sin duda éste un nombre fuertemente ligado a la evolución de esquemas numéricos para sistemas hiperbólicos. Por ejemplo, por el conocido *esquema de Roe*. Se trata de un esquema de tipo Godunov, el cual considera la resolución de problemas de Riemann aproximados, donde se cambia el sistema hiperbólico no lineal de partida por una linealización muy robusta, conocida igualmente como *linealización de Roe*.

Centrándonos en la aportación de Roe al estudio de esquemas numéricos de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos no homogéneos, debemos resaltar el trabajo [22]. En él se estudia la relación entre la elección de fórmulas de cuadratura para aproximar la integral del término fuente con la propiedad de que el esquema calcule, al menos con orden dos, las soluciones estacionarias del sistema.

Bermúdez y Vázquez en [1] y [25] formalizan esta propiedad, pidiendo que el esquema numérico calcule de forma exacta, o al menos con orden dos, alguna solución estacionaria del sistema. En concreto, en estos trabajos se presenta la generalización del esquema de Roe a sistemas hiperbólicos no homogéneos y su aplicación a las ecuaciones de aguas someras. Se prueba que el esquema calcula de forma exacta la solución estacionaria de agua en reposo.

Por otro lado, Greenberg y Leroux introducen en [14] el concepto de esquema *bien equilibrado*. En este trabajo presentan un esquema numérico *equilibrado* para todas las soluciones estacionarias, cuando se considera una ecuación no homogénea.

Otros trabajos a resaltar son los de LeVeque [16], Zhou [26], Shi Jin [23] o Perthame-Simeoni [19] y [20].

Por otro lado, cuando estudiamos la aproximación de las ecuaciones de Saint-Venant, aparece el problema del tratamiento de *frentes seco-mojado*. El tratamiento correcto de esta problema, cuando el frente de agua avanza hacia una *pared* es un problema interesante, complejo y de gran importancia. Un correcto tratamiento de frentes seco-mojado puede influir, por ejemplo, en una aproximación correcta de la velocidad de expansión de un fluido en una rotura de presa. En la Tesis Doctoral de J.M. González-Vida [13], se propone la utilización de problemas de Riemann parciales. Se presenta una técnica basada

en la resolución exacta de los problemas de Riemann parciales y una segunda técnica, que reposa sobre la resolución aproximada de los mismos.

Por otro lado, un problema adicional consiste en estudiar esquemas de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos no homogéneos con términos no conservativos. En [4] Castro, Macías y Parés estudian la discretización de los términos de este tipo a partir del esquema de Roe. También en este trabajo presentan su aplicación a las ecuaciones de aguas someras bicapa.

Es ésta una técnica que además ha servido como vía, podemos decir alternativa, al tratamiento de términos fuente: reescribir el problema hiperbólico no homogéneo como un sistema en forma no conservativa. En este caso, entre los trabajos más recientes podemos señalar el trabajo de Castro-Parés [5]. Se trata éste, sin duda, de un *camino* muy interesante, que permite obtener resultados teóricos (en muchas ocasiones escasos en el estudio de estas cuestiones) y de gran nivel de aplicación.

Nuestra aportación en el tema ha sido la siguiente: En [6], [8] y [10] se define una familia de esquemas numéricos bien equilibrados que pueden ser aplicados a cualquier sistema hiperbólico no homogéneo. Entre los esquemas que se incluyen en esta familia, se encuentra el método de Roe; igualmente, esquemas que incluyen la utilización de limitadores de flujo, y esquemas libres de correcciones entrópicas. Se introduce el concepto de esquemas *asintóticamente bien equilibrados*, cuyo estudio abordaremos a lo largo de este trabajo. Igualmente, se estudia el problema de sistemas bidimensionales a partir de la construcción de esquemas proyectados no homogéneos. Finalmente, se aplican estas técnicas a la resolución de las ecuaciones de aguas someras.

1.2 Algunas aplicaciones

Se ha planteado el problema, así como algunas de las referencias que lo estudian. Pero veamos algunas aplicaciones, es decir, algunos ejemplos de sistemas hiperbólicos no homogéneos, y el origen de la definición de los términos fuente.

Ya se ha mencionado anteriormente, en varias ocasiones, el sistema de ecuaciones de aguas someras. Mediante estas ecuaciones se puede estudiar el movimiento de un fluido en ríos, canales o zonas costeras. En este caso, si el dominio por el que circula el fluido no es plano, el gradiente de la topografía define el término fuente.

Las ecuaciones de aguas someras se deducen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante integración vertical, suponiendo que tenemos un dominio en el que la dimensión vertical es mucho menor que sus dimensiones horizontales, además de aceptar la hipótesis de presión hidrostática. Precisamente, al integrar en altura para deducir las ecuaciones, del término de presión obtenemos una doble contribución a su escritura final: en los términos de flujo físico y el término fuente del sistema debidos a variaciones del fondo. Si consideramos la solución de agua en reposo, lo que ocurre es que todos los términos se anulan excepto estos dos, por lo que estaremos estudiando la discretización del esquema de los términos de presión.

Mediante otras reformulaciones de ecuaciones de aguas someras se pueden modelar desde efectos de avalancha en montañas hasta un líquido en ebullición (ver Fowler [11], Mangeney [17] y Tai [18]). En el primer caso, el término se define a partir de la *ley de fricción de Coulomb*. Esta ley parte de la hipótesis que el término de fricción es proporcional a la presión que soporta. Aparecen en la formulación los conceptos de ángulo de reposo y ángulo de fricción interna. En el segundo caso, el término fuente representa transferencia de masa, de momento cinético y de calor entre las fases gas-líquido.

En la página web *www.damflow.org*, se pueden encontrar algunos ejemplos de estudio del movimiento de un fluido bajo el modelo de las ecuaciones de aguas someras. En colaboración con M.J. Castro-Díaz, J.M. González-Vida y C. Parés-Madroñal, de la Universidad de Málaga, se ha estudiado la rotura de la presa de Aznalcollar, que tuvo lugar en la provincia de Sevilla en abril de 1998. Se ha utilizado la topografía real de la zona proporcionada por F.J. Segovia Espiau, de la Universidad de Sevilla.

2 Esquemas asintóticamente equilibrados.

En esta sección comenzamos describiendo algunos esquemas de volúmenes finitos para sistemas hiperbólicos homogéneos. En la segunda subsección continuamos con la motivación de cómo construir esquemas de volúmenes finitos equilibrados. También se introduce el concepto de esquemas asintóticamente equilibrados y se presentan para ellos algunos resultados.

2.1 Una familia de esquemas para sistemas hiperbólicos homogéneos

Sea el sistema hiperbólico homogéneo

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = 0, \quad W :]0, L[\times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^N,$$

donde por $F(W)$ denotamos la función de flujo físico. Dada una partición $\{x_i\}_{i=0}^n$ de $[0, L]$, con $x_i = i \Delta x$, denotamos $V_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ el volumen de control en 1D.

Integrando el sistema anterior en V_i , obtenemos la estructura conservativa del esquema. Aproximando la derivada en tiempo por ejemplo por el esquema de Euler explícito, se obtiene la estructura:

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0,$$

donde $\phi_{i+1/2}^n = \phi(W_i^n, W_{i+1}^n)$ denota una aproximación de $F(W(x_{i+1/2}, t^n))$.

Como veíamos en la introducción, si definimos, por ejemplo, $\phi_{i+1/2}^n = (F(W_i^n) + F(W_{i+1}^n))/2$, el esquema es inestable.

En los esquemas de tipo Godunov, para deducir la definición de $\phi_{i+1/2}$ se consideran problemas de Riemann parciales. Dependiendo del “solver” de

Riemann utilizado llegamos a esquemas distintos: si los problemas de Riemann se resuelven de forma exacta, obtenemos el esquema de Godunov; si se utiliza una linealización, obtenemos (por ejemplo) el esquema de Roe, etc.

En este trabajo consideramos una familia de métodos numéricos entre los que se encuentran los métodos de Roe y Lax-Wendroff, así como esquemas con limitadores de flujo. Igualmente, se pueden incluir esquemas libres de correcciones entrópicas (ver [7]).

Consideramos la siguiente definición de la función de flujo numérico:

$$\phi(W_i, W_{i+1}) := F_C(W_i, W_{i+1}) - \frac{1}{2}D(W_i, W_{i+1})(W_{i+1} - W_i), \quad (4)$$

donde por $D(W_i, W_{i+1})$ denotamos la matriz de descentramiento del esquema. Esta matriz es una aproximación de cierta matriz $\mathcal{D}(\widetilde{W}_{i+1/2})$ siendo $\widetilde{W}_{i+1/2}$ un estado intermedio para los valores W_i y W_{i+1} , por ejemplo el valor medio de ellos o el *valor medio de Roe* (ver Roe [21]). La matriz \mathcal{D} debe ser definida (o, al menos, semidefinida) positiva. Se trata de la matriz de difusión del esquema, relacionada con la matriz de descentramiento por la identidad

$$D(W, W) = \mathcal{D}(W).$$

Por ejemplo, el esquema de Roe se puede escribir bajo la estructura (4), donde

$$D(W_i, W_{i+1}) = |\widetilde{A}(\widetilde{W}_{i+1/2})|$$

y \widetilde{A} es la matriz de Roe, la cual debe verificar la condición:

$$F(W_{i+1}) - F(W_i) = \widetilde{A}(\widetilde{W}_{i+1/2})(W_{i+1} - W_i)$$

Nota 1 La definición de la matriz valor absoluto, parte de la hipótesis que el sistema es hiperbólico y, por tanto, la matriz Jacobiana del flujo, que denotaremos A , es diagonalizable. Entonces, si

$$A = X\Lambda X^{-1} \quad \text{con} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_i, i = 1, \dots, N),$$

pondremos $|A| = X|\Lambda|X^{-1}$ con $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_i|, i = 1, \dots, N)$.

Nota 2 Teniendo en cuenta este ejemplo en la definición de la matriz de difusión numérica, sólo podremos suponer que $\mathcal{D}(W)$ es una función Lipschitziana de W . Su derivada puede tener discontinuidades en puntos en que se anule alguno de sus valores propios.

Por $F_C(W_i, W_{i+1})$ denotamos una aproximación centrada de F en $x_{i+1/2}$. La definición que encontramos en la mayoría de los esquemas, como en el de Roe, es

$$F_C(W_i, W_{i+1}) = \frac{F(W_i) + F(W_{i+1})}{2}$$

Incluimos la posibilidad de otras definiciones de F_C por el siguiente motivo. Es conocido que, por ejemplo para el método de Roe, cuando alguno de los

autovalores de la matriz de difusión se anula, se produce una falta de “viscosidad numérica” que hace que el esquema pueda no converger a la solución entrópica. Es conocido el efecto de “pata de perro” que presenta el método de Roe en una onda de rarefacción en la que haya una transición en la naturaleza del fluido (paso de subsónico a supersónico), lo que implica que en esta zona se anula uno de los autovalores de la matriz Jacobiana del flujo.

Existen técnicas, como el conocido método de regularización de Harten, que permiten introducir cierta viscosidad numérica artificial en el esquema.

Veamos ahora un ejemplo, que podemos encontrar en [9]. Con este ejemplo pretendemos motivar la nueva definición de F_C . Consideramos una ley de conservación escalar (denotemos entonces por u la incógnita y por $f(u)$ la función de flujo físico) y suponemos

$$u_i < u_{i+1}, \quad (5)$$

con

$$f(u_i) = f(u_{i+1}), \quad (6)$$

donde f es estrictamente convexa. Tendremos entonces que la matriz de Roe (escalar en este caso), debe verificar:

$$f(u_{i+1}) - f(u_i) = a(u_i, u_{i+1})(u_{i+1} - u_i).$$

Debido a (5) y (6), tenemos por tanto que $a(u_i, u_{i+1}) = 0$. Entonces, la función de flujo numérico queda reducida a

$$\phi(u_i, u_{i+1}) = f(u_i) = f(u_{i+1})$$

Sin embargo, en este caso ϕ debe ser una aproximación de $f(u(x_{i+1/2}))$. En [7] se propone la siguiente definición de F_C :

$$F_C(W_i, W_{i+1}) = \frac{F_C(W_{i+\alpha}) + F_C(W_{i+1-\alpha})}{2}, \quad (7)$$

donde $W_{i+\alpha} = (1 - \alpha)W_i + \alpha W_{i+1}$ con $\alpha \in [0, 1]$.

Tenemos la situación descrita en la Figura 1.

En concreto, en [7] se utiliza esta definición de F_C junto con una definición adecuada de una matriz de difusión, para el caso de las ecuaciones de aguas someras, cuyos autovalores se anulan cuando el fluido se encuentra en régimen supercrítico.

2.2 Esquemas asintóticamente equilibrados

Comenzamos motivando la discretización que vamos a considerar del término fuente del sistema hiperbólico no homogéneo

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = G(x, W). \quad (8)$$

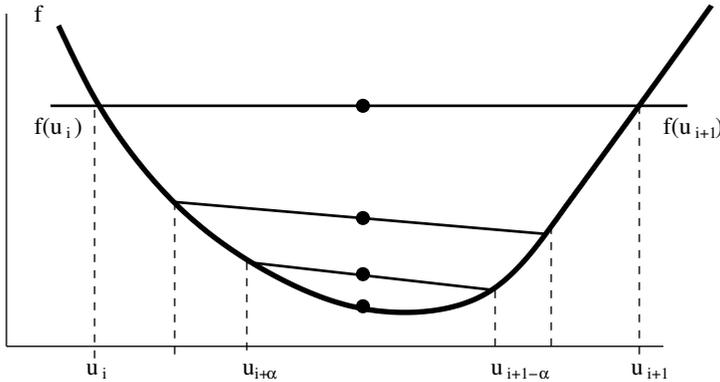


Figura 1: Motivación para la definición de F_C .

Y la motivación comienza a partir de lo que se conoce como *ecuación equivalente* de los esquemas definidos para el sistema homogéneo. De hecho, se dice que los esquemas definidos por (4) se pueden escribir *en forma viscosa* porque se pueden interpretar como discretizaciones centradas (véase Roe [22]), aproximaciones de orden dos en espacio, del sistema de convección-difusión equivalente

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}(W) \frac{\partial}{\partial x} W \right) = 0. \quad (\nu = \Delta x/2) \quad (9)$$

El término

$$-\nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}(W) \frac{\partial W}{\partial x} \right),$$

representa la difusión numérica que el esquema introduce que, como vimos anteriormente, resulta necesaria por razones de estabilidad.

Si introducimos una discretización centrada del término fuente, podemos mirar este esquema numérico como una aproximación centrada del sistema equivalente

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}(W) \frac{\partial}{\partial x} W \right) = G(x, W). \quad (10)$$

Recordemos que buscamos esquemas *equilibrados*, es decir, buscamos que el esquema calcule, al menos con orden dos, todas las soluciones estacionarias del sistema.

Toda solución estacionaria regular \bar{W} verifica

$$\frac{\partial F(\bar{W})}{\partial x} = G(x, \bar{W}),$$

y por tanto, en general, no es solución estacionaria de (10).

La idea en la que nos basaremos para definir la aproximación del término fuente consiste en añadir un término de corrección $\mathcal{C}(x, W)$ a la ecuación (10),

de forma que toda solución estacionaria regular de (8) sea solución estacionaria del sistema

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}(W) \frac{\partial}{\partial x} W \right) = G(x, W) + \mathcal{C}(x, W).$$

Si denotamos $A(W)$ la matriz Jacobiana del flujo, y ésta no es singular, entonces, basta definir

$$\mathcal{C} = -\nu \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{D}(W) A^{-1}(W) G(x, W)).$$

Si $A(W)$ es singular, supongamos por simplicidad que tenemos un sistema de dimensión $N = 2$, y

$$A(W) = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1}, \quad D(W) = X \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1}.$$

Entonces, para que se cumpla la propiedad deseada, basta definir

$$\mathcal{C}(x, W) = -\nu \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{D}(W) \widetilde{A}^{-1}(W) G(x, W)). \quad (11)$$

donde

$$\widetilde{A}^{-1}(W) = X \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1}.$$

La definición de la matriz \widetilde{A}^{-1} recoge la idea de que no hace falta descentrar en los campos característicos cuyos autovalores sean nulos (ver [25]). De esta forma se tomará el inverso de los autovalores de A o cero. Si la matriz A no es singular, la definición de la matriz \widetilde{A}^{-1} coincide con la de la inversa de A . Podemos entonces definir siempre $\mathcal{C}(x, W)$ por (11).

Podemos además conseguir que los esquemas tengan estructura conservativa observando que podemos reescribir el sistema equivalente, incluyendo la definición anterior de $\mathcal{C}(x, W)$, como sigue:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[F(W) - \nu \mathcal{D}(W) \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \widetilde{A}^{-1}(W) G(x, W) \right) \right] = G(x, W). \quad (12)$$

Proponemos entonces esquemas de tres puntos con la estructura

$$\begin{aligned} \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_G(W_i^n, W_{i+1}^n) - \phi_G(W_{i-1}^n, W_i^n)}{\Delta x} = \\ = G_C(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, W_{i-1}^n, W_i^n, W_{i+1}^n) \end{aligned} \quad (13)$$

donde por ϕ_G denotamos la función de flujo numérico, modificada por la presencia del término fuente. Por G_C denotamos una aproximación centrada de G en $x = x_i$.

Definimos la función ϕ_G como

$$\phi_G(W_i, W_{i+1}) = F_C(W_i, W_{i+1}) -$$

$$-\nu D(W_i, W_{i+1}) \left(\frac{W_{i+1} - W_i}{\Delta x} - \widetilde{A}^{-1}(W_i, W_{i+1}) G_D(x_i, x_{i+1}, W_i, W_{i+1}) \right), \quad (14)$$

donde G_D es una aproximación de G en $x = x_{i+1/2}$ y $\widetilde{A}^{-1}(W_i, W_{i+1})$ es una aproximación de $\widetilde{A}^{-1}(\widetilde{W}_{i+1/2})$. Recordemos también que $D(W_i, W_{i+1})$ es una aproximación de $\mathcal{D}(\widetilde{W}_{i+1/2})$ y $\widetilde{W}_{i+1/2}$ es un estado intermedio para los valores W_i y W_{i+1} .

Nota 3 Usualmente, para aproximar el término fuente de un sistema hiperbólico se consideran esquemas con una estructura que no altera las componentes correspondientes al primer miembro de la ecuación. De esta forma, se suelen escribir todos los términos relacionados con la aproximación del término fuente en el segundo miembro de (13).

