

sumario

Presentación	3
Informe del Presidente	5
Temas	9
• <i>Algunos resultados recientes</i> <i>sobre ecuaciones no lineales</i> , por Ana Carpio	11
• <i>Las ecuaciones de la filtración de</i> <i>fluidos en medios porosos</i> , por Juan Luis Vázquez	37
Educación matemática	85
• <i>La Matemática difusa</i> , por Alicia Delibes	87
• <i>Sobre las Matemáticas en la</i> <i>Enseñanza Secundaria</i> , por José Luis Andrés	95
Nueva revista	99
Congresos	101
Libros	111
Resúmenes de Tesis Doctorales	113

edición

Editor jefe

JOSÉ LUIS CRUZ SOTO
Dpto. Informática y Análisis Numérico
Universidad de Córdoba

Editores

M^a CARMEN CALZADA CANALEJO
JOSÉ ROMÁN GALO SÁNCHEZ
JOSÉ ANTONIO HERENCIA GONZÁLEZ
MERCEDES MARÍN BELTRÁN
Dpto. Informática y Análisis Numérico
Universidad de Córdoba

Dirección editorial: Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Edif. C-2, planta 3,
Campus Universitario de Rabanales, 14071 Córdoba.

E-mail: boletin_sema@uco.es, *Fax:* 957 21 86 30

Diseño de portada: Antonio Espinosa López y Antonio Osuna Abad.

Imprime: TIPOGRAFÍA CATÓLICA, S. C. A.; tfo.: 957 297 188; Córdoba.

D. L.: Z-472/1997

FOTO DE PORTADA

Sofía Vasilievna Kovalevskaya (Moscú, 1850 – Estocolmo, 1891) fue alumna particular de Weierstrass, cuando las universidades no admitían mujeres. Posteriormente consiguió el Doctorado en Filosofía en la Universidad de Gotinga (en 1874) y fue la primera mujer de Europa nombrada catedrática (en la Universidad de Estocolmo en 1883). En la Nochebuena de 1888 recibió el Premio Bordin de la Academia de Ciencias de París; éste era el más alto galardón científico hasta entonces concedido a una mujer. En 1890 fue elegida miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Los trabajos de Sofía (o Sonia, como ella misma solía autodenominarse) se dedicaron a las ecuaciones en derivadas parciales, la mecánica y la física matemática. Murió prematuramente a los 41 años de edad.

A punto de concluir el año 1999, aparece el presente número 14 del Boletín de S \vec{e} MA. Siendo pues inminente el próximo **año mundial de las Matemáticas**, deseamos a los miembros de los distintos “comités para el año 2000” el mayor éxito en las diversas tareas que pronto emprenderán. Asimismo, pedimos que envíen sus correspondientes aportaciones al grupo editor, con objeto de que el próximo número del Boletín refleje las múltiples actividades a desarrollar con tal motivo. También deseamos el mayor éxito a la nueva revista “*Qualitative Theory of Dynamical Systems*”, de la que son editores Javier Chavarriga y Jaume Llibre. En la página 99 aparecen las características de esta nueva revista y las condiciones de suscripción.

Por otra parte, considerando la buena acogida que tuvo el informe sobre “*Educación matemática*” publicado en el Anuario de 1999, continuamos con dicha sección, de la que son responsables Alicia Delibes y Soledad Rodríguez. En esta ocasión aparecen dos artículos, el primero de Alicia Delibes, titulado “*Matemática difusa*” (en un sentido bien distinto a la extensión de la Matemática clásica originada a partir de la Teoría de Conjuntos Difusos, también denominada “Matemática Difusa”) y el segundo de José Luis Andrés, titulado “*Sobre las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*”.

Al igual que ocurre con el tema de la “educación matemática” y como expresa el propio Presidente en su informe, consideramos interesante la posibilidad de que los socios de S \vec{e} MA dispongan del Boletín como medio donde poder expresar su opinión sobre otros aspectos relacionados con las Matemáticas y con la Sociedad Española de Matemática Aplicada. En ese sentido, si esta idea es secundada, puede incluirse en los siguientes números del Boletín una nueva sección sobre “opiniones” firmadas por los socios que así lo deseen (sin que el grupo editor, ni S \vec{e} MA en su conjunto, tengan que estar de acuerdo ni hacerse responsables de las opiniones vertidas por cada socio a título personal).