Sin embargo, si buscamos esquemas en forma conservativa, cuya estructura coincide con la obtenida al integrar la ecuación sobre el volumen de control, llegamos a la definición (13).

Igualmente, está justificado si consideramos esquemas de tipo Godunov para obtener las aproximaciones de la funciones de flujo en los puntos de las interceldas $x_{i+1/2}$. En este caso, para aproximar $F(W(x_{i+1/2}, t^{n+1}))$ se consideraría el problema de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = G(x, W); \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_i^n & x < x_{i+1/2}, \\ W_{i+1}^n & x > x_{i+1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

Independientemente de que consideremos “solvers” exactos o aproximados, es evidente que la definición obtenida para el caso homogéneo, dada por $\phi_{i+1/2}$, debe ser modificada, pues la solución del problema con el término fuente G debe ser diferente. De esta forma, con el esquema dado por (13), la función de ϕ_G dada por (14) es una aproximación de $F(W(x_{i+1/2}, t^{n+1}))$, donde W es la solución del problema de Riemann no homogéneo (15).

2.3 Propiedades de equilibrado

En esta subsección estudiamos las propiedades de equilibrado de los esquemas propuestos.

En primer lugar, debemos prestar atención a la regularidad de las matrices de difusión numérica del esquema. En concreto, anteriormente estuvimos considerando la matriz valor absoluto. Con este ejemplo vemos que sólo podemos suponer con carácter general que la matriz $\mathcal{D}(W)$ es Lipschitziana.

Supongamos ahora que W es una solución para la cual todos los autovalores de $A(W)$ son o bien no nulos o bien idénticamente nulos en todo el dominio de definición. Entonces la matriz de difusión también es regular en todo el dominio. Sin embargo, si los autovalores se anulan en puntos aislados, tenemos un problema para hablar de *equilibrado con orden dos*, pues algunas componentes

del esquema no son suficientemente regulares. Observamos también que, aunque en principio la introducción de la matriz $\widetilde{A}^{-1}(W)$ podría llevar a pensar en problemas de regularidad, debido a su definición, la única obstrucción para hablar de equilibrado de segundo orden se encuentra en los mismos puntos que para la matriz $\mathcal{D}(W)$. Es decir, puntos en los que alguno de sus autovalores posee un cero aislado.

Por simplicidad en la exposición, dada una solución W de (8), supondremos que existe una superficie continua $\gamma \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\mathcal{D}(W)$ y $A(W)$ son de clase C^2 en $\mathbb{R}^N \setminus \gamma$.

Por tanto, para probar que el esquema es equilibrado con orden dos, tendremos que trabajar sobre subconjuntos donde todas las componentes del esquema sean regulares. Se introduce entonces la siguiente definición:

Definición 1 (*Esquemas asintóticamente equilibrados*)

Diremos que el esquema (13)-(14) es asintóticamente equilibrado para una solución estacionaria W del sistema hiperbólico (8) si existe una sucesión creciente de compactos $\{K_n\}_n$ tal que:

- 1) $\mu([0, L] \setminus \cup_n K_n) = 0$, donde por μ denotamos la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .
- 2) Para todo n existe $\delta_n > 0$ tal que, si $0 < \Delta x < \delta_n$, el esquema equilibra al sistema sobre K_n al menos con orden 2.

Dada una función continua $W : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^N$ llamaremos conjunto de puntos regulares y de puntos singulares para W respecto del esquema (13), (14) a los definidos respectivamente por

$$\omega(W) = \{x \in [0, L] \text{ tal que } W(x) \subset (\mathbb{R}^N \setminus \gamma)\}$$

y

$$\sigma(W) = [0, L] \setminus \omega(W).$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea $W : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una solución estacionaria de clase C^2 del sistema (8). Entonces se tiene:*

- a) Si $\sigma(W) = \emptyset$, el esquema (13)-(14) equilibra el sistema (8) con orden 2 al menos.
- b) Si el conjunto de puntos singulares de W , $\sigma(W)$, tiene medida nula, entonces el esquema (13)-(14) equilibra asintóticamente al sistema (8).
- c) Supongamos que $\mathcal{D}(W)$ tiene los mismos autovectores que $A(W)$ y sus autovalores se anulan en los mismos puntos. Entonces, el esquema (13)-(14) equilibra asintóticamente al sistema (8).

Para la demostración, véase [10] y [8].

En el último apartado de este resultado, se pide que la definición de la matriz D esté relacionada con la de la matriz A . Ésta es una hipótesis que se verifica de forma inmediata para la mayoría de las posibles definiciones de la matriz de difusión numérica, por ejemplo cuando se define como la matriz valor absoluto de A .

3 Algunas elecciones de la matriz D

La propiedad del apartado c) del teorema 1 de que las matrices D y A tengan los mismos autovectores aparece además como condición suficiente en el siguiente resultado clásico de estabilidad (ver [12]) para sistemas lineales homogéneos:

Teorema 2 *Si la matriz D tiene los mismos autovectores que A y además sus autovalores d_j y a_j respectivamente verifican*

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} a_j\right)^2 \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} d_j \leq 1 \quad \forall j, \quad (16)$$

entonces el esquema es L^2 estable.

A partir de este teorema, podemos dar algunas elecciones posibles de la matriz D , de forma que tenga los mismos autovectores que A y sus autovalores d_j verifiquen la desigualdad (16).

Los métodos de Roe y Lax-Wendroff corresponden a tomar $d_j = |a_j|$ y $d_j = (\Delta t/\Delta x)a_j^2$ respectivamente. Estas definiciones de d_j verifican las desigualdades (16) bajo la condición CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_j |a_j| \leq 1.$$

El esquema de Roe tiene como matriz de difusión la matriz valor absoluto:

$$D = |A|.$$

El esquema de Lax-Wendroff se puede definir con

$$D = \frac{\Delta t}{\Delta x} A^2.$$

Este esquema proporciona segundo orden en tiempo, con una iteración. Tiene el inconveniente de que puede presentar oscilaciones en los choques. De esta forma, se introducen esquemas con limitadores de flujo, con la idea de aplicar el método de Roe cerca de las discontinuidades y el método de Lax-Wendroff en zonas regulares. Se pueden introducir este tipo de esquemas definiendo

$$D = |A| - X \Lambda_\varphi X^{-1}. \quad \text{con} \quad \Lambda_\varphi = \text{Diag}\left(\left(\text{sig}(\lambda_j) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_j\right) \lambda_j \varphi(r_j), j = 1, \dots, N\right),$$

donde

$$r_j = \frac{\alpha_{j,i_o}}{\alpha_{j,i}}, \quad \text{y} \quad \alpha_{j,i} = [X^{-1}(W_{i+1} - W_i)]_j,$$

con $i_o = i - \text{sig}(\lambda_j)$.

Algunos ejemplos clásicos de funciones de limitadores de flujo son los de Van Leer y *minmod*, dados por las siguientes elecciones de φ :

$$\varphi(r) = \frac{|r| + r}{1 + r}, \quad \varphi(r) = \max(0, \min(1, r)).$$

Otras definiciones se pueden encontrar en [15] y [12].

4 Análisis de estabilidad y convergencia para ecuaciones escalares no homogéneas

En esta sección se estudia bajo qué condiciones el esquema aplicado a una ecuación no homogénea es L^∞ estable y convergente.

Consideramos el problema de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = g(x, w), \\ w(x, 0) = w_0(x), \\ \left\{ \begin{array}{l} w(x) = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ y } x = L \text{ si } f'(x)(x - L/2) < 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ y } x = L \text{ si } f'(x)(x - L/2) \geq 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Escribimos el esquema en forma incremental:

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} B_{i-1/2}^n \nabla w_{i-1/2}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} C_{i+1/2}^n \nabla w_{i+1/2}^n + \mathcal{G}_i^n,$$

donde

$$\mathcal{G}_i^n = \Delta t \left(\frac{1}{2} (1 + \rho_{i-1/2}^n) g_{i-1/2}^n + \frac{1}{2} (1 - \rho_{i+1/2}^n) g_{i+1/2}^n \right)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{i\pm 1/2}^n = \frac{|f'(w_{i\pm 1/2}^n)|}{f'(w_{i\pm 1/2}^n)}, \quad \text{si } \text{sgn}(f'(w_{i-1/2}^n)) = \text{sgn}(f'(w_{i+1/2}^n)), \\ \rho_{i\pm 1/2}^n = 0, \quad \text{caso contrario.} \end{array} \right.$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 3 *Supongamos que los coeficientes satisfacen*

$$B_{i-1/2} \geq 0, \quad C_{i+1/2} \geq 0;$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(B_{i-1/2}^n + C_{i+1/2}^n \right) \leq 1; \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(B_{i+1/2}^n + C_{i+1/2}^n \right) \leq 1.$$

Entonces el esquema es L^∞ estable y de variación total acotada. En concreto, se tiene que para todo n :

$$1. \quad \max_i |w_i^n| \leq \max_i |w_0^n| + t_n \|g\|_{L^\infty}$$

$$2. \quad TV(w^n) \leq e^{\alpha t_n} TV(w_0) + \beta(e^{\alpha t_n} - 1)/\alpha,$$

donde $\alpha = 4\|D_w g\|_{L^\infty(K)}$ y $\beta = L\|D_x g\|_{L^\infty(K)}$, siendo K un compacto de $[0, L] \times \mathbb{R}$ que contiene el grafo generado por los w_i^k $k = 0, \dots, n$.

Como consecuencia, se tiene además el siguiente resultado de convergencia:

Corolario 4 *Bajo una condición CFL*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |f'| \leq c_{cfl} \tag{17}$$

con c_{cfl} dependiente de la parte homogénea del esquema, la solución proporcionada por el esquema converge en $L^1_{loc}([0, L] \times \mathbb{R})$ a la solución entrópica del problema original.

4.1 Tests numéricos.

En esta subsección presentamos dos tests numéricos en el caso de las ecuaciones de aguas someras. Las incógnitas las denotaremos por h , la altura de la columna de agua y q el caudal. En el primero de ellos, consideramos una doble onda de rarefacción más un salto provocado por un escalón en el fondo. El segundo test consiste en recuperar una solución estacionaria. En este último caso comparamos los niveles de energía calculados por el esquema, el cual debe ser constante.

Los resultados que se presentan corresponden a una matriz de difusión igual a la matriz valor absoluto, con valor constante $\alpha = 1/8$.

Test 1: Doble onda de rarefacción con choque.

El test siguiente fue propuesto por Bouchut en [2]. Se estudia la evolución de una doble onda, sobre un fondo con un obstáculo. En la superficie libre se observa tanto la aparición de una onda de rarefacción como un choque, debido a la presencia del obstáculo.

La definición del fondo del dominio es la siguiente: $H(\vec{x}) = 10 - z_b(\vec{x})$ con

$$z_b(x) = \begin{cases} 1 & 25/3 < x < 12,5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El dominio es $[0, 25]$, para el que tomamos un paso en espacio $\Delta x = 0,25$. En este test comparamos los resultados obtenidos por el esquema numérico para $c_{cfl} = 0,8$ y $c_{cfl} = 1$. También se compara con la solución obtenida para valores de Δx suficientemente pequeños para que los resultados numéricos no varíen.

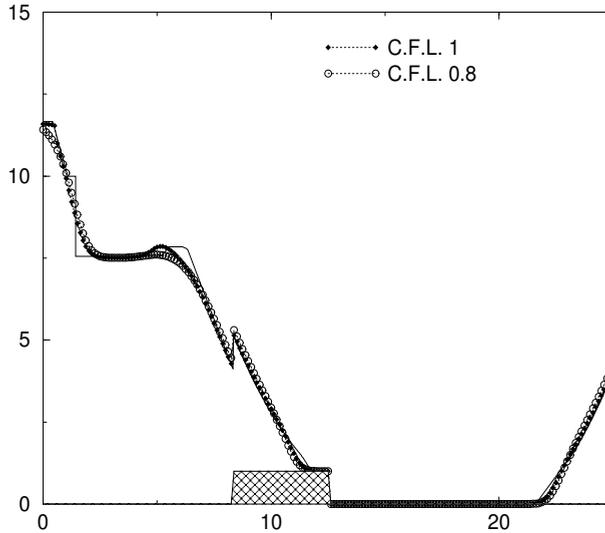


Figura 2: Test 1: Superficie libre

Como condición de contorno en $x = 0$ y $x = 25$ se duplican los estados en la frontera. La condición inicial está determinada por una superficie libre constante a 10 metros en todo el dominio ($h(x, y) = 10 - z_b(x, y)$) y caudal

$$q(x) = \begin{cases} 350 & \text{si } x > 50/3, \\ -350 & \text{si } x < 50/3. \end{cases}$$

Los resultados que se presentan corresponden al tiempo $t = 0,25$. En la Figura 2 se presentan los resultados obtenidos. Observamos una buena aproximación de la velocidad del frente, así como de la onda de rarefacción y el choque.

Test 2: Soluciones estacionarias.

Realizamos dos tests propuestos en [23]. Están basados en el hecho de que las soluciones estacionarias de las ecuaciones de aguas someras no homogéneas verifican

$$q = \text{const.}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{q}{h} \right)^2 + g(h + z_b(x)) = \text{const.} \quad (19)$$

La condición (19) expresa la conservación de energía total (energía cinética + energía potencial).

Para los dos siguientes sub-tests, tomamos $g = 1$ y analizamos la solución numérica que proporciona el esquema propuesto con (19).

El dominio es en ambos casos $]0, 1[$, tomamos $\Delta x = 0,01$ y una condición CFL correspondiente a $c_{cfl} = 0,8$.

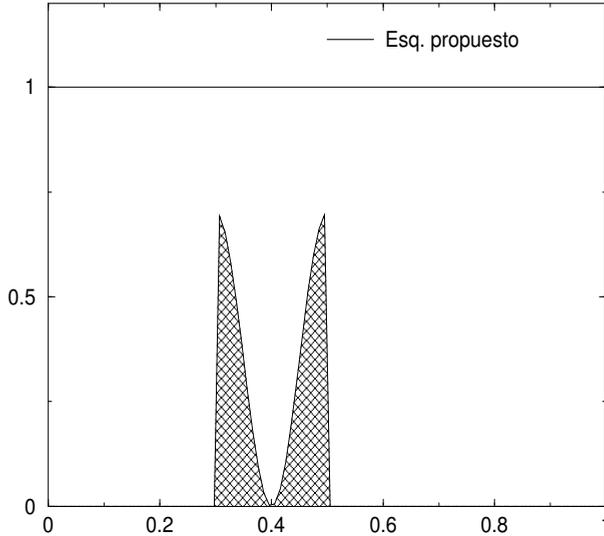


Figura 3: Test 2.1: $\frac{1}{2} \left(\frac{q}{h}\right)^2 + g(h + z_b(x))$ y función de fondo.

Test 2.1: Solución estacionaria en reposo. En este caso, la función que describe el fondo es

$$z_b(x) = \begin{cases} 0,35 \times (\cos(\pi(x - 0,5)/0,1) + 1) & 0,3 < x < 0,5; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La condición inicial es

$$h_i = 1 - \frac{1}{2}(z_{i-1/2} + z_{i+1/2}), \quad \text{con} \quad z_{i+1/2} = (z_i + z_{i+1})/2$$

y

$$q_i = 0.$$

Para esta condición inicial, tenemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{q}{h}\right)^2 + g(h + z_b(x)) = 1 \tag{20}$$

en todos los puntos excepto en un entorno del obstáculo.

En la Figura 3 se presentan el perfil de la función del fondo y el resultado numérico que se obtiene para el nivel de energía, que debe ser constante a uno. Observamos que la solución estacionaria obtenida por el esquema propuesto satisface con gran exactitud (20). De hecho, el error es inferior a 10^{-5} en norma L^∞ .

Test 2.2: Solución estacionaria no en reposo.

En este caso, la función de fondo es

$$z_b(x) = \begin{cases} 0,35 \times (\cos(\pi(x - 0,5)/0,1) + 1) & 0,4 < x < 0,5; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta función presenta un fuerte salto en $x = 0,5$, lo que afecta notablemente a la conservación de energía por los esquemas numéricos. Se considera una solución estacionaria no en reposo.

Para este test, buscamos la solución estacionaria correspondiente a $q = 0,1$ y nivel de energía constante igual a 1,005.

Como condición inicial imponemos caudal igual a 0,1 y altura

$$h_i = 1 - \frac{1}{2}(z_{i-1/2} + z_{i+1/2}).$$

Con esta condición inicial se obtiene un nivel de energía constante excepto en un entorno de $x = 0,5$, donde se encuentra el salto de la función fondo. De esta forma se crea una perturbación en este punto y estudiamos la solución estacionaria a la que converge el sistema.

Comparamos nuestro esquema con el método de tipo intercelda propuesto por Jin en [23].

En la Figura 4 comparamos la solución numérica, obtenida por el esquema propuesto con los esquemas introducidos en [23], que denotaremos “métodos Godunov de primer y segundo orden de tipo intercelda”. En la Figura 5 también comparamos con la solución exacta en una zona cercana al obstáculo.

Para mostrar los buenos resultados que proporciona nuestro esquema, presentamos en la Tabla 4.1 los errores correspondientes a los métodos Godunov de primer y segundo orden de tipo intercelda y al esquema propuesto, en norma L^1 y L^∞ .

	Esq. propuesto	Primer orden God. Interf.	Seg. orden God. Interf.
L^1	$7 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$
L^∞	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$

Cuadro 1: Errores en norma L^1 y L^∞ .

Referencias

- [1] A. Bermúdez, M.E. Vázquez Cendón, *Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms*. Computers Fluids 23-8: 1049-1071, 1994.

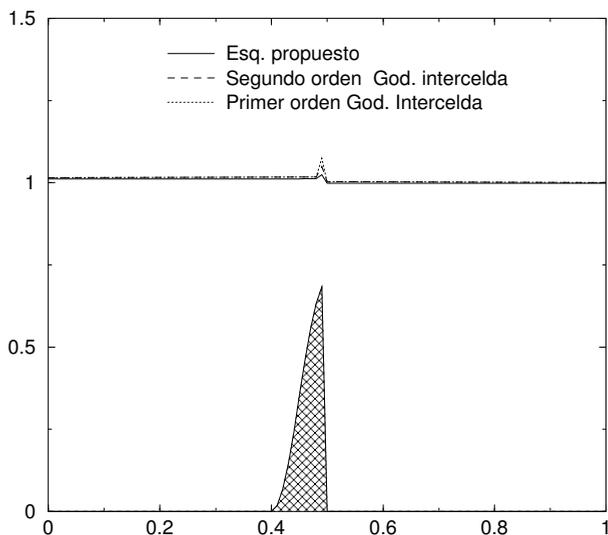


Figura 4: Test 2.2: Comparación de $\frac{1}{2} \left(\frac{q}{h}\right)^2 + g(h + z_b(x))$ para el esquema propuesto y los esquemas Godunov de primer y segundo de tipo interfaz.

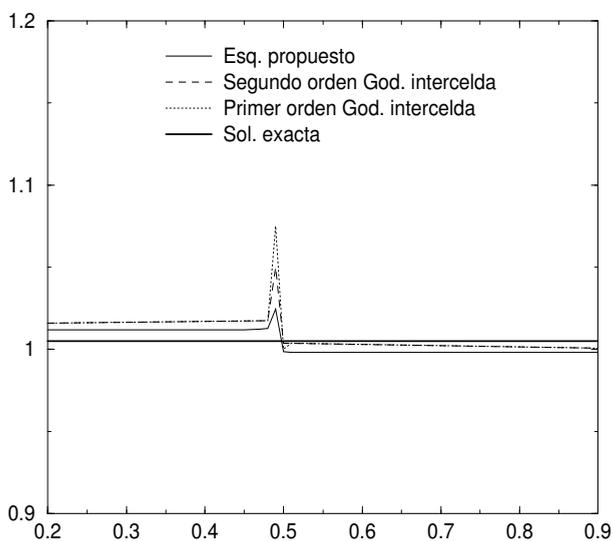


Figura 5: Test 2.2: Ampliación de la Figura 4.

- [2] F. Bouchut, *An introduction to finite volume methods for hyperbolic systems of conservation laws with source*, Ecole CEA - EDF - INRIA, 7-10 octobre 2002, INRIA Rocquencourt, France.
- [3] W. Carlisle Thacker, *Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations*. J. Fluid Mech. 107: 499-508, 1981.
- [4] M. J. Castro, J. Macías, C. Parés. *A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-d shallow water system*. M2AN 35-1: 107-127, 2001.
- [5] M. J. Castro, C. Parés. *On the Well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow-water systems*. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 38, n. 5, 821-852, 2004.
- [6] T. Chacón Rebollo, A. Domínguez Delgado, E. D. Fernández-Nieto, *A family of stable numerical solvers for Shallow Water equations with source terms*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 192:203-225, 2003.
- [7] T. Chacón Rebollo, A. Domínguez Delgado, E. D. Fernández-Nieto, *An entropy correction free solver for shallor water equations with source term*. M2AN 37-3: 755-772, 2003.
- [8] T. Chacón Rebollo, A. Domínguez Delgado, E. D. Fernández-Nieto, *Asymptotically balanced schemes for non-homogeneous hyperbolic systems. Application to the Shallow Water Equations*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338: 85-90, 2004.
- [9] F. Dubois, G. Mehlman, *A non-parameterized entropy correction for Roe's approximate Riemann solver*. Numer. Math. 73: 169-208, 1996.
- [10] E. D. Fernández-Nieto *Aproximación numérica de leyes de conservación hiperbólicas no homogéneas. Aplicación a las ecuaciones de Aguas Someras*. Tesis Doctoral Universidad de Sevilla, 2003.
- [11] A. C. Fowler, *Mathematical Model in the Applied Sciences* Cambridge, 1997.
- [12] E. Godlewski, P. A. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer - Verlag, 1996.
- [13] J. M. González-Vida. *Desarrollo de esquemas numéricos para el tratamiento de frentes seco-mojado en sistemas de aguas someras*. Tesis Doctoral Universidad de Málaga, 2003.
- [14] J. M. Greenberg, A. Y. Leroux. *A Well-Balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*. SIAM J. Numer. Anal. 33-1: 1-16, 1996.
- [15] R. J. LeVeque *Numerical Methods for conservation Laws*. Birkhauser Verlag, Zurich, 1990.

- [16] R. J. LeVeque *Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm*. J. Comput. Phys. 146: 346-365, 1998.
- [17] A. Mangeney, J. P. Vilotte, M. O. Bristeau, B. Perthame, C. Simeoni, S. Yernini, *Numerical modelling of avalanches based on Saint-Venant equations using a kinetic scheme* J. Geophys. Res. 108(B11), 2527, 2003.
- [18] Y. C. Tai, S. Noelle, J. M. Gray, K. Hutter, *Shock-Capturing and Front-Tracking Methods for Granular Avalanches*. J. Comput. Phys. Journal of Comp. Phys. 175, 269-301, 2002.
- [19] B. Perthame, C. Simeoni, *A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term*. Calcolo 38-4: 201-231, 2001.
- [20] B. Perthame, C. Simeoni, *Convergence of the Upwind Interface Source method for hyperbolic conservation laws*. Proceeding of Hyp 2002, T hou and E. Tadmor editor, Springer, 2003.
- [21] P. L. Roe. *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. J. Comput. Phys., 43: 357-371, 1981.
- [22] P. L. Roe, *Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source terms*. *Nonlinear Hyperbolic Problems*, C. Carraso, P.-A. Raviart and D. Serre, eds., Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 1270: 41-51, 1986.
- [23] S. Jin, *A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms*. M2AN, 35-4: 631-645, 2001.
- [24] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1997.
- [25] M. E. Vázquez Cendon. *Estudio de esquemas descentrados para su aplicacion a las leyes de conservación hiperbólicas con términos fuente*. Tesis Doctoral Universidad de Santiago de Compostela, 1994.
- [26] J. G. Zhou, D. M. Causon, C. G. Mingham, and D. M. Ingram, *The Surface Gradient Method for the Treatment of Source Terms in the Shallow-Water Equations* J. Comput. Phys. 168: 1-25, 2001.

Las Matemáticas en las Instituciones Financieras

ELOY FONTECHA

Responsable del Departamento de Nuevos Productos
Área de Mercados Globales y Distribución
Banco Bilbao Vizcaya Argentaria

efontecha@grupobbva.com

Resumen

En este artículo voy a intentar mostrar la importancia que el empleo de las Matemáticas tiene para las Instituciones Financieras en el desempeño de su función. Aunque a lo largo del artículo hablaré de Bancos, lo dicho es válido para las Cajas de Ahorros u otras Entidades de Crédito. Comenzaré describiendo los problemas financieros en cuya solución surge la necesidad de empleo de las matemáticas. A continuación mostraré cómo esos problemas financieros se circunscriben a distintas Áreas de Negocio o Control de los Bancos. Finalmente descenderé, sin el detalle que el más mínimo rigor matemático exigiría, a los conceptos y métodos matemáticos particulares que se emplean en la solución de los problemas financieros descritos. De forma adicional haré un breve repaso de mi experiencia personal como matemático que se ha dedicado a la aplicación de las matemáticas al mundo financiero, esperando que este repaso sirva para ilustrar algunas de las posibilidades profesionales abiertas a futuros “usuarios avanzados de las matemáticas”.

El ámbito de actuación de un Banco

Los agentes financieros. En toda economía existen simultáneamente agentes demandantes de recursos financieros con necesidades de financiación, y agentes oferentes de recursos financieros con necesidades de inversión. A los primeros se les denomina tomadores de recursos, y a los segundos prestadores. Los activos financieros surgen como medio a través del cual los agentes pueden satisfacer estas necesidades.

Los activos financieros son derechos que adquieren los agentes prestadores frente a los tomadores de los recursos, los cuales asumen unas obligaciones. Las características que definen estos derechos son dos:

1. El perfil en términos de cantidades y fechas de los flujos monetarios que representan.

2. La calidad crediticia del agente tomador de recursos sobre el que esos derechos se ostentan, es decir la capacidad que tiene ese agente de cumplir con sus obligaciones de pago futuro.

Así pues, un activo financiero es un derecho de determinado agente a recibir unos flujos monetarios en las fechas que se establezcan. Más adelante clasificaremos los activos financieros de acuerdo a las dos características mencionadas.

El *precio* de los activos no es otra cosa que la *valoración* que el mercado hace de los derechos implícitos en los mismos. Dicho precio, además, varía en el tiempo.

El papel de los mercados financieros es doble:

- Facilitar, en su papel de *Intermediario*, el encuentro entre agentes inversores deseosos de asumir derechos (activos) y agentes emisores deseosos de asumir obligaciones (pasivos).
- A menudo, el activo que desean comprar los prestadores no coincide con el activo (pasivo para ellos) que desean vender los tomadores. Es entonces cuando el Banco lleva a cabo su papel de *Completador de los Mercados*, en el sentido de que compra al tomador el activo que desea vender y vende al prestador el activo que desea comprar. De esta manera, cuando el Banco actúa como Completador asume en su balance dos posiciones, una de activo y otra de pasivo, que no se inmunizan ni en términos de precio, ni en términos de riesgo (sensibilidad de éste ante variaciones de las condiciones del mercado).

Por tanto el Banco debe tener capacidad para:

- Calcular adecuadamente el precio (*Pricing*) de cada uno de los activos de su balance.
- Analizar las variables de mercado que determinan las variaciones del precio de los activos, así como las magnitudes de dichas variaciones ante variaciones de las variables de mercado (*Sensibilidades=Riesgo*).
- Teniendo en cuenta las sensibilidades del precio de los activos de su balance y las sensibilidades de los instrumentos de mercado en los que puede operar, construir la cartera de instrumentos de mercado (*Cobertura*) que le permita transformar el perfil de riesgo de su balance en otro perfil que se adecúe a sus expectativas sobre el valor futuro de las variables de mercado y a la magnitud del riesgo (*Límites*) que está dispuesto a asumir.
- Medir la pérdida en que incurriría por el hecho de que para cualquiera de los activos que tiene en su balance, se produzca un incumplimiento de sus obligaciones de pago por parte de los “tomadores” de cada uno de esos activos (*Riesgo de Crédito*).

- Medir la pérdida en que incurriría por la ocurrencia de eventos ajenos a las variables financieras propias de los instrumentos que maneja (*Riesgo Operacional*).
- Calcular el capital requerido (*Recursos Propios*) para, dados los riesgos anteriormente medidos, garantizar la propia solvencia y, por tanto, el propio *Rating* (*Capital Económico*).
- Hacer una adecuada *Selección de Carteras*. El Banco puede tomar posiciones de riesgo que no tengan nada que ver con los ya existente en su balance. Para ello debe seleccionar la cartera de instrumentos que, dada la distribución de movimientos estocásticos futuros de las variables de mercado, represente un mejor trade off entre rendimiento esperado y riesgo asumido.

Los Activos Financieros

Una vez que hemos descrito el ámbito genérico de actuación de un Banco en lo referente a cualquier activo existente, o con posibilidad de existir, en su balance, vamos a hacer una breve descripción de los activos financieros más frecuentes con los que se encuentra.

a) *Préstamos sin Riesgo de Contrapartida*. Otorga el derecho a recibir en una fecha futura conocida un flujo de importe y divisa ciertos. Este derecho se ostenta contra una contrapartida de cumplimiento seguro. Hay pues seguridad de que el agente al que corresponden las obligaciones de pago, por ejemplo el *Tesoro*, las cumplirá en las fechas fijadas.

El precio de este activo depende del *Tipo de Interés sin Riesgo* que el mercado cotiza para depósitos de crédito sin riesgo, en la divisa asociada al préstamo y para cada vencimiento futuro. En definitiva, es la *Curva de Tipos de Interés sin Riesgo* la que determina el precio de este activo y su riesgo.

b) *Préstamos con Riesgo de Contrapartida*. Otorga el derecho a recibir un flujo futuro de importe y divisa ciertos y en una fecha futura conocida. En contraposición con el anterior, este derecho se ostenta contra una contrapartida (agente que ha asumido las obligaciones) de cumplimiento no seguro (*Corporate = Riesgo de Crédito*).

El precio de este activo depende igualmente de la *Curva de Tipos de Interés sin Riesgo* y de la *Curva de Probabilidades de Quiebra* que el mercado cotiza para la contrapartida del préstamo para cada vencimiento futuro.

c) *Compra de Activo Spot*. Otorga el derecho a recibir en el momento de negociación una unidad de un activo a cambio de un número de unidades (*Precio*) de otro activo (*Numerario o Divisa*).

El precio lo fija directamente el mercado al cotizar este activo en el mercado Spot. En general, el precio Spot lo determina el mercado como aquel que iguala la oferta y la demanda del activo en cuestión.

d) *Compra de Activo Forward*. Otorga el derecho a recibir, en un momento futuro fijado en el momento de contratación, una unidad de un activo a cambio de un número de unidades (*Precio*) de otro activo (*Numerario o Divisa*).

Dependiendo del mercado de que ese trate, a veces este precio se forma como resultado de la oferta y demanda. Otras veces, es el resultado de la valoración de un activo derivado que depende del activo spot y de las curvas de tipos de interés.

e) *Activos Derivados*. Son activos cuyos flujos se pagan en fechas futuras. El contrato puede establecer algunas fechas de pago e importes fijados y, también, puede especificar otras fechas de pago e importes, dependientes de la evolución futura de otros activos que denominamos *Activos Subyacentes*.

Su precio depende de la forma en que supongamos que va a evolucionar el precio futuro de los Activos Subyacentes (*Proceso estocástico*) y de la forma, definida en el contrato, en que esta evolución futura determine las fechas y flujos del activo derivado.

El Banco debe disponer de la capacidad de calcular el precio (*Pricing*) del activo derivado en términos de la evolución futura que se asuma para los precios de los activos subyacentes. Además, el Banco debe disponer de la capacidad de medir el riesgo que representa el impacto que tienen en el precio del activo derivado los posibles movimientos de los activos subyacentes, sean éstos tipos de interés, probabilidades de quiebra o precios spot de otros activos.

Para cualquier tipo de activo el Banco debe ser capaz de calcular la cantidad de recursos propios necesaria para cubrir las pérdidas potenciales correspondientes a un cierto nivel de confianza (*Capital Económico*) coherente con el rating propio. Esta capacidad de cálculo permitirá al Banco cumplir con las directivas de control establecidas por el Comité de Basilea II sin tener que dotar los recursos propios asociados al capital regulatorio, que es mayor, y además, beneficiarse de la diversificación inherente a las posiciones del balance del Banco.

De la descripción que se ha hecho de los activos financieros más frecuentes es fácil percibir que hay dos capítulos en los que el papel de las matemáticas es relevante: el cálculo del valor de los activos y la medida del riesgo que la tenencia de éstos representa.

La organización en Áreas de un Banco

A continuación haré una breve descripción de las Áreas de un Banco con responsabilidad sobre cada una de las funciones descritas anteriormente. Aunque cada Banco puede tener una organización distinta, la que voy a hacer, sin ser definitiva, puede considerarse suficientemente representativa.

a.- *Canales de Distribución*

Son las Áreas del Banco encargadas de detectar necesidades de inversión o financiación de los agentes económicos. En consecuencia, estas áreas ofrecen productos (activos) que permiten satisfacer esas necesidades, ya sea haciendo de intermediarios, ya sea asumiendo la operación en su propio balance.

Existen distintas áreas con esta responsabilidad, dependiendo del tipo de cliente al que se dirigen:

- La Red de Oficinas. Está dedicada al cliente pequeño, ya sea éste particular o empresa.
- El área de Mercados. Está dedicada a clientes más grandes: empresas, instituciones financieras, compañías de seguros, gestoras de fondos, etc.
- Las Áreas de Originación y Mercado de Capitales. Se dedican a satisfacer las necesidades de emisión en mercados primarios.

b.- Áreas de asunción y gestión de riesgos

- *Mercados Globales y Distribución:*
 - Toma y gestiona posiciones de riesgo por cuenta propia o ajena.
 - Distribuye activos negociados en los mercados financieros directamente a clientes grandes, a la red del Banco, a Originación, a la Dirección Financiera.
 - Gestiona el riesgo asociado según la naturaleza del mismo: Mesa de Riesgo de FX y Tipos de Interés, Mesa de Riesgo de Renta Variable, Mesa de Riesgo de Crédito, Mesa de Nuevos Productos.

La Mesa de Nuevos Productos gestiona el riesgo de cualquier subyacente cuando éste se da en productos cuya complejidad exige el empleo de métodos matemáticos o de herramientas internas desarrollados por personas del departamento con alta cualificación cuantitativa y matemático-financiera.

La Mesa de Nuevos Productos desempeña tres funciones relacionadas con estos productos de alto contenido matemático, las cuales se corresponden con tres grupos de profesionales:

- *Estructuración.* Desarrollan ideas de Producto Nuevo que se adapta a las necesidades de los clientes.
 - *Desarrollo.* Resueltos los problemas matemáticos y financieros de valoración y medición del riesgo, desarrollan las herramientas que permiten utilizar las soluciones obtenidas en el pricing y gestión de las operaciones.
 - *Trading.* Empleando las herramientas desarrolladas por el grupo de desarrollo, llevan a cabo las cotizaciones y gestión del riesgo de los productos planteados por el grupo de estructuración.
- *Dirección Financiera*

Gestiona de forma global el riesgo financiero existente en el balance del Banco por operativa de las distintas Áreas del mismo.

c.- Áreas de Control de Riesgos

- *Departamentos de Control del Riesgo de Crédito.* Establecen los límites de riesgo de crédito que el Banco está dispuesto a asumir con cada cliente. Empleando herramientas matemático-financieras monitorizan el consumo que de esos límites hace cada operación particular, controlando el cumplimiento de los mismos.
- *Departamentos de Control del Riesgo de Mercado.* Establecen límites de riesgo de mercado que el Banco está dispuesto a asumir en cada Área de Negocio. Empleando herramientas matemático-financieras monitorizan el consumo que de esos límites hace cada operación particular, controlando el cumplimiento de los mismos.
- *Departamentos de Control del Riesgo Operacional.* Llevan a cabo mediciones del riesgo asumido por la ocurrencia de contingencias no financieras asociadas a la actividad del Banco.
- *Departamentos de Control de Metodologías.* Analizan la idoneidad de los modelos matemático-financieros y herramientas asociadas empleados en las distintas Áreas de Negocio, en la actividad de cotización y gestión del riesgo. También analizan los modelos y herramientas empleadas por las distintas Áreas de Control del Riesgo en la medición de los distintos riesgos asumidos por el Banco.
- *Departamentos de Control de Resultados.* Certifican la cuenta de resultados generada por cada Área de Negocio del Banco empleando las correspondientes herramientas matemático-financieras. También generan los resultados contables del Banco.