El resto del contenido del presente Boletín consiste en secciones que ya son habituales, aunque podemos señalar tres aspectos sobre las mismas:

1. En la sección titulada “temas”, se incluyen dos interesantes artículos. Uno titulado “*Algunos resultados recientes sobre ecuaciones no lineales*”, escrito por Ana Carpio (que obtuvo el “I Premio S \vec{e} MA al Joven

Investigador”). Otro titulado “*Las ecuaciones de la filtración de fluidos en medios porosos*”, escrito por Juan Luis Vázquez (anterior Presidente de SĒMA).

2. Señalamos que la sección sobre “libros” que aparece en este número ha sido preparada por José D. Martín. Recordamos que el responsable habitual de esta sección es Eduardo Casas, quien pide la colaboración de todos los socios para que siga apareciendo información bibliográfica en los siguientes números del Boletín.
3. Luis M. Abia se ha encargado, como de costumbre, de preparar el contenido de la sección sobre “congresos”.

Esperamos que la información que sigue sea de interés y utilidad. Estamos abiertos a cualquier tipo de comentarios y sugerencias, que puedes hacernos llegar mediante la dirección de e-mail que aparece a continuación.

GRUPO EDITOR
boletin_sema@uco.es

INFORME DEL PRESIDENTE

Estimado socio de S \bar{e} MA:

Me complace saludarte una vez más desde estas páginas para comentarte algunos de los acontecimientos que han tenido lugar recientemente.

El primero de ellos es este mismo Boletín, como puedes comprobar magníficamente confeccionado y editado por nuestros compañeros de Córdoba. Tras varias reflexiones, hemos optado por la estructura que observas, con las secciones habituales y algunas nuevas. Querríamos además que, en lo sucesivo, quedaran reflejadas con mayor espontaneidad las opiniones de los socios. Con tal fin, tenemos previsto inaugurar el próximo número una sección adicional, titulada “La opinión del socio”, pensada para que puedas presentar libremente tus comentarios y sugerencias.

Como sabes, hace varios días se celebró en Las Palmas de Gran Canaria el último Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones - Congreso de Matemática Aplicada (CEDYA - CMA) y, en el transcurso del mismo, la Asamblea General de nuestra sociedad de este año. Quisiera ahora hacer varios comentarios sobre el desarrollo que tuvieron ambos.

1 - En primer lugar, te recuerdo que ha habido, de acuerdo con nuestros Estatutos, renovación parcial del Comité Ejecutivo. Han dejado de ser miembros del Comité R BRU, V CASELLES y S DE VICENTE. Por otra parte, se han incorporado al mismo J DE FRUTOS de la Universidad de Valladolid, M GONZALEZ BURGOS de la Universidad de Sevilla y JM MAZON de la Universidad de Valencia. Así pues, el Comité está actualmente formado por estos tres, JL CRUZ, M ESCOBEDO, F LISBONA, R PARDO, el Vicepresidente J DURANY y el que te habla. Aunque todavía estamos reorganizando tareas, te puedo asegurar que ya he tenido tiempo de captar una gran cantidad de ganas de trabajar por parte de todos ellos.

2 - Por motivos de traslado y a petición propia, ha dejado de ser Tesorero de la sociedad nuestro compañero B GARCIA ARCHILLA. Tengo que agradecerle públicamente la gran ayuda que ha tenido a bien prestarnos durante estos años, que ha permitido unas cuentas claras y una sociedad económicamente sana. Tras haberlo comentado con él y tras haber comunicado mis intenciones en la pasada Asamblea, he resuelto nombrar nuevo Tesorero a JF PADIAL quien, como sabéis, tiene a su cargo desde hace tiempo la gestión de socios.

3 - Una buena noticia: Dado que la situación económica de la sociedad es favorable, hemos decidido mantener las cuotas para el año 2000. Aun así, las previsiones continúan siendo favorables para finales del 2000.

4 - En el transcurso del CEDYA de Las Palmas, se observó un alto porcentaje de participación joven, una gran diversidad de temas expuestos y (si se me permite decirlo) una muy alta calidad en muchas comunicaciones. Por añadidura, pudimos disfrutar de magníficas conferencias, algunas de máximo nivel.