Modelización matemática. Herramientas matemáticas empleadas

Las variables que se manejan en los mercados financieros se podrían descomponer, de forma muy simplificada, en tres:

1. *Variables económicas micro o macro*

Son variables relevantes para la marcha presente o futura de una economía, por lo que sus previsiones son fundamentales a la hora de tomar decisiones financieras o de política económica. Aquí entran variables de consumo, producción, crecimiento, productividad, desempleo, etc. El valor de estas variables es el resultado del conjunto de decisiones económicas de todos los agentes.

La Teoría Económica es la rama de la economía que haciendo uso de las matemáticas desarrolla modelos sobre el comportamiento interrelacionado de esas variables. Utilizando los datos del pasado y la *Econometría* se estiman los parámetros de estos modelos. Luego, el modelo ya estimado se utiliza para hacer inferencia sobre el comportamiento futuro de estas

variables o para hacer *contrastes de hipótesis* sobre los valores de los parámetros.

2. Precios de activos subyacentes

Los activos subyacentes son activos cuyo precio es sólo el resultado de la interacción entre la oferta y demanda, sin que exista ningún otro activo del que el precio de éstos dependa de forma cierta. El precio de estos activos se puede modelizar en términos de los precios de otros activos o de variables económicas: *Análisis econométrico-fundamental*, *Análisis de Series Temporales*. Ahora bien, no existe forma de inferir valores ciertos para los parámetros de los modelos. Por ello, para estimarlos en función de comportamientos pasados de nuevo se debe recurrir a técnicas *econométricas*.

3. Precios de activos derivados

Son activos cuyos flujos futuros se definen contractualmente como función cierta del comportamiento futuro del precio de otros activos que llamamos subyacentes del derivado. La elección de los activos subyacentes y la definición de esa función son los que caracterizan al activo derivado considerado.

Uno de los activos derivados más populares y sencillo es, por ejemplo, una *Call de Strike* 15.00 y vencimiento 1 año sobre la acción de Telefónica. Este activo pagará dentro de un año la diferencia entre el precio de Telefónica en ese momento y el Strike si ésta es positiva y cero en caso contrario. En este caso la acción de Telefónica sería el activo subyacente. Se pueden definir activos derivados que pagan flujos en varias fechas futuras, de forma que tanto éstas como los importes de los respectivos flujos dependan de forma tan compleja como se quiera del valor de varios activos subyacentes en momentos futuros dados o de toda la evolución de estos valores.

La *Teoría de Valoración Financiera* es la disciplina de las finanzas que intenta explicar y modelizar el precio de los activos financieros. En particular, en lo que respecta a los activos derivados, definido el contrato que fija fechas y flujos a pagar por el derivado en función de los subyacentes en una fecha futura, la Teoría de Valoración Financiera intenta hallar una expresión que permita determinar el precio actual del derivado en función del precio actual de los subyacentes y de variables actuales de mercado que definen la evolución estocástica esperada por el mercado para esos subyacentes. De alguna forma se trata de determinar cuánto valen ahora unos derechos contingentes al valor que tengan los activos subyacentes en el instante del vencimiento del derivado o a la evolución del precio de los activos subyacentes desde el momento de contratación hasta el vencimiento.

Modelización matemática del cálculo del precio y riesgos de un activo derivado

Voy a intentar explicar de forma esquemática los problemas matemáticos que aparecen en el cálculo del precio de un activo derivado y de los parámetros que determinan las variaciones de éste (Riesgo). Por simplicidad, en algunos momentos nos referiremos al ejemplo de la call de telefónica.

Sea t el momento actual, $T_j, j = 1, \dots, m$, y T cualesquiera momentos futuros, $P(t)$ el precio del activo derivado en t , $F(T)$ el flujo pagado por el derivado en T , y $R_i(T_j), i = 1, \dots, n$, el precio en el instante T_j del activo subyacente i -ésimo. La relación contractual define el flujo que le corresponderá al activo derivado en fechas futuras, en función de los precios de los activos subyacentes en ese y/o en instantes anteriores:

$$F(T) = f(R_1(T_1), \dots, R_1(T_m), \dots, R_n(T_1), \dots, R_n(T_m)). \quad (1)$$

A partir de esta relación contractual definida en el instante futuro T , se tiene que obtener una expresión para el precio actual del activo derivado de la forma:

$$P(t) = g(R_1(t), \dots, R_n(t); B_1, \dots, B_q), \quad (2)$$

donde g es la función precio, que depende de los precios actuales de los activos subyacentes y de un conjunto $B = (B_1, \dots, B_q)$ de parámetros que se cotizan en el mercado y que definen la distribución esperada de los precios futuros de los subyacentes. Un ejemplo de estos parámetros es el Tipo de Interés sin Riesgo.

Notemos que también hay que hallar expresiones para la sensibilidad (*Riesgo*) del precio del derivado respecto de los precios y parámetros de los que depende:

$$\frac{\partial P(t)}{\partial R_i}, \quad \frac{\partial P(t)}{\partial B_i}. \quad (3)$$

Para resolver este problema tenemos que empezar “calculando” la evolución de los precios $R_i(t)$ de los activos subyacentes. Es frecuente asumir que la evolución de esos precios sigue un modelo de comportamiento estocástico definido por una distribución lognormal del tipo:

$$\frac{dR_i(t)}{R_i(t)} = \mu(R_1(t), \dots, R_n(t); B; t)dt + \Sigma(R_1(t), \dots, R_n(t); B; t)dw, \quad (4)$$

donde (μ, Σ) definen la tendencia y volatilidad de esa distribución, que dependen de las variables de mercado $(R_1(t), \dots, R_n(t))$ y de los parámetros cotizados B , y w es un proceso de Wiener de dimensión uno o superior.

Dado que los precios de los activos subyacentes se modelizan como procesos estocásticos, es obvio que la Teoría de Valoración Financiera usará de forma sistemática la *Estadística* y el *Cálculo Estocástico* (que extiende a procesos estocásticos el estudio que el Análisis Matemático hace para las funciones determinísticas).

Aplicando el *Lema de Ito*, integrando las anteriores ecuaciones diferenciales estocásticas, podemos llegar a expresiones que nos definan el valor futuro de los activos subyacentes como variables aleatorias. En el caso más sencillo, cuando sólo hay un activo subyacente, ésta expresión es de la forma:

$$R(T) = R(t)e^{(\mu-0,5\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\epsilon}, \quad (5)$$

donde ϵ es una variable aleatoria con distribución normal estándar.

Una vez que tenemos una expresión como la (5) que representa el valor futuro de los activos subyacentes, tenemos que obtener g y sus derivadas. Aquí de nuevo se utiliza la Teoría de Valoración Financiera que haciendo uso de determinados “axiomas” financieros, como por ejemplo la ausencia de arbitraje, y empleando técnicas de Estadística, Cálculo Estocástico o Análisis Matemático, llega a teoremas que permiten expresar el precio del activo derivado en términos del de los activos subyacentes. Para esto hay varias alternativas, que en el caso más simple son:

1.

$$\frac{P(t)}{N(t)} = E^N \left(\frac{P(T)}{N(T)} \right).$$

2.

$$rR \frac{\partial P}{\partial R} + 0,5\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{\partial P}{\partial T} - rP = 0,$$

$$P(T) = f(R(T)).$$

3.

$$P(t) = \frac{e^{-\gamma x}}{\pi} \int_0^\infty e^{-i\gamma u} \psi(u) du,$$

$$x = \ln(R).$$

En la primera, el precio del derivado se expresa como un valor esperado dependiente del valor futuro de los activos subyacentes y de otro activo N que llamamos *Numerario*, y que se puede elegir arbitrariamente (el numerario es el activo en unidades del cual se expresan los precios). Sin embargo, esta elección de numerario determina la medida de probabilidad (*Cambios de medida*) bajo la cual ha de calcularse esa esperanza. Para calcular esa esperanza habitualmente se emplean técnicas de *Análisis Numérico*, como técnicas de *integración numérica*, *simulaciones de montecarlo*, etc.

En la segunda, el precio del derivado se expresa como solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales que puede tener tantas variables como subyacentes. r es el tipo de interés sin riesgo. Para resolver esta ecuación se emplean técnicas numéricas como *diferencias finitas*, *elementos finitos*, etc.

En la tercera el precio del derivado se expresa como una transformada dependiente de la función ψ , que a su vez depende de la función característica

del logaritmo del precio de los activos subyacentes. Para resolverla se emplean técnicas como la *transformada rápida de Fourier*, etc.

Notemos que las expresiones anteriores están escritas para el caso más simple en el que sólo hay un activo subyacente y un parámetro que cotiza en el mercado.

Para cualquier método debemos extraer tanto el valor del precio $P(t)$ del activo derivado como sus derivadas respecto del precio de los activos subyacentes o respecto de los parámetros de mercado.

Todos los métodos numéricos empleados presentan dos problemas relevantes: el tiempo de cálculo y la estabilidad de los resultados. Estos dos aspectos hacen que tanto el método numérico como su implementación tengan que ser fruto de un análisis matemático-numérico de alta complejidad.

Para el caso del ejemplo anterior de la call sobre telefónica, la solución al problema planteado, en el caso más sencillo, que representa el precio de la call en términos del Strike, K , del tipo de interés sin riesgo, r , y de la volatilidad de telefónica, σ , es:

$$P(t) = R(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{R(t)}{K}\right) + (r + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

A continuación voy a mencionar otras técnicas matemáticas empleadas en finanzas:

Para resolver el problema de valoración anterior a menudo se emplean *árboles de programación dinámica*.

Muchas veces, los parámetros B que definen la evolución futura de los activos subyacentes no son directamente observables en el mercado, sino que son la solución de problemas de optimización que buscan el valor de esos parámetros que mejor ajustan el valor teórico de ciertos activos a su valor de mercado. Las técnicas de solución de *problemas de optimización* también son, por tanto, ampliamente utilizadas.

En determinadas ocasiones, el precio de un activo, o cartera de activos, depende de un número de variables de mercado demasiado grande como para asumir los problemas de multidimensionalidad consecuentes. En estos casos se suele acudir a la búsqueda de un número reducido de combinaciones lineales del espacio total de variables de mercado con el que se puede explicar en una proporción aceptable el movimiento de todas ellas. Esto lo hace lo que se denomina *Análisis de Componentes Principales*.

A veces, nuestro objetivo es calcular la asignación de recursos propios (*Capital Económico*) que ha de hacerse para que el Banco pueda asumir el riesgo del derivado. En este caso no buscamos el valor presente del precio como valor esperado de su precio futuro, sino que necesitamos calcular un percentil mucho

más extremo (99 por ejemplo) de su valor futuro. Los problemas numéricos y de tiempo de cálculo que ya existían para calcular el valor esperado se agudizan enormemente a la hora de calcular un percentil extremo.

A menudo en finanzas se intenta resolver el problema de elegir un conjunto de activos (*Selección de carteras*) de forma que dada la distribución conjunta del precio futuro de todos ellos, la cartera obtenida tenga el mayor rendimiento esperado posible con el mínimo riesgo. Se trata de nuevo de un problema cuya solución exige el empleo de técnicas complejas de optimización con restricciones de todo tipo.

En la evolución del precio de los activos subyacentes, a veces es conveniente añadir procesos de salto (por ejemplo Poisson) que reflejen el hecho de que el precio de los activos no siempre se mueve de forma continua. Esto hace que las técnicas de cálculo estocástico empleadas hayan de ser más complejas.

Para analizar el riesgo de crédito del activo derivado o de cualquier otro, hay que modelizar el comportamiento de la calidad crediticia futura de la contrapartida del Banco. En modelos sencillos, el evento de quiebra de la contrapartida se modeliza mediante un proceso de Poisson de intensidad variable o incluso estocástica.

La resolución de todos los problemas matemáticos que acabo de mencionar trae consigo problemas tecnológicos, problemas informáticos, de alto nivel. Así, la rapidez con que surgen nuevos productos, casi diaria, y la velocidad con que evolucionan los métodos empleados en su valoración y gestión hace que los desarrollos informáticos empleados tengan que tener un diseño lógico que les permita una evolución y escalabilidad rápida y robusta, y que funcionen en arquitecturas informáticas modernas y eficientes. De lo contrario, cualquier deficiencia o retraso en los desarrollos se traducen en malas gestiones y por tanto en pérdidas de dinero o de oportunidades de negocio inmediatas. Esto hace que los desarrollos informáticos se hagan en lenguajes orientados a objetos y estén dotados de gran complejidad de diseño lógico.

Además se debe elegir una arquitectura informática que a menudo exige desarrollos tecnológicos que garanticen la eficiencia de la ejecución tanto en términos de tiempo de cálculo como en términos de accesibilidad por parte de los usuarios: desarrollo de clusters (procesamiento paralelo), desarrollo en arquitecturas web, etc.

Todo esto hace que la capacidad de desarrollo informático y el conocimiento de alto nivel de arquitecturas sean conocimientos también de alto valor añadido.

Mi experiencia personal

Para terminar haré una breve descripción de mi experiencia personal, esperando que este apartado sirva para mostrar la aportación que un profesional de las matemáticas en sentido amplio puede hacer en el análisis y solución de los problemas de Banca, de Finanzas, descritos.

La aportación que se espera de un matemático en Finanzas viene tanto de su capacidad de uso de las técnicas matemáticas necesarias como de su forma

de enfocar los problemas y buscar sus soluciones desde una perspectiva científica, rigurosa y práctica.

Yo estudié matemáticas en la Universidad de Zaragoza y cuando terminé quise enfocar mi carrera hacia ámbitos profesionales en los que las matemáticas fueran no un fin sino un medio, que fueran la herramienta empleada en la solución de problemas prácticos.

Al terminar mis estudios, de forma casual me enteré de que en el Banco de España se iniciaba un programa de postgrado ,llamado Centro de Estudios Monetarios y Financieros (CEMFI), en el que se quería formar profesionales economistas claramente orientados al sistema bancario y con una formación de alto nivel científico y cuantitativo.

Terminada esa formación de dos años, me incorporé en BBV como trader de Volatilidad de FX. Mi responsabilidad era negociar opciones en divisas y gestionar el riesgo asociado. Fue en ese momento cuando por primera vez me enfrenté a la aplicación práctica de los métodos de valoración financiera más sencillos. Puedo decir que en toda mi carrera profesional, y en esos momentos iniciales también, mi mentalidad matemática a la hora de abordar los problemas ha sido de gran utilidad.

Tras ocho años haciendo trading de derivados en distintos Bancos, decidí dar un giro a mi carrera y orientarme de forma más enfocada hacia la solución de problemas de valoración. Es entonces cuando me incorporé al Banco Santander como lo que ahora llamaríamos un *Quant*. Los quants son los profesionales responsables de resolver los problemas de valoración de productos empleando las últimas técnicas, tanto matemáticas como financieras, de valoración financiera. En aquel momento solamente éramos tres las personas haciendo ese trabajo.

Aun siendo matemático y teniendo adquiridos altos conocimientos de finanzas y valoración, puedo decir que dar el paso para ser quant me exigió largas horas de estudio e investigación de técnicas matemático financieras ya existentes pero no siempre fácilmente inteligibles y desde luego no siempre aplicadas a las finanzas. La forma en que las matemáticas son empleadas en finanzas en general, y en la valoración de derivados en particular, es algo que evoluciona de forma rápida y profunda y, por tanto, exige estar de forma constante estudiando, investigando y al tanto de investigaciones ajenas. Hay que notar que el fin último siempre el diseño de una herramienta perfectamente implementable que en tiempos asumibles calcule los precios y los riesgos con la estabilidad numérica necesaria. A esto se añade el problema de encontrar una cobertura adecuada y no siempre fácilmente construible para el derivado en términos de activos negociables en el mercado.

Actualmente soy responsable de un equipo de veintisiete personas que en BBVA tiene la responsabilidad de llevar a cabo las tres ramas de actividad que afectan a los nuevos productos. Nuestro departamento se llama Departamento de Nuevos Productos y es uno de los cuatro departamentos de negociación que existen en el Área de Mercados Globales y Distribución de BBVA. Los otros son el de Renta Variable, el de Crédito y el de Tipos de Cambio y Tipos de Interés. Los Nuevos Productos en finanzas se han consolidado como un activo propio cuyas especificidades de manejo y gestión hacen que las herramientas,

cualidades y funciones asociadas hayan de ser altamente especializadas. El ritmo de crecimiento del departamento y los perfiles contratados en esta etapa de cerca de siete años son buena prueba de ello.

Como he comentado antes, el Departamento de Nuevos Productos está dividido en Estructuración, Desarrollo y Trading. Especialmente en la parte de desarrollo, las trece personas que lo componen son profesionales de las matemáticas. Bien es cierto, que muchos de ellos proceden de ingenierías con alta orientación matemática. Esto es así porque una de las habilidades absolutamente fundamentales es la orientación práctica que ha de mantenerse siempre, incluso cuando se está investigando el problema matemático más teórico.

En nuestro departamento estamos en contacto permanente con las Facultades y Escuelas de mayor orientación matemática, a fin de poder captar los estudiantes de fin de carrera o investigadores que teniendo los mejores expedientes tienen un perfil adaptable al entorno profesional que he descrito. No es infrecuente para nosotros contratar personas sin ninguna experiencia financiera, pero que sí tienen una alta experiencia en la solución de problemas matemáticos similares que aparecen en otros ámbitos de la industria, como el diseño de componentes aeronáuticos, etc.

En definitiva, el valor de las matemáticas en Finanzas es actualmente muy alto y, sin duda, creciente dado el ritmo de progreso que experimentan los mercados financieros. El espacio en los mercados financieros para los Profesionales de las Matemáticas no hará sino aumentar.

Bibliografía básica

M. Baxter, A. Rennie, *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).

J.C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives, (5th edition)*, Prentice Hall International Editions (2003).