Por primera vez se han presentado dos candidaturas para la organización del próximo CEDYA. Tras diversas consultas e intercambios de opiniones, hemos consensuado una solución: El próximo CEDYA - CMA, previsto para septiembre del 2001, será organizado por el Dpto. de Matemática Aplicada de la Universidad de Salamanca. La propuesta fue realizada por L FERRAGUT que es, además, el Director de este Dpto. En septiembre del 2003 tendrá lugar la siguiente edición, organizada por el Dpto. de Ingeniería Informática y Matemáticas de la Universidad Rovira i Virgili de Tarragona. En este caso, la propuesta fue realizada por nuestro compañero R RAMIREZ.

5 - Se procedió a realizar la entrega del II Premio SĒMA al Joven Investigador a nuestro compañero Juan Casado Díaz que, como estaba previsto, fue seguida de una charla del premiado. Aprovecho esta ocasión para anunciarte ya que está previsto un III Premio de estas características. La convocatoria tendrá lugar, más o menos entre el 30 de enero y el 30 de abril del 2000 y afectará a las personas que hayan nacido después del 30 de abril de 1966.

Aunque ya he tenido probablemente la ocasión de decírtelo alguna vez, quiero insistir en que a mí, al resto de los miembros del Comité y a los organizadores de los próximos CEDYA - CMA, nos gustaría contar con vuestras ideas y sugerencias para mejorar si es posible en lo sucesivo en todos los aspectos que se pueda.

En otro orden de cosas, quiero recordarte que muy próximamente comenzarán las actividades del 2000. Es de obligado cumplimiento por mi parte aprovechar estas líneas para agradecer la labor que, desde hace más de un año, están realizando los miembros del Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas (CEAMM 2000), muy en particular uno de nuestros dos representantes, nuestro anterior Presidente JL VAZQUEZ (el otro representante es quien te habla).

Tengo la suerte de contar, además, con otros colaboradores que me ayudan en incontables tareas. Debo mencionar explícitamente a LM ABIA (difusión de

informaciones), R BRU (área de trabajo Algebra Matricial), E CASAS (sección de libros en el Boletín), A DELIBES y S RODRIGUEZ (sección de educación matemática en el Boletín), JM SANCHEZ POXON (Hoja Web), B SILVA, A SUAREZ y E ZUAZUA (a la vez asesores y ayudantes).

Aprovecho la ocasión para agradecerles a ellos y agradecerte a ti el trabajo que desde vuestras parcelas realizáis por SēMA. Te animo igualmente a que me hagas llegar a mí o hagas llegar a cualquier miembro del Comité tus opiniones y sugerencias. Estoy convencido de que cuanto más participativa sea la vida de la sociedad más ganaremos todos.

Esperando tus comentarios e (insisto) animándote a participar en las actividades de nuestra sociedad, te mando un cordial saludo.

E. Fernandez-Cara

Presidente de SēMA

Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Aptdo. 1160; 41080 SEVILLA (SPAIN)

Tel (34) 9 54 55 79 92

Fax (34) 9 54 55 28 98

e-mail: cara@numer.us.es

- **Ana María Carpio Rodríguez**

*Algunos resultados recientes
sobre ecuaciones no lineales*

(páginas 11 - 36)

- **Juan Luis Vázquez Suárez**

*Las ecuaciones de la filtración
de fluidos en medios porosos*

(páginas 37 - 83)

ALGUNOS RESULTADOS RECIENTES SOBRE ECUACIONES NO LINEALES

ANA CARPIO

DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

e-mail: `carpio@sunma4.mat.ucm.es`

1 Introducción

Como sabrán los lectores de este boletín, el año pasado tuve el honor de recibir el Primer Premio SEMA al joven investigador. A lo largo de las páginas que siguen, intento explicar a grandes rasgos en qué ha consistido mi labor investigadora hasta la fecha.

Mi trabajo se ha enmarcado principalmente dentro del estudio cualitativo de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Recientemente, a raíz de mi estancia postdoctoral en OCIAM (Oxford Centre for Industrial and Applied Mathematics), he comenzado a interesarme por cuestiones de modelización, simulación numérica y análisis de modelos discretos.