P. Willmott, J. Dewinne and S. Howison, *Derivatives*, Oxford Financial Press (1993).

John von Neumann: de la matemática pura a la matemática aplicada

J. I. DÍAZ

Universidad Complutense de Madrid

1 Introducción.

La figura excepcional de John von Neumann (1903-1957) ha sido continuamente evocada como ejemplo de numerosas actitudes científicas. Dependiendo de la persona que acude a su biografía cabe ver en él a uno de los matemáticos puros más precoces y profundos de la historia o bien al matemático cuyos intereses científicos no se limitaron a un pequeño campo, cuya curiosidad parecía no tener límites y cuya creatividad le llevó a construir los fundamentos de orientaciones científicas insospechadas antes de su participación. Se puede acudir a su obra también para ilustrar cómo la compleja dialéctica entre ciencia pura y ciencia aplicada, algo que obviamente no se limita al campo de las matemáticas, no tiene por qué enfocarse en términos de confrontación si no de colaboración, consenso y compatibilidad. Curiosamente, figuras como la suya, la de su contemporáneo N. Wiener y tantos otros precedentes de la talla de, por ejemplo, L. Euler, son reivindicados, antagónicamente, por los defensores más radicales de la matemática pura y de la aplicada.

Hace tan sólo un par de años que las comunidades científicas de numerosos países rindieron homenaje a su memoria con motivo del centenario de su nacimiento¹. Estas líneas tan sólo pretenden mantener vivo su ejemplo como científico interdisciplinar.

Ilustrar la figura y la obra de un matemático tan excepcionalmente brillante como John von Neumann, no debería ser una tarea ardua, especialmente después de que su obra haya sido casi íntegramente recogida en una serie de volúmenes (Taub [91]²) y que su persona y sus líneas de investigación hayan sido glosadas por distinguidos especialistas (véase por ejemplo el número especial del *Bulletin*

¹Véase la web http://www.neumann-centenarium.hu/index_en.html. En nuestro país, la Real Academia de Ciencias organizó un ciclo de conferencias a ese respecto cuyos textos aparecieron publicados en la revista *Arbor* (López Pellicer [42]).

²Véase también la recopilación de sus trabajos sobre Computación hecha por Aspray y Burks [4]. Un listado de las publicaciones de von Neumann puede verse en Aspray [3] (véase también la web <http://www.info.omikk.bme.hu/tudomany/neumann/javnbibl.htm>). Al igual que en dicho texto, se indica al final de cada referencia de von Neumann la recopilación en la que aparece recogida: [T] se refiere a Taub [91] y [AB] a Aspray y Burks [4].

of the American Mathematical Society, Ulam [93] o el volumen sobre su legado Glimm *et al.* [25].

La dificultad de esa tarea, sin embargo, es más que obvia si se matiza que los volúmenes antes mencionados son seis, con una media de más de 700 páginas cada uno y que sus títulos, aludiendo a los principales campos cultivados por él, involucran áreas tan dispares como las siguientes:

Volumen 1: Lógica, Teoría de Conjuntos y Mecánica Cuántica.

Volumen 2: Operadores, Teoría Ergódica y Funciones casi-periódicas.

Volumen 3: Anillos de Operadores.

Volumen 4: Geometría Continua y Estadística.

Volumen 5: Diseño de Computadoras, Teoría de Automatas y Análisis Numérico.

Volumen 6: Teoría de Juegos, Astrofísica, Hidrodinámica y Meteorología.

La importante huella de von Neumann en la ciencia actual ha sido analizada en las múltiples biografías escritas por sus discípulos y contemporáneos (Ulam [94], Halmos [31] y Dieudonné [21])³, algunas de ellas plasmadas en libros analizando su obra (Goldstine [26], Ulam [94], Heims [32], Aspray [3], Poundstone [89], Brody y Vamos [9] e Israel y Millán-Gasca [34]), siendo también digno de señalar el libro escrito por su hermano Vonneuman [96].

Ilustrar con detalle su gigantesca figura escapa claramente de las posibilidades de esta exposición. Nos limitaremos a una mera incursión en esa tarea, tomando sólo un aspecto parcial para describir el trascendental papel de von Neumann como uno de los creadores de una amplia disciplina que hoy se conoce bajo distintos nombres: *Le Calcul Scientifique*, *Scientific Computing* y que en castellano podríamos denominar el *Cálculo Científico*.

En lo que sigue, abordaré primeramente su vida familiar y profesional (Sección 2), haremos una rápida alusión a sus investigaciones en Matemática Pura, Teoría de Juegos y Mecánica Cuántica (Sección 3) para centrarnos más tarde en su visión del Cálculo Científico y su aplicación a Meteorología (Sección 4).



Figura 1: John von Neumann (1903-1957)

2 Su vida familiar y profesional.

John von Neumann nació en Budapest (Hungría) el 28 de diciembre de 1903 en el seno de una familia acomodada de origen judío. Su padre, Max, era banquero. Su madre, Margaret, representó para él un apoyo fundamental muriendo sólo unos meses antes que él. Era el menor de tres hermanos y quizás por esto le gustaba ser denominado por el diminutivo de su nombre de pila (Jansci, derivado de János y más tarde Johnny, desde que occidentalizó su nombre sustituyéndolo por John). En

³Véase también la web http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Von_Neumann.html

1913 su padre adquirió el título nobiliario de margittai, siendo denominado desde entonces como Margittai Max Neumann. Hacia 1921 su hijo János firma durante su estancia en Alemania como Johann Neumann von Margitta y años más tarde adopta el nombre definitivo de John von Neumann. Es de notar que no todos sus hermanos siguieron su ejemplo y así su hermano Nicholas cuando se afincó en Estados Unidos varió su apellido original al de Vonneuman.

El alto nivel económico de su familia permitía que su educación familiar estuviese auxiliada por institutrices francesas y alemanas, lo que quizás pudo influir en su pasión y facilidad para los idiomas. Son numerosas las leyendas que se pueden encontrar en sus biografías sobre su precocidad, su memoria excepcional y su rapidez de cálculo mental y escrito. Se dice de él, a título de ejemplo, que a los doce años ya había leído la *Théorie des Fonctions* de E. Borel.

Entre 1911 y 1921 asistió al Gymnasium Luterano de Budapest en el que coincidió con otra mente privilegiada: E. Wigner⁴, Premio Nobel de Física de 1963 y con el que mantendría una estrecha amistad y colaboración científica hasta el final de sus días. Durante este periodo, debido a su excepcionales dotes para las ciencias, le fue asignado un tutor, el joven matemático M. Fekete. Juntos ([23]) mejoraron resultados de uno de los matemáticos húngaros de mayor renombre: L. Fejér.

Al finalizar sus estudios secundarios se planteó en la familia un gran interrogante sobre el futuro profesional de Jansci: banquero (como su padre), o matemático (como él anhelaba). Su padre pidió consejo a Th. von Karmán⁵, amigo distinguido de la familia, quien propuso una solución alternativa: químico. De esta manera comenzaron sus estudios universitarios que llevaría a cabo en tres países distintos: Ciencias Químicas en Berlín, de 1921 a 1923 (donde siguió cursos de A. Einstein y E. Schmidt), Ingeniería Química en Zurich, entre 1923 y 1925 (asistiendo a las clases de Weyl, Pólya y Schrödinger) y doctorándose en Matemáticas en 1926 por la Universidad de Budapest (donde, de hecho, estuvo matriculado oficialmente en esos años universitarios, superando los exámenes durante los veranos).

Su primer artículo de matemáticas, escrito a los 18 años, lo constituyó el trabajo antes citado con Fekete [23]. En su producción científica pueden distinguirse dos periodos de separación difícilmente nítida. El periodo europeo se puede situar entre 1921 y 1930. Tras su doctorado, obtiene una *Beca Rockefeller* para el curso 1926/27 desplazándose a la Universidad de Göttingen (Alemania) para trabajar con D. Hilbert (a quien luego visitaría en Heidelberg) y donde coincidiría también con el físico J. R. Oppenheimer. Posteriormente, entre 1927 y 1929 obtuvo la plaza de *Privatdozent* en Berlín⁶, realizando numerosos viajes

⁴Quien a diferencia de von Neumann tuvo una larga vida, falleciendo en enero de 1996.

⁵Ambos científicos coincidirían más tarde en Estados Unidos y en particular como asesores, junto a otros colegas suyos, del Proyecto Manhattan que con sede central en Los Alamos tuvo como objetivo producir la primera bomba atómica norteamericana. La explosión experimental tuvo lugar el 16 de Julio de 1945. El director del proyecto fue J. R. Oppenheimer con quien von Neumann también coincidió en sus años de juventud en Europa.

⁶El más joven de la historia de la Universidad de Berlin.

en tren a Göttingen, y, finalmente, en el curso 1929/1930 ocupó el cargo de *Privatdozent* esta vez en la Universidad de Hamburgo.

Una etapa distinta se refiere al resto de sus años en Estados Unidos. Su primera invitación a visitar este país se produjo en 1930 donde fue invitado por el geómetra O. Veblen a visitar la Universidad de Princeton. Antes de realizar este viaje, en diciembre de 1929, se casó con Marietta Kövesi⁷.

Entre 1930 y 1933 fue contratado como Profesor Visitante en la Universidad de Princeton simultaneando este nombramiento con la condición de Profesor de la Universidad de Berlín hasta la llegada del partido nazi al poder en 1933.

En 1933 se crea en Princeton el Institut for Advanced Study (IAS), institución sin docencia regular independiente de la Universidad. Los seis profesores iniciales del IAS fueron los siguientes: J.W. Alexander, A. Einstein, M. Morse, O. Veblen, H. Weyl y J. von Neumann, que con apenas 29 años era el más joven de todos⁸.

Su adscripción al IAS perduraría hasta su muerte en 1957, sin embargo hay constancia de fallidos intentos para acomodarse en otros centros. Así, por ejemplo, en 1945, N. Wiener promovió sin éxito su nombramiento en el MIT de Massachusetts⁹. En Marzo de 1956, ya enfermo, aceptó una oferta de la UCLA (California) que él tomaba como una temprana jubilación y en cuyo contrato, que no llegó a disfrutar, se hacía alusión a un cuantioso seguro de vida y numerosas facilidades para su instalación.

Durante su vida profesional disfrutó de numerosos contratos de investigación para un elevado número de organismos oficiales, la mayor parte relacionados con Defensa, y que más tarde se tradujeron en nombramientos para desempeñar cargos de alta responsabilidad en dichos organismos. Entre estos centros se pueden citar al *Scientific Laboratory* de Los Alamos (New Mexico) entre 1943 y 1955, el *Ballistic Research Laboratory de Alberden* (1940--1957) y el centro de Silver Spring (1947-1955), ambos en Maryland y sus múltiples nombramientos en Washington: *Navy Bureau of Ordenance* (1941-1955), *Research and Development Board* (1948-1953), *Armed Forces* (1950-1955) y el que él más estimaba (pese a que acarrea incompatibilidades que se traducían en importantes mermas salariales): la *Atomic Energy Commission* (1954-1957).

En el capítulo de su vida familiar es también de señalar el nacimiento en 1935 de su única hija Marina (que más tarde sería Consejera para Asuntos

⁷Para llevar a cabo este matrimonio von Neumann se convertiría al catolicismo previamente.

⁸Una natural curiosidad surge en torno a la posible naturaleza de las relaciones científicas y amistosas de von Neumann con Einstein y sus otros colegas del IAS. Al parecer hubo un mutuo distanciamiento (sólo se conserva una foto en la que aparecen juntos y distantes) fruto de la divergencia evidente entre sus concepciones políticas. Parece que en junio de 1943 ambos llegaron a redactar una propuesta (con D. Taylor) para la US Navy sobre el llamado *Rainbow project* que, conectando la Mecánica Cuántica y la anhelada Teoría Unificada de Campos, pretendía hacer invisibles e ilocalizables a barcos y submarinos (http://www.aetherometry.com/unified_field/uft_einstein_rainbow.html)

⁹Las cambiantes relaciones entre estas dos monumentales figuras matemáticas del siglo XX fueron pormenorizadamente analizadas en Heims [32] (referencia que me fue aconsejada por Jesús Hernández, a quien le estoy muy agradecido).

Económicos del Presidente R. Nixon en 1972), el divorcio, en 1937, de Marietta¹⁰, su nacionalización como ciudadano norteamericano ese mismo año y su segundo matrimonio, en 1938, con Klára Dán¹¹.

La muerte le sobrevino el 8 de Febrero de 1957 tras más de dos años de una penosa enfermedad (cáncer de huesos) detectada en 1955 por motivo de una caída con rotura de clavícula. En Junio de 1956 los médicos le advirtieron de su grave enfermedad y le aconsejaron que intentara acabar los trabajos más importantes en curso. Fue entonces cuando culminó su libro *The computer and the brain*¹² ([78])¹³. Su última aparición en público data de febrero de 1956 cuando le fue entregada la *Medal of Freedom* por el Presidente Eisenhower. Aun después, celebró reuniones con Secretarios de Estado en el Hospital Walter Reed de Washington en el que estaba internado. Las personas que le visitaron mencionan sus sufrimientos, su declive físico, sus depresiones acrecentadas por la muerte, en 1956, de su madre (quien vivía con él desde su instalación definitiva en Estados Unidos en 1933) y un sinfín de otras anécdotas que protagonizaba hasta los últimos días de su vida (por ejemplo, cuando ya no podía leer se dedicaba a recitar de memoria largos versos de Goethe y otros autores clásicos). Los últimos años de su vida fueron de una fervorosa práctica religiosa.

John von Neumann recibió numerosos honores. Era miembro de las Academias de Lima, Roma, American Academy of Arts and Sciences, Milán, National Academy of Sciences y Amsterdam. Fue nombrado Doctor *Honoris Causa* por las Universidades de Princeton (1947), Pennsylvania y Harvard (1950) y Estambul y Maryland (1951). Entre los muchos premios recibidos son de resaltar algunos que llevaban los nombres de contemporáneos suyos (A. Einstein en 1956 y E. Fermi¹⁴ también en 1956). Fue Editor de *Annals of Mathematics* (de 1933 a 1957) y *Compositio Mathematica* (de 1935 a 1957), entre otras revistas. Fue también Presidente electo de la *American Mathematical Society* de 1951 a 1953. Entre los muchos reconocimientos póstumos destaca la célebre John von Neumann Lecture (premio anual de la sociedad americana SIAM que desde su instauración en 1957 ha recaído en matemáticos del prestigio de P. Lax, P. Henrici, J.L. Lions, J. Keller, S. Smale, R.T. Rockafellar y A. Majda, entre otros)¹⁵.

¹⁰Parece ser que Marietta le abandonó para casarse con el físico J.B. Kupper. Que en los documentos de su divorcio se indique que su hija Marina pasaría a estar bajo la custodia de von Neumann cuando ésta cumpliera los 12 años es altamente significativo.

¹¹Antigua novia de juventud, también divorciada y notable programadora de los primeros computadores. Con ella firmaría algunos informes restringidos (Calkin, Evans, Evans, von Neumann, K. y von Neumann, J. [11] y [12])

¹²Traducido al castellano por José Borrell.

¹³También apareció póstumamente su libro sobre *Continuous Geometry* [79].

¹⁴Con el que llegó a escribir un trabajo conjunto ([24]).

¹⁵Agradezco a Allison Bogardo (de los servicios administrativos de SIAM) por haberme facilitado la lista completa de todos los receptores de este premio desde su instauración y de la que sólo he extraído unos cuantos nombres significativos por razones obvias de extensión.

3 Investigaciones en Matemática Pura, Teoría de Juegos y Mecánica Cuántica.

Las contribuciones de von Neumann en los campos aludidos ocupan cuatro volúmenes de sus *Collected Works* (Taub [91]) con más de 4.000 páginas por lo que aquí nos limitaremos a unos comentarios muy breves. Una excelente y obligada referencia es el volumen, ya mencionado, del *Bulletin of the AMS* ([93]) en el que primeras figuras de esos campos analizan las profundas contribuciones de von Neumann.

Pero, ¿que valoración tenía el propio von Neumann de sus contribuciones? A buen seguro que su mentalidad fue cambiando a lo largo de su vida¹⁶. Un testimonio escrito sobre este tema se produjo en 1954 cuando la *National Academy* le pasó un cuestionario, con motivo de su elección como Académico, en el que tenía que indicar cuales habían sido sus tres principales contribuciones a la Matemática. Su respuesta fue: Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica, Teoría de Operadores y el Teorema Ergódico¹⁷. Como veremos, la necesidad imperiosa de reducir a tres los temas invocados le llevó a silenciar contribuciones que por sí solas merecen estar en la historia de las Matemáticas.

Una frase de la semblanza de von Neumann llevada a cabo por Dieudonné [21] me parece especialmente certera:

Poseía una habilidad excepcional para organizar y axiomatizar situaciones complejas que *a priori* no parecían encauzables a un tratamiento matemático.

Pero centrémonos en el tema de esta sección. Durante los primeros años de su producción científica, entre 1922 y 1930, bajo la poderosa influencia de David Hilbert, John von Neumann se ocupó de Lógica Matemática y de la Teoría de Conjuntos. Entre los muchos temas abordados figuran los siguientes: Los números ordinales (von Neumann [47], [48], von Neumann y Wigner [84]), Teoría de Conjuntos (sobre la que versó su tesis doctoral en la Universidad de Budapest ([49]) y que luego desarrolló en [51], [55]), Teoría de Prüfer de números algebraicos ideales ([50]), descomposición de la esfera según Hausdorff, Banach and Tarski ([52]).

Su incursión en los fundamentos de la Mecánica Cuántica arranca con un artículo en colaboración con Hilbert y Nordheim ([33]). Su propósito era dar respuesta al sexto problema de la lista propuesta por Hilbert en 1900: restablecer el papel de las Matemáticas¹⁸, a nivel conceptual, en la Física Teórica. Esto le

¹⁶En un artículo de divulgación ([70]) alude a que su sentido del rigor, para dar por probado un resultado, cambió tres veces a lo largo de su vida. Existe una traducción española de este interesante artículo en la enciclopedia editada por Newman [87] (véase el volumen 5, páginas 443-445).

¹⁷Jacques-Louis Lions me informó (fax de 19 de marzo de 1996) que en un artículo escrito por su hija Marina ésta atestigua que en una ocasión von Neumann se pronunció claramente por la Teoría de Juegos como la aportación más relevante de toda su obra.

¹⁸Lax opina en [38] que el resultado negativo de Gödel del año 1931 pudo ser una de las principales razones por las que el interés de von Neumann por el programa de formalismo de Hilbert se amortiguó en años sucesivos.

llevó a sistematizar rigurosamente las ideas de Dirac y al estudio de la Teoría de Operadores para el tratamiento de la reversibilidad y el indeterminismo de Heisenberg, Schrödinger y Born. Sus posteriores trabajos von Neumann y Wigner [84], [86], y von Neumann [53] y siguientes se plasmaron en su importante libro *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* ([59])¹⁹. En Van Hove [95] el lector podrá encontrar una revisión especializada sobre las aportaciones de von Neumann en esta dirección.