Los temas que voy a comentar están distribuidos como sigue:

1 Problemas de existencia:

1.1 Ecuaciones de tipo elíptico con exponente crítico: no existencia de soluciones positivas.

1.2 Ecuaciones de ondas con disipación no lineal: existencia de soluciones globales retrógradas.

2 Comportamiento asintótico para tiempos grandes:

2.1 Ecuaciones de convección-difusión:

2.1.1 Ecuaciones de vorticidad en dimensiones dos y tres con datos medidas: primer término del desarrollo asintótico

2.1.2 Ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles con datos integrales: segundo término del desarrollo asintótico.

2.1.3 Ecuaciones de convección-difusión con convección tipo potencias de u : unicidad de soluciones fundamentales, resultados de compacidad.

- 2.1.4 Influencia de la difusión variable en el comportamiento para tiempos grandes.
- 2.2 Ecuaciones cinéticas: Soluciones fundamentales y ecuaciones de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck.
- 3 Modelización y estudio de la dinámica e interacción de dislocaciones en cristales.
 - 3.1 Análisis de la dinámica de líneas de singularidad, ondas viajeras y estacionarias discretas.
 - 3.2 Simulación numérica de defectos en sistemas atómicos y derivación de algunos modelos discretos bidimensionales susceptibles de ser acoplados con las ecuaciones de la elasticidad.
 - 3.3 Estudio de sistemas de leyes de conservación no estrictamente hiperbólicos y mixtos: obtención de familias de soluciones especiales con relevancia física y regularización en términos de problemas de frontera libre con viscosidad (degenerada) evanescente.

No es posible dar muchos detalles sobre temas dispares en unas pocas páginas. No obstante, espero que al menos algunas ideas queden claras. Por otra parte, sólo cito la bibliografía imprescindible. En cualquiera de los artículos citados puede encontrarse una bibliografía más detallada.

2 Resultados de existencia

1 Problemas elípticos con exponente crítico

Problemas de este tipo aparecen, por ejemplo, en geometría diferencial al intentar determinar métricas riemannianas conformes a una dada (Problema de Yamabe). Aparecen igualmente en relación con ciertos problemas físicos, en particular, con las ecuaciones de Emden-Fowler y Yang-Mills. Se suele tomar como problema modelo el siguiente:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^p & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u &> 0 & \text{en } \Omega \end{aligned}$$

donde $p = \frac{n+2}{n-2}$, $n \geq 3$ y Ω es un dominio regular acotado de R^n .

Cuando $p < \frac{n+2}{n-2}$ es fácil probar que existe solución mediante métodos variacionales tipo minimización o técnicas de Ljusternik-Schirnelman o teoría

de Morse. Todos estos métodos fallan debido a falta de compacidad si $p = \frac{n+2}{n-2}$ ya que $p + 1 = 2^* = \frac{2n}{n-2}$ es el exponente crítico de la inyección de Sobolev $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

De hecho, la existencia de solución está condicionada por las propiedades topológicas y geométricas del dominio. Pozohaev [46] probó que en dominios estrellados no existe solución. Por otra parte, Bahri y Coron [1] demostraron que en todo dominio con topología no trivial (en particular, con agujeros) existe solución. Posteriormente, Ding [24] fue capaz de construir dominios de topología trivial en los cuales existía solución. La idea consistía en perturbar anillos. Este resultado puso de relieve la influencia de la geometría. Quedaba por determinar si existían dominios de topología trivial pero sin ser estrellados en los cuales el problema careciera de solución.

En [2] se da una respuesta positiva a esta cuestión construyendo los dominios como perturbaciones de bolas. La idea de la demostración se basa en un argumento de reducción al absurdo que combina la aplicación del método de moving planes de Gidas-Ni-Nirenberg y la técnica de compacidad por concentración de P.L. Lions.

2 Ecuaciones de ondas con disipación no lineal

Consideramos ecuaciones de ondas con disipación no lineal de la forma

$$(\mathcal{G}) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1}u_t = 0 & \text{en } R \times \Omega \\ u = 0 & \text{en } R \times \partial\Omega \end{cases}$$

donde $1 < p < \infty$ y $\Omega \subset R^n$ es acotado y regular. El término de disipación $|u_t|^{p-1}u_t$ representa un efecto de rozamiento que es función de la velocidad.