Probablemente, fue la inicial influencia de E. Schmidt (popularizado más tarde por el proceso de Gram-Schmidt), la que le llevó al estudio de la Teoría de Operadores y en la que realizó importantes contribuciones (véanse los comentarios expertos de Murray [44]). Motivado por sus estudios sobre Mecánica Cuántica, desarrolló la Teoría Espectral (de operadores hermíticos no acotados) mejorando trabajos previos de H. Weyl y T. Carleman. Estableció la reducción a operadores unitarios en la línea de los trabajos de Cayley (resultados que fueron simultáneamente establecidos por M.H. Stone). Analizó los “defectos” de los operadores de dominio denso de gran aplicabilidad a la teoría de problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales y en los que las condiciones de contorno han de ser incluidas en la definición del dominio del operador. Sus trabajos en esta dirección fueron primordialmente elaborados en el periodo de 1928 a 1932 aunque nunca dejó de publicar en ese campo hasta 1950.

Otra parcela de la Teoría de Operadores de la que se ocupó con gran dedicación es la Teoría de Álgebras (término anteriormente sustituido por el de Anillos) de Operadores. Analizó las W^* -Álgebras o Álgebras de von Neumann según fueron denotadas más tarde, por Dixmier en 1957. Desarrolló la teoría de Álgebras no conmutativas a la luz de los trabajos de E. Noether y E. Artin, haciendo especial incapié en su aplicación a la Teoría de Matrices. Estudió los operadores acotados en espacios de Hilbert separables, etcétera. Estas líneas de investigación las comenzó en 1929 y las continuó, ya en Princeton y en gran parte con la colaboración de F. Murray, en una serie de trabajos ([56], [62], y [73], Murray y von Neumann [45], [46], entre otros). Véase también la exposición realizada en Kadison [35].

Ya en Princeton, en la primera década de su estancia, además de la Teoría de Anillos de Operadores, von Neumann investiga sobre muchos otros temas. Cultiva la Geometría Continua que descubre con la lectura del libro de Dirac sobre Mecánica Cuántica (Dirac [22]). Es lo que él llamó, con ironía, “la Geometría sin puntos”. Su agudizado sentido del humor lo plasmó también en su vida científica y así más tarde cuando su interés se centraba en la construcción de un gran ordenador, ideó un sofisticado nombre cuyas iniciales conducían a MANIAC. Sus colegas le desanimaron de este empeño pero devolviéndole la broma solían denominar más tarde a ese ordenador como JOHNIAC. Volviendo a la Geometría Continua, otra de sus motivaciones era que la dimensión del

¹⁹La versión española se adelantó a las versiones inglesa y francesa. El libro fue traducido al castellano en 1949 con el título *Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica* y publicado por el Instituto de Matemáticas “Jorge Juan” del CSIC. La traducción se debió al Dr. R. Ortiz e incluía un prólogo de E. Terradas describiendo su impacto en la Universidad Central de Madrid. Se cuenta también con una reimpresión del CSIC que data de 1991.

espacio de operadores venía determinada por su grupo de rotaciones con lo que se obtenían dimensiones tales como $4/3$ y otros números racionales. Era el periodo entre 1935 y 1937.

También se ocupó de los Grupos de Lie y así, en [60], resuelve el quinto problema de Hilbert para grupos compactos mostrando que admiten una estructura de Lie si son homeomorfos a un espacio euclídeo. En [61] muestra la unicidad de la medida de Haar sobre estas estructuras, trabajos que luego serían desarrollados por E. Cartan.

Respecto a la Teoría Ergódica, extendió, en sólo unos meses, un artículo previo de 1932 de B.O. Koopman sobre la formulación en las funciones de cuadrado sumable al caso de la formulación en casi todo punto ([59] y [57]). G. Birkhoff amplió más tarde estos resultados en una serie de trabajos (véanse los artículos Birkhoff [8] y Halmos [30]).

La sistematización que llevó a cabo de la Teoría de Juegos se puede considerar como una de las mayores contribuciones científicas del siglo XX. Según Dieudonné,

von Neumann logra algo casi imposible: ofrece un modelo cuantitativo para los juegos de azar con libertad de acción de los jugadores.

Esta fundamentación la llevó a cabo en 1928 ([54]), *annus mirabilis* según Ulam. Extendió los resultados de Borel de 1921, probando su famoso Teorema del min-max y considerando juegos con dos o más jugadores. Sus trabajos culminaron con el libro *Theory of Games and Economic Behaviour* que publicó con Oscar Morgenstern en 1944 ([43]). Antes ya se había interesado por distintos modelos sobre Equilibrio Económico ([63]), innovando este área ya que hasta entonces la mayoría de los modelos matemáticos se basaban en analogías mecánicas. Posteriores trabajos en esta dirección fueron [69], varios manuscritos no publicados datando de 1947 y 1948, Brown y von Neumann [10] (en el que utilizan ecuaciones diferenciales), [74] y [75] (véanse las exposiciones de Kuhn y Tucker [37], Poundstone [89] e Israel y Millán-Gasca [34]).

4 John von Neumann y el Cálculo Científico.

Para comenzar, quizás convenga ser más preciso por lo que hoy día se puede entender por Cálculo Científico. Acudiendo a fuentes francesas (Dautray [19], Benardi [6], Bernadou [7]) podemos decir que el Cálculo Científico no es más que la utilización del ordenador como herramienta de trabajo en cualquier disciplina científica. Pese a esta definición tan sencilla, dos matizaciones se hacen poco menos que necesarias. En primer lugar, el término Cálculo se debe entender como una sucesión de operaciones automáticas basadas en operaciones elementales, trigonometría, logaritmos y exponenciales. Desde la máquina de Pascal (1623-1632) hemos asistido a una progresión asombrosa en la escala de los problemas abordados y así, por ejemplo, en la resolución de sistemas algebraicos lineales hemos superado de manera inimaginable, de la resolución de los de

orden 10 en 1930 a los superordenadores como el BlueGene/L que ha alcanzado una potencia sostenida de 36,01 Teraflops (realización de 36,01 billones de operaciones por segundo)²⁰. La segunda matización es que el término Científico sirve para distinguirlo de otros cálculos no científicos como son los que puedan realizar las empresas o las Oficinas de Recaudación de Impuestos con fines contables. En nuestro caso nos referiremos exclusivamente a aquellos cálculos cuya finalidad sea la elaboración de una teoría y/o su confrontación con la realidad. En este sentido, son de mencionar, entre otros, los siguientes objetivos del Calculo Científico: elaboración y validación de modelos, interpretación en tiempo real de experiencias, realización y optimización de productos, enunciado y verificación de conjeturas (recuérdese el problema de los cuatro colores en el que ha sido sólo gracias a los ordenadores que se ha podido obtener su resolución), etcétera.

Ocupándonos de nuevo de la figura de von Neumann, parece que fue en 1940 cuando su trayectoria científica tuvo una importante inflexión. En ese año tuvo un primer contacto con el *Ballistic Research Laboratory* de Aberdeen, escribiendo su primer artículo ([36]) sobre análisis numérico con el oficial Robert Kent²¹. Años mas tarde, en 1955, en un homenaje a Kent reconocería lo siguiente:

Antes era, aparte de algunas infidelidades, un matemático puro. Gracias a Kent me introduje en las ciencias aplicadas. He tenido éxito al perder mi pureza.

Y según Halmos [31]

... hasta 1940 von Neumann era un matemático puro excepcional que comprendía Física; después fue un matemático aplicado que recordaba su trabajo como matemático puro.

En 1942 comienza una serie de trabajos sobre el análisis numérico de la inversión de matrices y su aplicación a la resolución de ecuaciones lineales de orden elevado²², algunos de ellos en colaboración con Bargmann y Montgomery ([5]) y más tarde en varios trabajos con Goldstein que finalmente redondearía con este último y con Murray en un artículo póstumo ([29]). Investigaciones más aplicadas de esta década son las que realizó sobre Astrofísica junto al Premio Nobel S. Chandrasekar ([14] y [15]), así como sus estudios sobre ondas de choque para flujos compresibles que desarrolló en forma de informes: Informe al Secretario de Estado de Defensa ([64]), informe sobre detonación ([66]), sobre choques oblicuos ([67]), y el estudio numérico de las ondas de choque ([68]).

²⁰Véase la exposición panorámica realizada en Lions [40] y la información más actualizada presentada en la web <http://www.cs.iastate.edu/>

²¹Este artículo no aparece recogido en sus *Collected Works* por lo que ha pasado desapercibido para algunos estudiosos de su obra.

²²Uno de ellos ([65]) lo publicó en *Portugaliae Mathematica*.

Pero su aportación mas innovadora, en la década de los años cuarenta, se refiere a la planificación de la “creación” de un ordenador para la investigación científica. El comienzo de esa aventura parece datar de una visita a Inglaterra en 1943. Así, en una carta a Veblen, fechada el 29 de mayo de 1943, declara

He desarrollado un interés obsceno por las técnicas de computación.

Ya en Los Alamos²³, desarrolló técnicas de programación criticando las limitaciones de los ordenadores existentes, comenzando así su importante obra en Ingeniería de Ordenadores, Sistemas de Calculo, Teoría de Autómatas, etcétera. Dar cuenta de sus aportaciones en esta dirección se escapa del alcance de esta presentación. El lector podrá encontrar en exposiciones más especializadas, como por ejemplo las de Aspray [1] y [3], detalles sobre su participación en el diseño del gran ordenador EDVAC en 1947 posterior a la del ENIAC en 1946 lo que originó la famosa controversia con los ingenieros de Pensilvania J.P. Eckert y J.W. Mauchly, creadores de este último. Más tarde también diseñaría otros grandes computadores para el IAS de Princeton.

Un texto inédito de mayo de 1946, en colaboración con H. Goldstein (Goldstein y von Neumann [27]), puede considerarse de importancia histórica pese a que por su carácter de informe técnico apenas pudo ser libremente consultado hasta que apareció en sus *Collected Works* ([91]). En este trabajo, de título *Large Scale Computing Machines*, se analiza el interés de los grandes ordenadores desde el punto de vista del matemático, del ingeniero y del programador²⁴ ²⁵. Casi nada más comenzar ya se preguntan sobre los fines de estas maquinas:

Where lie the main mathematical needs for high speed automatic computing and what characteristics of a computing device are effective in the various pertinent phases of mathematics?

A modo de respuesta comentan

²³Sobre su paso por Los Alamos y el papel pionero de von Neumann en la llamada *Scientific Computing* véase el artículo de P. Lax [38] quien recibió el Premio Abel del 2005 por sus contribuciones en numerosas áreas muy cercanas a las cultivadas por von Neumann.

²⁴La puesta en marcha del super-ordenador Mare Nostrum, en Catalunya, el 2005, originó una serie de reflexiones de una naturaleza similar al de Goldstine y von Neumann [27]. Véase, por ejemplo, el *Libro blanco de e-ciencia en España*. <http://www.fecyt.es/documentos/e-Ciencia.pdf>.

²⁵Un hecho que parece escasamente conocido por la comunidad española de Matemática Aplicada es que en nuestro país se realizaron varios intentos tempranos de potenciar la computación en estrecho contacto con los matemáticos más activos de la época. Esto se produjo, en 1956, bajo sugerencia de J. Rey Pastor, en el Instituto de Cálculo del CSIC, creado en 1953 y que se integraría en otros centros del CSIC en el 1959 (Castro [13]). De hecho, los miembros de la Comisión Gestora de SEMA también ignorábamos en su día la existencia previa de un intento de creación de una Sociedad Española de Matemática Aplicada (de acrónimo SEMA) que coincidió con el periodo antes citado y que llegó a editar un boletín, de nombre Arquímedes, cuyo número 1 apareció en 1955. He tenido el privilegio de mantener varias conversaciones con Sixto Ríos García. La descripción de aquellos momentos pioneros merece, a mi juicio, un análisis detallado que espero llevar más adelante.

our present analytical methods seem unsuitable for the solution of the important problems arising in connection with nonlinear partial differential equations and, in fact, with virtually all types of nonlinear problems in pure mathematics,

ocupándose también de su posible aplicabilidad en Mecánica de Fluidos

only the most elementary problems of Fluid Mechanics have been solved analytically... the main mathematical difficulties have been known since the time of Riemann and Reynolds...

y con respecto a la relación de estos problemas con la Física se pronuncian de esta manera:

One may be tempted to qualify these problems as problems in Physics, rather than in Applied Mathematics, or even Pure Mathematics... such an interpretation is wholly erroneous... That the first, and occasionally the most important, heuristic pointer for new mathematics advances should originate in Physics is not a new or a surprising occurrence...

Más tarde mencionan problemas de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico aún sin respuesta (en Teoría del Potencial, aplicaciones conformes, superficies mínimas, etcétera) así como los ligados a la turbulencia²⁶. Finalmente, es de resaltar su premonición sobre el papel de los grandes computadores en relación con la experimentación²⁷:

... wind tunnels are used at present as computing devices of the so called analogy type... Digital devices have more flexibility and more accuracy and could be made much faster under present conditions... They may provide us with those heuristic hints which are needed in all parts of mathematics for genuine progress.

John von Neumann escogió la Meteorología Numérica como futuro banco de pruebas del ordenador del IAS. Al parecer su interés en el tema le fue suscitado por V. Zworykin (ingeniero eléctrico de RCA) en 1945 así como por C.G. Rossby quien en una carta fechada el 23 de abril de 1946 le

²⁶La voluntad de aplicar esas máquinas de computación a gran escala a problemas de la Matemática Aplicada no aparece tan nítidamente en la obra de otra figura del siglo XX como fue Alan Turing. Ambos pioneros de la computación evolucionaron partiendo de un profundo conocimiento de la lógica matemática y coincidieron en el ISA de Princeton entre 1936 y 1938 (de hecho, von Neumann ofreció a Turing la posibilidad de un contrato permanente allí). Hay serias dudas de que von Neumann se inspirase en los trabajos de Turing sobre su "máquina universal" cuando propuso su arquitectura del computador. El banco de pruebas idóneo para Turing consistía en un objeto de la Matemática Pura: *la función zeta de Riemann*. (Agradezco a Francisco Ortegón su cuidadosa lectura de una versión previa de este artículo y sus interesantes comentarios sobre la relación entre von Neumann y Turing).

²⁷Lax señala en [38] que se ha de considerar a von Neumann como uno de los padres de la *Computational Fluid Dynamics*.

hablaba de la necesidad de investigar sobre las fluctuaciones y modificaciones climáticas. En un informe a L. Straus, director del IAS, en 1947, von Neumann presenta una larga lista de temas que el ordenador, en aquella fecha aún en diseño, debería abordar. Entre los temas están los siguientes: ecuaciones en derivadas parciales no lineales en Hidrodinámica, Elasticidad y otros campos, experimentos estadísticos, Astrofísica, Física Atómica, Cristalografía, etcétera. Más tarde, en 1956 Goldstine afirma que un tercio del tiempo del ordenador es para la Meteorología

ejemplo primordial de fenómenos no lineales complejos,
anteriormente inaccesibles a la investigación matemática.

Efectivamente, hasta ese tiempo la predicción meteorológica tenía mucho de arte, las líneas de isobaras e isotermas se dibujaban a mano sobre los mapas que eran almacenados en mapotecas de obligada consulta y la experiencia personal en memorizar situaciones pasadas era de vital importancia. El nuevo enfoque que von Neumann proponía constaba de cuatro etapas (véase [71]). La primera de ellas era la Modelización Física en la que la distintas simplificaciones habían marcados los progresos en el área gracias a los trabajos iniciales de Euler, Navier y Stokes, Kelvin, Rayleigh, Helmholtz y otros, hasta llegar a V. Bjerknes en 1904 y especialmente L. Richardson con su libro de 1922 ([90]). Uno de sus distinguidos continuadores, C.G. Rossby, entabló contacto con von Neumann ya en 1942. Una segunda etapa se refería a las técnicas numéricas y gráficas que basadas en procesos de aproximación deberían suplir la imposibilidad de obtener soluciones explícitas. La toma y almacenamiento de datos sería de una capital importancia para representar adecuadamente las condiciones de contorno e iniciales de los modelos. Finalmente, la cuarta etapa consistiría en la Computación en grandes ordenadores que permitiesen un pronóstico diario, en tiempo real²⁸.

Este programa se vio impulsado enormemente por las necesidades derivadas de la Segunda Guerra Mundial. En 1946 von Neumann elevó a la Navy una propuesta (rápidamente aceptada) con un plan temporal muy detallado en el que las experiencias numéricas no comenzarían hasta 1949. Se pedía la contratación de un equipo formado por cinco o seis meteorólogos jóvenes que se adscribirían al IAS de Princeton. Uno de ellos fue J. Charney que en muy poco tiempo se convirtió en un reputado especialista y que permaneció en el IAS hasta 1956. Entre la larga lista de asesores estaban E. N. Lorenz y J. Smagorinsky entre otros.

El equipo comenzó con unas experiencias previas en el ENIAC sobre un modelo barotrópico (bidimensional) propuesto en Charney [16]. John von Neumann cuidaba personalmente de los aspectos ligados al tratamiento numérico de los modelos, en particular proponía los algoritmos de aproximación de las ecuaciones en derivadas parciales y de las condiciones de contorno y

²⁸Hoy día esa estructuración en etapas es típica de la Matemática Aplicada (véase, por ejemplo, Lions [39], donde el lector encontrará alusión al “sueño de las 64.000 máquinas de Richardson”).

la propagación de perturbaciones desde la frontera. Ello le llevó a elaborar un criterio de estabilidad computacional que mejoraba el famoso criterio de Courant, Friedrichs y Lewy [18] ([72]). Al ENIAC le costaba 36 horas llevar a cabo un pronóstico de 24 horas. En particular, el pronóstico realizado para el 31 de enero de 1949 fue muy bueno constituyendo un hecho histórico en la Meteorología con el que se abría una nueva era.