Es bien sabido ([35]) que, dados datos iniciales de energía finita $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ en t_0 , se puede resolver el problema de valores iniciales

$$(\mathcal{PVI}) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1}u_t = 0 & \text{en } [t_0, \infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{en } [t_0, \infty) \times \partial\Omega \\ u(t_0) = u_0, u_t(t_0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y obtener soluciones $u(t, x)$ definidas para $t \geq t_0, x \in \Omega$. Sin embargo, no se conoce ningún método general para construir soluciones globales del problema de valores iniciales retrógrado ($t \leq t_0$) e incluso la existencia de soluciones locales resulta difícil de establecer. Por otra parte, existen soluciones locales del problema retrógrado que explotan en tiempo finito generadas por datos arbitrariamente pequeños y no se conocen caracterizaciones del conjunto de datos que pueda dar lugar a soluciones globales.

En [4], [5] hemos introducido una técnica que permite construir soluciones definidas para todo t . Estas soluciones tienden a cero si $t \rightarrow \infty$ y crecen indefinidamente si $t \rightarrow -\infty$.

La idea del método es la siguiente. En primer lugar, observamos que basta construir soluciones globales u del problema retrógrado para $t \leq T$, T fijo. Prolongándolas para $t \geq T$ por la solución de (\mathcal{PVI}) con datos iniciales $u(T), u_t(T)$ en $t_0 = T$ se tienen soluciones de (\mathcal{G}) definidas para todo t .

Para construir soluciones globales del problema retrógrado partimos de la observación de que el problema 'parabólico' obtenido suprimiendo u'' , es decir, $-\Delta v + |v_t|^{p-1}v_t = 0$, posee soluciones globales en tiempo. Dichas soluciones son de la forma $v = |t|^{\frac{p}{p-1}}\psi(x)$ donde $\psi(x) \in H_0^1(\Omega)$ satisface $-\Delta\psi = (\frac{p}{p-1})^p|\psi|^{p-1}\psi$. Fijamos $T < 0$. A partir de v se puede construir una función w que verifica

$$w_{tt} - \Delta w + |w_t|^{p-1}w_t = f$$

para $t \leq T$, con f pequeño en $-\infty$. La idea consiste en tomar $w = v + r$ donde $r = \sum_{i=1}^k \psi_i(x)|t|^{\lambda-2i}$ con k tal que $\alpha = \frac{-p}{p-1} + 2(k+1) > 1$ y $\psi_i(x) \in H_0^1$ soluciones de problemas elípticos elegidos de forma que $|f| \leq C|t|^{-\alpha}$.

Finalmente, utilizamos la 'solución aproximada' w para construir una solución u en $(-\infty, T]$. Denotamos por w^τ la solución de (\mathcal{PVI}) con datos iniciales $w(\tau), w_t(\tau)$ en $t_0 = \tau < T < 0$. w^τ existe para $t \geq \tau$. Cuando $\tau \rightarrow -\infty$, las funciones w^τ convergen a una solución u de (\mathcal{G}) definida para $t \leq T$ y que se comporta como $|t|^{\frac{p}{p-1}}\psi(x)$ si $t \rightarrow -\infty$. Basta prolongar u como indicamos anteriormente para tener una solución global en tiempo.

La existencia de soluciones globales de (\mathcal{G}) está relacionada con la optimalidad de las estimaciones del decaimiento de la energía $E(u(t))$ de las soluciones del problema de valores iniciales (\mathcal{PVI}) . Es conocido (véase [36]) que $E(u(t)) \leq C(E(u(0)))f(t)$ para $t \geq 0$ con $f(t) = t^{\frac{-1}{p-1}}$ si $p > 1$ y $f(t) = e^{-\delta t}, \delta > 0$ si $p = 1$. $C(E(u(0)))$ denota una constante que depende de los datos iniciales. En [3] se obtienen estimaciones óptimas sobre el crecimiento de esta constante en función de la energía inicial, en el sentido de que son alcanzadas por las soluciones construidas en [5].

3 Comportamiento asintótico

1 Ecuaciones de convección-difusión no lineales

Una ecuación de convección-difusión es una ecuación de evolución para una función $u(x, t)$ en la cual aparecen un término de difusión (tipo laplaciano o divergencia) y un término de convección (tipo gradiente). Consideraremos en lo sucesivo términos de convección no lineales y de difusión lineales.

La existencia y unicidad de solución para el problema de valores iniciales en R^n suele ser establecida mediante esquemas iterativos o teoremas de punto fijo. Por otra parte, la presencia del término de difusión tiene un efecto regularizante sobre las soluciones para $t > 0$. Nos planteamos la cuestión de determinar cual es el comportamiento asintótico de las soluciones para tiempos grandes.

La primera observación es que el comportamiento de la solución para tiempos grandes está ligado al comportamiento de los datos iniciales para x grande. Consideramos en principio datos iniciales que se anulan cuando $|x| \rightarrow \infty$, con lo que cabe esperar que las soluciones tiendan a la solución estacionaria nula cuando $t \rightarrow \infty$. Se trata de precisar este resultado indicando cual es la velocidad de caída a cero y cual es el perfil asintótico preciso de las soluciones.

En general, para tiempos grandes se suele establecer una competición entre los diversos términos presentes en la ecuación. Según el tipo de no linealidad en la convección y el tipo de datos iniciales podemos tener diferentes situaciones:

- la difusión es dominante y las soluciones se comportan asintóticamente como soluciones del problema sin convección (que es parabólico)
- la convección es dominante y las soluciones se comportan como soluciones del problema sin difusión (que es hiperbólico)
- la difusión domina en algunas direcciones, la convección en otras y las soluciones se comportan como soluciones del problema sin difusión en las direcciones de convección dominante y sin convección en las direcciones de difusión dominante
- la difusión y la convección son del mismo orden

Cuando las ecuaciones y la norma del espacio en que se toman los datos son invariantes por algún cambio de escala, todos los términos que aparecen en la ecuación suelen ser del mismo orden y la solución se comporta como una solución autosemejante (invariante por el cambio de escala). Un instructivo caso

concreto en el que se dan todas las posibilidades que acabamos de mencionar es analizado en [27], [29].

Un primer paso para establecer el orden de magnitud relativo de los diversos términos en la ecuación y el tipo de perfil que cabe esperar consiste en establecer estimaciones óptimas sobre la velocidad de decrecimiento de las normas de la solución. La presencia de un operador parabólico permite obtener para las soluciones estimaciones $L^p - L^q$ del tipo de las conocidas para soluciones de la ecuación del calor:

$$\|u(t)\|_{L^q} \leq C(\|u(0)\|_{L^p})t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}, \quad t > 0$$

Estas estimaciones son independientes de la convección. Pueden deducirse según los casos a partir de desigualdades diferenciales para las normas, de la ecuación integral asociada o de expresiones en términos de soluciones fundamentales.

Se deduce de estas estimaciones que la velocidad de caída de la solución cuando $t \rightarrow \infty$ está determinada por el comportamiento cuando $|x| \rightarrow \infty$ del dato inicial. El tomar u_0 en un espacio L^p es simplemente una manera de medir su decaimiento cuando $x \rightarrow \infty$, o bien el crecimiento de sus singularidades. Otras elecciones son posibles, como por ejemplo, espacios de Morrey o Besov.

Cuando estas estimaciones parabólicas de decaimiento son óptimas, las soluciones suelen comportarse como las soluciones autosemejantes del problema sin convección o bien como las soluciones autosemejantes del problema completo, dependiendo de la no linealidad. Obtenemos así una primera aproximación del perfil asintótico de la solución. La manera clásica de probar este resultado suele consistir en reescalar el problema y ver que las soluciones reescaladas convergen a una solución autosemejante.

En otras ocasiones, la convección no lineal permite obtener estimaciones de decaimiento más rápidas que las estimaciones parabólicas. La idea consiste en establecer previamente estimaciones de entropía para las derivadas. En este caso, la convección no es despreciable para tiempos grandes y las soluciones se suelen comportar como soluciones autosemejantes del problema hiperbólico o parcialmente hiperbólico.