Una vez construido el ordenador del IAS, el equipo trabajó con un modelo baroclínico, propuesto por N. Phillips ([88]), que por su carácter tridimensional permitía la predicción de posibles tormentas. Se trataba de retener tan solo los términos principales para movimientos atmosféricos a gran escala (en extensiones de más de 3 Km). Utilizaron las ecuaciones simplificadas del viento geostrofico

$$v = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}$$

en la que los vientos aparecen como paralelos a las isobaras, giros contra-reloj. Tras introducir la componente vertical de la vorticidad (rotacional de la velocidad)

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

las nuevas ecuaciones pasaban a ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \frac{df}{dy} = \\ -w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + J(p, \frac{1}{\rho}) + \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial f_{rx}}{\partial y}, \end{aligned}$$

siendo

$$J(p, \frac{1}{\rho}) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho}.$$

A continuación se retienen tan solo los términos dominantes siguiendo la llamada *aproximación del plano-beta*, obteniéndose por fin la ecuación

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \beta_0 = 0$$

que es la llamada ecuación barotrópica de la vorticidad y que fue el objeto del importante artículo Charney, Fjortoft y von Neumann [17].

El gran computador del IAS elaboraba ya un pronóstico de 24 horas en 10 minutos de cálculo (que equivalían a 8 años de cálculo para una pequeña computadora de la época). Los resultados fueron aplicados con éxito prediciendo una gran tormenta para el día de Acción de Gracias de 1950. Por cierto que para la fundamentación teórica, von Neumann utilizó el método que hoy día se conoce como de *viscosidad evanescente* que ya había aplicado, junto a Richtmyer en el estudio de ondas de choque ([82]).

En 1953, el pronóstico a corto plazo estaba tan redondeado que dejó de tener un interés prioritario entre las experiencias del ordenador del IAS. El reto se desplazaba al diagnóstico a más largo plazo, Phillips propuso, en 1955,



Figura 2: Von Neumann (segundo por la izquierda) en 1950 ante el ENIAC en compañía de algunos meteorólogos (Charney es el primero por la derecha). Fuente <http://ecpc.ucsd.edu/general/pics/eniac-50.html>

los modelos de Circulación General de la Atmósfera y el protagonismo de von Neumann cesó (entre otras cosas por la instalación de von Neumann en Washington como miembro de la Comisión de Energía Atómica). El IAS suspendió su programa sobre Meteorología Numérica y Charney y Phillips se establecieron en el MIT de Massachusetts.

Sin embargo, el programa de von Neumann había abierto una nueva época en la Ciencia. El Cálculo Científico permite tratar, hoy día, fenómenos de una gran complejidad, como es el caso de la mayoría de las aplicaciones, revolucionando el proceso de simulación y validación de los modelos. Sólo una mente privilegiada como la de von Neumann podía haber tenido la capacidad y confianza en hacer realidad algo inimaginable hace unas décadas.

Merece la pena resaltar que al final de sus días John von Neumann se ocupó de la Meteorología desde el punto de vista del control. Así en su artículo de 1955 ([77]) afirmaba:

Probably intervention in atmospheric and climate matters will come in a few decades, and will unfold on a scale difficult to imagine at present.

En particular, propuso el problema de actuar sobre el clima atmosférico mediante adecuadas intervenciones artificiales sobre el albedo superficial en zonas cercanas a los casquetes polares. Se trata de lo que más tarde ha sido denominado como *the von Neumann problem*²⁹. En un reciente artículo ([81])

²⁹ Algunas de sus geniales ideas no han tenido una formulación matemática rigurosa más que hasta hace sólo unos años (véase, por ejemplo, Lions [39] y su bibliografía, así como Díaz [20]).

su hija Martina señalaba que la modificación del clima fue quizás el último de los sueños científicos de von Neumann para el que confiaba poder aplicar sus estudios previos sobre modelización y la potencia de los ordenadores que él había creado.

Referencias

- [1] Aspray, W. [1985]: The Scientific Conceptualization of Information: A Survey, *Annals of the History of Computing*, **7**, 117-140.
- [2] Aspray, W. [1987]: The Mathematical Reception of the modern Computer: John von Neumann and the Institute for Advanced Study Computer, en *Studies in the History of Mathematics* (ed. E. R. Phillips), MAA, 166-194.
- [3] Aspray, W. [1990]: *John von Neumann and the origins of modern computing*, The MIT Press, Cambridge, MA. Traducción española de E. Alterman en Gedisa, Barcelona, 1993.
- [4] Aspray, W. y Burks, A. (eds.) [1987]: *Papers of John von Neumann on Computing and Computer Science*, The MIT Press, Cambridge, MA y Tomash Publishers, Los Angeles.
- [5] Bargmann, V. Deane Montgomery, D. y von Neumann, J. [1946]: Solution of Linear Systems of High Order, Report prepared for Navy Bureau of Ordnance, under Contract Nord-9596, October 25. 85 pp. [T,V, 421-477].
- [6] Benardi, C. et al. [1994]: Rapport sur le calcul scientifique, *Matapli*, SMAI, **38**, 23-44.
- [7] Bernadou, M. [2001]: *Le Calcul Scientifique*, Que sais-je?, Presses Univesitaires de France, Paris.
- [8] Birkhoff, G. [1958]: Von Neumann and Lattice Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 50-56.
- [9] Brody F. y Vamos, T. [1995]: *The Neumann Compendium*, World Scientific.
- [10] Brown, G. W. y von Neumann [1950]: Solutions of Games by Differential Equations, *Annals of Mathematics Studies* (Princeton University Press), **24** 73-79 [T,V1, 38-43].
- [11] Calkin, J. W., Evans, C., Evans, F., Neumann, K. von, y Neumann, J. von [1951]: *The Burning of D-T Mixtures in a Spherical Geometry*. Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-1233, 23 de abril. Información secreta, restringida.
- [12] Calkin, J. W., Evans, C., Evans, F., Neumann, K. von, y Neumann, J. von [1951b.]: Suplemento de *The Burning of D-T Mixtures in a Spherical Geometry*, Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-1237, 23 de abril. Información secreta, restringida.

- [13] Castro, A. de [1985]: Historia del Instituto de Cálculo. En *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor* (ed. L. Español), Instituto de Estudios Riojanos, Logroño, 195- 207.
- [14] Chandrasekhar, S. y von Neumann, J. [1942]: The Statistics of the Gravitational Field Arising from a Random Distribution of Stars I, *Astrophysical Journal* **95**, 489-531 [T, VI, 102-144].
- [15] Chandrasekhar, S. y von Neumann, J. [1943]: The Statistics of the Gravitational Field Arising from a Random Distribution of Stars II. The Speed of Fluctuations; Dynamical Friction; Spatial Correlations, *Astrophysical Journal* **97**, 1-27 [T, VI, 145-171].
- [16] Charney, J.G. [1949]: On a Physical Basis for Numerical Prediction of large-Scale Motions in the Atmosphere, *Journal of Meteorology*, **6**, 371-385.
- [17] Charney, J.G., Fjortoft, R. and von Neumann, J. [1950]: Numerical integration of the barotropic vorticity equation, *Tellus*, **2**, 237-254.
- [18] Courant, R., Friedrichs, K. y Lewy, H. [1928]: Über die partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, **100**, 32-74.
- [19] Dautray, R. *et al.* [1992]: Le calcul scientifique, *La vie des Sciences, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris*, **9**, 63-83.
- [20] Díaz, J.I. [2002]: On the von Neumann problem and Stackelberg strategies, *Rev. R. Acad. Cien. Serie A Matem.*, **96**, n° 3, 343-356.
- [21] Dieudonné, J. [1976]: Von Neumann, Johan (or John), *Dictionary of Scientific Biography*, **14**, 88-92.
- [22] Dirac, P.A.M. [1930]: *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon, Oxford.
- [23] Fekete, M. y von Neumann, J. [1922]: Über die Lage der Nulstellen gewisser Minimumpolynome, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* **31**, 125-138 [T, I, 10-23].
- [24] Fermi, E. y von Neumann, J. [1953]: Taylor Instability al the Boundary of Two Incompressible Liquids, Documento AECU-2979 del Gobierno de los Estados Unidos, Parte II , 7-13 [T, VI, 431-434].
- [25] Glimm, J., Impagliazzo, J. y Singer, I. (eds.) [1990]: *The Legacy of John von Neumann*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **50**, AMS, Providence, Rhode Island.
- [26] Goldstine, H. [1972]: *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton Univ. Press.

- [27] Goldstine, H.H. y von Neumann, J. [1946]: On the Principles of Large Scale Computing Machines, (inédito) [T,V, 1-32; AB, 315-348].
- [28] Goldstine, H.H. y von Neumann, J. [1947b]: Planning and Cocting of Problems for an Electronic Computing Instrument, Part II, I. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481. [T,V, 80-151; AB, 151-222].
- [29] Goldstine, H.H., Murray, F.J. y von Neumann, J. [1959]: *The Jacobi Method for Real Symmetric Matrices, Association for Computing Machinery. Journal* **6**, 59-96 [T, V, 573-610].
- [30] Halmos, P.R. [1958]: Von Neumann on Measure and Ergodic Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 86-94.
- [31] Halmos, P.R. [1973]: The legend of John von Neumann, *American Mathematical Monthly*, **80**, 382-394.
- [32] Heims, S.J. [1982]: *John von Neumann and Norbert Wiener*, The MIT Press, Cambridge, MA.
- [33] Hilbert, D., von Neumann, J., y Nordheim, L.[1927]: Uber die Grundlagen der Quantenmechanik, *Mathematische Annalen* **98**, 1-30 [T,I, 104-133].
- [34] Israel, G. y Millán Gasca, A. [1995]: *Il mondo come gioco matematico*. La Nuova Italia Scientifica, Roma
- [35] Kadison, R.V. [1958]: Theory of Operators, Part II. Operator Algebras, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 61-85.
- [36] Kent, R. H. y von Neumann, J. [1940]: The Estimation of the Probable Error from Successive Differences, Report 175, Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Md., February 14.
- [37] Kuhn, H. W. y Tucker, A.W. [1958]: John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** 100-122.
- [38] Lax, P. [2005]: John von Neumann: The Early Years, the Years at Los Alamos, and the Road to Computing, *SIAM News*, March 2005, 9-10.
- [39] Lions, J.L. [1990]: *El Planeta Tierra: El papel de la Matemáticas y los superordenadores*, Serie del Instituto de España n^o 2, Espasa Calpe, Madrid.
- [40] Lions, J.L. [1991]: De la machine à calculer de Pascal aux ordinateurs, *La Vie des Sciences, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris*, **8**, 221-240.
- [41] Lions, J.L. [1993]: Le temps du contrôle, *La Vie des Sciences, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris*, **10**, 305-328.

- [42] López Pellicer, M. (ed.) [2003]: Centenario de John von Neumann (1903-1957), *Arbor*, **692**, Agosto.
- [43] Morgenstern, O. y von Neumann, J. [1944]: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press.
- [44] Murray, F.J. [1958]: Theory of Operators, Part I. Single Operators, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 57-60.
- [45] Murray, F.J. y von Neumann. J. [1937]: On Rings of Operators II, *Transactions of the American Mathematical Society* **41**, 208-148 [T,III, 120-160].
- [46] Murray, F.J. y von Neumann. J. [1943]: On Rings of Operators IV, *Annals of Mathematics* **44**, 716-808 [T, III, 229-321].
- [47] Neumann, J. von, [1923]: Zur Eiführung der transfiniten Zahlen, *Acta literarum ac scientiarum Requiae Universitatis Hungaricae Franciscosephinae, Sectio scintiarum mathematicarum* **1**, 199-208 [T, I, 24-33].
- [48] Neumann, J. von, [1925b]: Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **154**, 219-249 [T, I, 34-56].
- [49] Neumann, J. von, [1926]: *Az altalanos: nalmazelmelet axiomatikus folepitses*, Tesis, Universidad de Budapest.
- [50] Neumann, J. von, [1926a]: Zur Proferschen Theorie der idealen Zahlen, *Acta Universitatis Swzegediensis* **2**, 193-227 [T, I, 68-103].
- [51] Neumann, J. von, [1927d]: Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Mathematische Zeitschrift* **26**, 1-46 [T, I, 256-300].
- [52] Neumann, J. von, [1928a]: Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Matematische Zeitschrift* **27**, 669-752 [T, I, 339-422].
- [53] Neumann, J. von, [1928d]: Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Drehelektrons, *Zeitschrift für Physik*, **48**, 868-881 [T, I, 423-436].
- [54] Neumann, J. von, [1928f]: Sur la théorie des jeux, *Comptes Rendus des Séances. Académie des Sciences. Paris* **186**, 1698-1791.
- [55] Neumann, J. von, [1928g]: Über die Definition durch transfiniten Induktion, und vverwandte Fragen der Allgemeinen Mengenlehre, *Matematische Annalen* **99**, 373-391 [T, I, 320-338].
- [56] Neumann, J. von, [1931e]: Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Mathematics* **32**, 191-226 [T, II, 177-212].
- [57] Neumann, J. von, [1932c]: Physical Applications of the Ergodic Hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **18**, 263-266 [T, II, 274-277].

- [58] Neumann, J. von, [1932d]: Proof of the Quasi-Ergodic Hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **18**, 70-82 [T, II, 260-273].
- [59] Neumann, J. von, [1932b]: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlín, Springer, New York, Dover Publications, 1943; Presses Universitaires de France, 1947; Madrid, Instituto de Matemáticas Jorge Juan, 1949, traducido por Robert T. Beyer, Princeton University Press, 1955.
- [60] Neumann, J. von, [1933b]: Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, *Annals of Mathematics* **34**, 170-190 [T, II, 366-386].
- [61] Neumann, J. von, [1934b]: Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen. *Compositio Mathematica*, 106-114 [T, II, 445-453].
- [62] Neumann, J. von, [1936c]: On a Certain Topology for Rings of Operators, *Annals of Mathematics* **37**, 111-115 [T, III, 1-5].
- [63] Neumann, J. von, [1937d]: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **3**, 73-83.
- [64] Neumann, J. von, [1941 c]: Shock Waves Started by an Infinitesimally Short Detonation of Given (Positive and Finite) Energy, Consejo de Investigaciones de Defensa Nacional, Div. 8, 30 de junio, Documento AM-9 del Gobierno de los Estados Unidos.
- [65] Neumann, J. von, [1942b]: Approximate Properties of Matrices of High Finite Order, *Portugaliae Mathematica* **3**, 1-62 [T,IV, 270-331].
- [66] Neumann, J. von, [1942d]: Theory of Detonation Waves, Informe de progreso al 1° de abril de 1942, Documento PB 31090 del Gobierno de los Estados Unidos, 4 de mayo, [T,VI, 203-218].
- [67] Neumann, J. von, [1943a]: *Oblique Reflection of Shocks*, Documento PB 37079 del Gobierno de los Estados Unidos, 12 de octubre [T, VI, 238-299].
- [68] Neumann, J. von, [1944b]: Proposal and Analysis of a New Numerical Method for the Treatment of Hydrodynamical Shock Problems. AMP Report 108.1R AMG-IAS 1. Submitted by the Applied Mathematics Group, Institute for Advanced Study to the Applied Mathematics Panel National Defense Research Committee, March 20th, OSRD-3617. 31 pp. [T,VI, 361-379]
- [69] Neumann, J. von, [1945a]: A Model of General Economic Equilibrium. *Review of Economic Studies* **13**, 1-9. [T, VI, 29-37]
- [70] Neumann, J. von, [1947a]: The Mathematician, En *The Works of the Mind*, 180-196. Editado por Robert B. Heywood, Chicago, University of Chicago Press [T, I, 1-9] (véase también [87]).

- [71] Neumann, J. von, [1947c]: The Future Role of Rapid Computing in Meteorology, *Aeronautical Engineering Review* **6**, 30.
- [72] Neumann, J. von, [1948c]: Segundo Informe sobre el Cálculo Numérico de Problemas de Flujo, 25 de julio (inédito) [T, V, 713-750].
- [73] Neumann, J. von, [1949a]: On Rings of Operators: Reduction Theory, *Annals of Mathematics* **50**, 401-485 [T, III, 400-491]
- [74] Neumann, J. von, [1953a]: A Certain Zero-Sum Two-Person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem, *Annals of Mathematics Studies*, **28**, 5-12 [T,VI, 44-49].
- [75] Neumann, J. von, [1954a]: A Numerical Method to Determine Optimum Strategy, *Naval Research Logistics Quarterly* **1**, 109-115. [T, V1, 82-88].
- [76] Neumann, J. von, [1954d]: The NORC and Problems in High Speed Computing , Address in the occasion of the first public showing of the IBM Naval Ordnance Research Calculator, December 2 [T,V, 238-247; AB, 350-359].
- [77] Neumann, J. von, [1955a]: Can We Survive Technology?, *Fortune*, 106-108, 151-152 [T,V1, 504-519].
- [78] Neumann, J. von, [1958a]: *The Computer and the Brain*, New Haven, Yale University Press.
- [79] Neumann, J. von, [1960]: *Continuous Geometry*, Princeton, Princeton University Press.
- [80] Neumann Whitman, M. von [1990]: John von Neumann: a personal view. En [25], 1-4.
- [81] Neumann Whitman, M. von [2005]: Life with Father, *SIAM News*, March 2005, 8-9.
- [82] Neumann, J. von, y Richtmyer, R.D. [1950]: A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks, *Journal of Applied Physics* **21**, 232-237 [T,V1, 380-385].
- [83] Neumann, J. von., v.N. y Teller, E. [1954]: *Applications of the Hot Sphere Generated by an A-Bomb*, Laboratorio de Radiaciones de la Universidad de California, Livermore UCRL-4412 noviembre. Información secreta, restringida.
- [84] Neumann, J. von, y Wigner, E. [1928a]: Zur Erklarungeiniger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons I, *Zeitschrift fur Physik* **47**, 203-220 [T, I, 438-456].

- [85] Neumann, J. von, y Wigner, E. [1928b]: Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons II, *Zeitschrift für Physik* **49**, 73-94 [T, I, 457-493].
- [86] Neumann, J. von, y Wigner, E. [1928c]: Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons III, *Zeitschrift für Physik*, **51**, 844-858.
- [87] Newman, J. R. (ed.) [1956]: *The world of Mathematics*, Simon and Schuster, Inc., New York. Traducción española de M. Sacristan *et al.* bajo el título *Sigma*, Ediciones Grijalbo, S.A., Barcelona, 1968.
- [88] Phillips, N.A. [1951]: A Simple ThreeDimensional Model for the Study of LargeScale Extratropical Flow Patterns, *Journal of Meteorology*, **8**, 381-394.
- [89] Poundstone, W. [1992]: *Prisoner's dilemma: John von Neumann, Game theory and the Puzzle of the Bomb*, Dover. Traducción española de D. Manzanares, Alianza Editorial, Madrid, 1995.
- [90] Richardson, L. F. [1922]: *Weather prediction by Numerical Processes*, Cambridge University Press.
- [91] Taub, A.H. (ed.) [1963]: *John von Neumann: Collected Works* (seis volúmenes) Pergamon Press, New York.
- [92] Tobin, M., Chocate, L. y Beller, D. [1993]: Use of Inertial Confinement Fusion for Nuclear Weapons Effects Simulations, Sandia National Laboratory Reports, Albuquerque, NM.
- [93] Ulam, S. [1958]: John von Neumann 1903-1957, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 149.
- [94] Ulam, S. [1976]: *Adventures of a Mathematician*, Scribner, New York.
- [95] Van Hove, L. [1958]: Von Neumann's Contributions to Quantum Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 95-99.
- [96] Vonneuman, N.A. [1987]: *John von Neumann as seen by his brother*, Meadowbrook, PA.
- [97] Vonneuman, N.A. [1990]: The philosophical legacy of John von Neumann, in the light of its inception and evolution in his formative years, En [25].

Título:	NUEVOS RESULTADOS DE CONTROL PARA ALGUNOS PROBLEMAS PARABÓLICOS ACOPLADOS NO LINEALES: CONTROLABILIDAD Y CONTROLES INSENSIBILIZANTES.
Doctorando:	María del Rosario Pérez García.
Director/es:	Manuel González Burgos.
Defensa:	28 de Junio de 2004, Universidad de Sevilla.
Calificación:	Sobresaliente Cum Laude por unanimidad.

Resumen: En la presente Memoria se analizan diversos problemas de controlabilidad relacionados con sistemas parabólicos acoplados no lineales. El objetivo principal es aportar nuevos resultados de controlabilidad cuando se ejerce un control distribuido que actúa en una única ecuación del sistema a través de un abierto arbitrariamente pequeño contenido en el dominio. El análisis está centrado esencialmente en el estudio de la controlabilidad exacta a cero (y aproximada) de sistemas de dos ecuaciones del calor no lineales acopladas de distinta forma, completadas con condiciones de contorno diversas, cuando hay un único control. Este problema es más complejo que el problema, ya en sí difícil, de controlabilidad nula para la ecuación del calor escalar puesto que, incluso en el caso lineal, surgen dificultades adicionales que provienen del acoplamiento de las dos ecuaciones. En esta Memoria se retoma la problemática del caso escalar, se revisan las técnicas empleadas hasta la fecha y se desarrolla una nueva estrategia que permite abordar el estudio de la controlabilidad nula de sistemas parabólicos acoplados superlineales.

Uno de los problemas que se abordan extensamente en la Memoria es la existencia de los llamados controles insensibilizantes, introducido por J.-L. Lions. Este problema se puede reformular como un problema de controlabilidad nula para un sistema en cascada en el que el control no aparece en la ecuación que queremos conducir a cero, sino que actúa indirectamente sobre ella a través de la solución de otra ecuación de naturaleza semejante. Se analizan asimismo las propiedades de controlabilidad de sistemas parabólicos no lineales fuertemente acoplados, controlando de nuevo sólo una de las ecuaciones. Un ejemplo significativo es el llamado sistema no lineal de campo de fases. La Memoria está estructurada en cuatro capítulos, tras una introducción.

En el primer Capítulo se obtienen las estimaciones globales de tipo Carleman que se precisan para probar los resultados de controlabilidad de sistemas parabólicos acoplados que se presentan en los capítulos siguientes. En el Capítulo 2 se recogen nuevos resultados de existencia de controles insensibilizantes para algunos sistemas parabólicos lineales y sublineales. El Capítulo 3 de la Memoria está dedicado a analizar la existencia de controles insensibilizantes para una ecuación del calor semilineal cuando se consideran términos no lineales con determinado crecimiento superlineal en el infinito. Se muestra asimismo un resultado de insensibilización

de carácter negativo para ciertas no linealidades con crecimiento superlineal en el infinito. El cuarto y último capítulo de la Memoria se dedica al estudio de las propiedades de controlabilidad del sistema no lineal de campo de fases y otros problemas parabólicos no lineales acoplados más generales.

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	THE THIRD IMACS CONFERENCE ON MATHEMATICAL MODELLING AND COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING
Lugar:	Pilsen, República Checa
Fecha:	4–8 de julio de 2005
Organiza:	Department of Mathematics, Faculty of Applied Sciences University of West Bohemia, Pilsen, Czech Republic
WWW:	http://www.modelling.zcu.cz/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	NINTH INTERNATIONAL CONFERENCE ZARAGOZA–PAU ON APPLIED MATHEMATICS AND STATISTICS
Lugar:	Jaca (Huesca)
Fecha:	19–21 de septiembre de 2005
Organiza:	Departamentos de Matemática Aplicada y de Métodos Estadísticos de la Universidad de Zaragoza - Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour
Información:	María Cruz López de Silanes, Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza
E-mail:	mcruz@unizar.es
WWW:	http://pemap.unizar.es/~jaca2005/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	XI CONGRESO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE BIOLOGÍA CELULAR
Lugar:	Cádiz
Fecha:	3–6 de noviembre de 2005
Organiza:	Sociedad Española de Biología Celular (SEBC)
E-mail:	congreso.sebc@uca.es
WWW:	http://www.cib.csic.es/sebc/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	THE NINTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTEGRAL METHODS IN SCIENCE AND ENGINEERING
Lugar:	Niagara Falls, Ontario, Canada
Fecha:	23–27 de julio de 2006
Organiza:	Department of Civil Engineering, University of Waterloo
Información:	Stanislav Potapenko
E-mail:	spotapenko@uwaterloo.ca
WWW:	http://www.civil.uwaterloo.ca/imse2006/

Sein-Echaluce Lacleta, M^a Luisa

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Inverse problems. Groupware – UNIV. DE ZARAGOZA – Centro Politécnico Superior – Dpto. de Matemática Aplicada – María de Luna, 3; 50018 Zaragoza.
Tlf.: 976761979. *Fax:* 976761886.
e-mail: mlsein@unizar.es.

Franco García, José M^a

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* – UNIV. DE ZARAGOZA – Centro Politécnico Superior – Dpto. de Matemática Aplicada – María de Luna, 3; 50018 Zaragoza.
Tlf.: 976762009. *Fax:* 976761886.
e-mail: jmfranco@unizar.es.
<http://pcmap.unizar.es/odes/Franco.htm>

Gómez Ibáñez, Inmaculada

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* – UNIV. DE ZARAGOZA – Centro Politécnico Superior – Dpto. de Matemática Aplicada – María de Luna, 3; 50018 Zaragoza.
Tlf.: 976762009. *Fax:* 976761886.
e-mail: igomez@unizar.es.
pcmap.unizar.es inma

Boal Sánchez, Natalia

Prof. Asociado. *Líneas de investigación:* Optimización (métodos numéricos) – UNIV. DE ZARAGOZA – Centro Politécnico Superior – Dpto. de Matemática Aplicada – María de Luna, 3; 50018 Zaragoza.
Tlf.: 976762010. *Fax:* 976761886.
e-mail: nboal@unizar.es.

Casas Pérez, Fernando

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Análisis Numérico. Ecuaciones Diferenciales ordinarias – UNIV. JAUME I – E. Superior de Tecnología y CC. Experimentales – Dpto. de Matemáticas – Campus Riu Sec (Área Científico-Técnica); 12071 Castellón.
Tlf.: 964728374. *Fax:* 964728429.
e-mail: Fernando.Casas@mat.uji.es.

Asensio Sevilla, María Isabel

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Métodos numéricos y Análisis Numérico de EDP. Simulación numérica de problemas medioambientales – UNIV. DE SALAMANCA – Fac. de Ciencias Químicas – Dpto. de Matemática Aplicada – Plza. de la Merced, s/n; 37008 Salamanca.
Tlf.: 923294400 Ext. 1537. *Fax:* .
e-mail: mas@usal.es.
<http://matapli.usal.es/mabel>

Ibort Latre, Alberto

Catedrático de Universidad. *Líneas de investigación:* Geometría y Topología Diferencial. Teoría de control – UNIV. CARLOS III DE MADRID – – Dpto. de Matemáticas – Avda. de la Universidad, 30; 28911 Leganés.

Tlf.: 916249096. *Fax:* 916259195.

e-mail: albertoi@math.uc3m.es.

Ramos Calle, Higinio

Prof. Titular de Escuela Universitaria. *Líneas de investigación:* Métodos numéricos ODES – UNIV. DE SALAMANCA – Politécnica de Zamora – Dpto. de Matemática Aplicada – Avda. Requejo, 33; 49022 Zamora.

Tlf.: 980545000. *Fax:* 980545002.

e-mail: higr@usal.es.

López Muñoz, Miguel Ángel

Estudiante. *Líneas de investigación:* – UNIV. COMPLUTENSE – Fac. de Ciencias Matemáticas – – Ciudad Universitaria; 28040 Madrid.

Tlf.: . *Fax:* .

e-mail: malm_1981@yahoo.es.

Dpto. de Matemática Aplicada

Facultad de CC. Matemáticas – Universidad Complutense de Madrid

Ciudad Universitaria. 28040-Madrid Tlf.: 915944449. Fax: .

e-mail: matematica_aplicada@mat.ucm.es.

<http://www.mat.ucm.es/deptos/ma/>

Direcciones útiles

Consejo Ejecutivo de SēMA

Presidente:

Juan Ignacio Montijano. (monti@unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Facultad de Ciencias. Edificio de Matemáticas. Ciudad Universitaria s/n. 50016 Zaragoza. *Tel:* 976 761 120.

Secretario:

Carlos Castro Barbero. (ccastro@caminos.upm.es).

Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:* 91 336 6664.

Tesorerera:

María Pilar Laburta Santamaría. (laburta@unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Pol. Superior. Univ. de Zaragoza. Edificio Torres Quevedo. C/ María de Luna 3. 50018 Zaragoza. *Tel:* 976 762 006.

Vocales:

José Antonio Carrillo de la Plata. (carrillo@mat.uab.es)

Dpto. de Matemáticas. Univ. Autónoma de Barcelona. Edifici C. 08193 Bellaterra (Barcelona). *Tel:* 93 581 2413.

Javier Chavarriga Soriano. (chava@eup.udl.es).

Dpto. de Matemática. E.U. Politécnica. Univ. de Lleida. Avda. Jaume II, 69. 25001 Lleida. *Tel:* 973 702 777.

Javier de Frutos Baraja. (frutos@mac.cie.uva.es).

Dpto. de Matemática Apl. y Comp. Fac. de Ciencias. Univ. de Valladolid. C/Prado de la Magdalena s/n. 47005 Valladolid. *Tel:* 983 423 796.

José Manuel Mazón Ruiz. (Jose.M.Mazon@uv.es).

Dpto. de Análisis Matemático. Fac. de Matemáticas. Univ. de Valencia. Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia) *Tel:* 963 664 721.

Ireneo Peral Alonso. (ireneo.peral@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

José Javier Valdés García. (valdes@orion.ciencias.uniovi.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. de Oviedo. Avda. de Calvo Sotelo, s/n. 33007 Oviedo. *Tel:* 985 103 340.

Enrique Zuazua Iriondo. (enrique.zuazua@uam.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 368.

Comité Científico del Boletín de SēMA

Enrique Fernández Cara. (cara@us.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Alfredo Bermúdez de Castro. (mabermud@usc.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de Compostela. Campus Univ.. 15706 Santiago (A Coruña) *Tel:* 981 563 100.

Eduardo Casas Rentería. (eduardo.casas@unican.es).

Dpto. de Matemática Aplicada y C.C.. E.T.S.I. Ind. y Telec. Univ. de Cantabria. Avda. de Los Castros s/n. 39005 Santander. *Tel:* 942 201 427.

José Luis Cruz Soto. (jlcruz@uco.es).

Dpto. de Informática y An. Numérico. Univ. de Córdoba. Campus de Rabanales. Edificio C-2. 14071 Córdoba. *Tel:* 957 218 629.

José Manuel Mazón Ruiz. (Jose.M.Mazon@uv.es).

Dpto. de Análisis Matemático. Fac. de Matemáticas. Univ. de Valencia. Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia) *Tel:* 963 664 721.

Ireneo Peral Alonso. (ireneo.peral@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

Luis Ferragut Canals. (ferragut@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1522.

Juan Luis Vázquez Suárez. (juanluis.vazquez@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 935.

Luis Vega González. (mtpvegol@lg.ehu.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

Enrique Zuazua Iriondo. (enrique.zuazua@uam.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 368.

Grupo Editor del Boletín de SĒMA

Luis Ferragut Canals. (ferragut@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400, ext. 1522.

Enrique Fernández Cara. (caraus.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Francisco Andrés Pérez. (franc@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1537.

M. Isabel Asensio Sevilla. (mas@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias Químicas. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1537.

M. Teresa de Bustos Muñoz. (tbustos@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S. Ing. Ind. de Béjar. Univ. de Salamanca. Avda. Fernando Ballesteros, 2. 37700 Béjar, Salamanca. *Tel:* 923 408 080 ext. 2263.

Antonio Fernández Martínez. (anton@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. E. Politécnica Superior Zamora. Univ. de Salamanca. Avda. Requejo, 33. Campus Viriato. 49022 Zamora. *Tel:* 980 545 000 ext. 4459.

Responsables de secciones del Boletín de SĒMA

Artículos:

Enrique Fernández Cara. (caraus.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Matemáticas e Industria:

Mikel Lezaun Iturralde. (mpleitm@lg.ehu.es).

Dpto. de Matemática Aplicada, Estadística e I. O. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Apto. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

Educación Matemática:

Roberto Rodríguez del Río. (rr_delrio@mat.ucm.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Químicas. Univ. Compl. de Madrid. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid. *Tel:* 913 944 102.

Resúmenes de libros:

Fco. Javier Sayas González. (jsayas@posta.unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior. Universidad de Zaragoza. C/María de Luna, 3. 50015 Zaragoza. *Tel:* 976 762 148.

Noticias de SĒMA:

Carlos Castro Barbero. (ccastro@caminos.upm.es).

Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:* 91 336 6664.

Anuncios:

Óscar López Pouso. (oscarlp@usc.es).
Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de Compostela. Campus sur, s/n. 15782 Santiago de Compostela Tel: 981 563 100, ext. 13228.

Responsables de otras secciones de SĒMA**Gestión de Socios:**

María Pilar Laburta Santamaría. (laburta@unizar.es).
Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior. Univ. de Zaragoza. Edificio Torres Quevedo. C/ María de Luna 3. 50018 Zaragoza. Tel: 976 762 006.

Página web: www.sema.org.es/:

J. Rafael Rodríguez Galván. (rafael.rodriguez@uca.es).
Dpto. de Matemáticas. Fac. de CC. EE. y Empresariales. Univ. de Cádiz. C/ Duque de Nájera, 6. 11002 Cádiz. Tel: 956 015 478.

1. Los artículos publicados en este Boletín podrán ser escritos en español o inglés y deberán ser enviados por correo certificado a

Prof. E. FERNÁNDEZ CARA
Presidente del Comité Científico, Boletín SēMA
Dpto. E.D.A.N., Facultad de Matemáticas
Aptdo. 1160, 41080 SEVILLA

También podrán ser enviados por correo electrónico a la dirección

`boletin_sema@usal.es`

En ambos casos, el/los autor/es deberán enviar por correo certificado una carta a la dirección precedente mencionando explícitamente que el artículo es sometido a publicación e indicando el nombre y dirección del autor corresponsal. En esta carta, podrán sugerirse nombres de miembros del Comité Científico que, a juicio de los autores, sean especialmente adecuados para juzgar el trabajo.

La decisión final sobre aceptación del trabajo será precedida de un procedimiento de revisión anónima.

2. Las contribuciones serán preferiblemente de una longitud inferior a 24 páginas y se deberán ajustar al formato indicado en los ficheros a tal efecto disponibles en la página web de la Sociedad (<http://www.sema.org.es/>).

3. El contenido de los artículos publicados corresponderá a un área de trabajo preferiblemente conectada a los objetivos propios de la Matemática Aplicada. En los trabajos podrá incluirse información sobre resultados conocidos y/o previamente publicados. Se anima especialmente a los autores a presentar sus propios resultados (y en su caso los de otros investigadores) con estilo y objetivos divulgativos.

Ficha de Inscripción Individual

Sociedad Española de Matemática Aplicada SēMA

Remitir a: SEMA, Despacho 520, Facultad de Matemáticas,
Universidad Complutense. 28040 Madrid.
Fax: 913 944 607. CIF: G-80581911

Datos Personales

- Apellidos:
- Nombre:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: DNI/CIF:
- Fecha de inscripción:

Datos Profesionales

- Departamento:
- Facultad o Escuela:
- Universidad o Institución:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: Fax:
- Correo electrónico:
- Página web: <http://>
- Categoría Profesional:
- Líneas de Investigación:
-

Dirección para la correspondencia: **Profesional** **Personal**

Cuota anual para el año 2005

- Socio ordinario: 30 EUR. Socio de reciprocidad con la RSME: 12 EUR.
- Socio estudiante: 15 EUR. Socio extranjero: 25 EUR.

Datos bancarios

...de de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SĒMA (Sociedad Espa nola de Matemática Aplicada) sean pasados al cobro en la cuenta cuyos datos figuran a continuación

Entidad (4 dígitos)	Oficina (4 dígitos)	D.C. (2 dígitos)	Número de cuenta (10 dígitos)

- Entidad bancaria:
- Domicilio:
- C.P.: Población:

Con esta fecha, doy instrucciones a dicha entidad bancaria para que obren en consecuencia.

Atentamente,

Fdo.

Para remitir a la entidad bancaria

...de de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SĒMA (Sociedad Espa nola de Matemática Aplicada) sean cargados a mi cuenta corriente/libreta en esa Agencia Urbana y transferidas a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244
Bankinter
C/ Hernán Cortés, 63
39003 Santander

Atentamente,

Fdo.

Ficha de Inscripción Institucional

Sociedad Española de Matemática Aplicada SEMA

Remitir a: SEMA, Despacho 520, Facultad de Matemáticas,
Universidad Complutense. 28040 Madrid.
Fax: 913 944 607. CIF: G-80581911

Datos de la Institución

- Departamento:
- Facultad o Escuela:
- Universidad o Institución:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: DNI/CIF:
- Correo electrónico:
- Página web: <http://>
- Fecha de inscripción:

Forma de pago

La cuota anual para el año 2005 como Socio Institucional es de 150 EUR.
El pago se realiza mediante transferencia bancaria a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244
Bankinter
C/ Hernán Cortés, 63
39003 Santander