En problemas en que la difusión domina para tiempos grandes y la primera aproximación al perfil asintótico de la solución viene dada por el problema lineal, conviene obtener más términos del desarrollo asintótico para determinar cuál es la influencia de la no linealidad (o la difusión variable) en el perfil. Como veremos más adelante, es posible hacer esto desarrollando las integrales que aparecen en

la ecuación integral asociada. Este tipo de resultados sobre el comportamiento asintótico para tiempos grandes son de interés a la hora de analizar los perfiles asintóticos de pequeñas perturbaciones, que inevitablemente existen en todas las situaciones realistas, y la estabilidad de soluciones específicas.

Esta es a grandes rasgos, la filosofía subyacente en muchos de los trabajos publicados sobre comportamiento asintótico en ecuaciones de convección-difusión. Filosofía que obviamente tiene excepciones y en cada caso particular ha de ser convenientemente matizada o alterada. Tratamos a continuación algunos ejemplos.

1.1 Ecuaciones de vorticidad

Consideremos primero la ecuación de vorticidad en dimensión dos:

$$(V2) \quad \begin{cases} v_t - \Delta v + u^i \partial_i v = 0 & \text{en } R^2 \times R^+ \\ v(x, 0) = v_0 & \text{en } R^2 \end{cases}$$

donde el vector velocidad $u = (u^1, u^2)$ está dado por:

$$u(x, t) = K * v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{(-y_2, y_1)}{|y|^2} v(x - y, t) dy$$

con :

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{(-x_2, x_1)}{|x|^2} = (K^1, K^2)$$

Denotamos $u^i \partial_i v = \sum_{i=1}^2 u^i \partial_i v$ con $\partial_i v = \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

En una serie de trabajos de Giga, Kambe, Osada [31, 33] se prueba que si v_0 es una medida de Radon finita existe una única solución v cuyas normas L^p decaen como $t^{-1+\frac{1}{p}}$. Además, si la variación total de v_0 es suficientemente pequeña, deducen de la ecuación integral que $v(t)$ se comporta como la solución fundamental de la ecuación del calor con masa $M = \int dv_0$, $MG(t)$ siendo G el núcleo del calor.

Es posible mejorar este resultado (véase [6, 7]) reemplazando la restricción sobre la pequeñez de la variación total de v_0 por la unicidad de la solución fundamental f de la ecuación de vorticidad con masa $M = \int dv_0$:

$$\begin{cases} f_t - \Delta f + (K * f)^i \partial_i f = 0 & \text{en } R^2 \times R^+ \\ f(x, 0) = M\delta & \text{en } R^2 \end{cases}$$

Para garantizar la unicidad basta suponer la masa $M = \int dv_0$ pequeña.

La clave de la demostración es la observación de que la ecuación (V2) es invariante por el cambio de escala $v_\lambda = \lambda^2 v(\lambda x, \lambda^2 t)$, la masa $M = \int v(t)$

es una cantidad conservada y las soluciones fundamentales de la ecuación del calor MG con masa M son soluciones fundamentales de (V2) puesto que anulan el término no lineal. Nótese que las soluciones fundamentales f de (V2) son autosemejantes (invariantes por el cambio de escala).

Las funciones v_λ son soluciones de (V2) con datos que convergen a $M\delta$ si λ tiende a infinito. Si $\lambda \rightarrow \infty$ cabe esperar que v_λ converja a la solución fundamental f de (V2) con masa M . Si hay unicidad, en particular, si M es pequeña, $f = MG$. Para justificar esta convergencia, es preciso obtener estimaciones uniformes sobre las normas de v_λ , ∇v_λ y ver que las v_λ son uniformemente pequeñas fuera de bolas de radio suficientemente grande. Este es el punto más delicado y se prueba utilizando diversas expresiones integrales de v_λ .

Establecida la convergencia, basta deshacer el cambio de escala para ver que $v(t)$ se comporta en primera aproximación como $MG(t)$ si $t = \lambda^2$ tiende a infinito:

$$\|v_\lambda(1) - MG(1)\|_{L^p} = \lambda^{2-\frac{2}{p}} \|v(\lambda^2) - MG(\lambda^2)\|_{L^p} \rightarrow 0$$

es decir, $v(t) = MG(t) + R(t)$ donde $R(t)$ es un resto que decae más rápido que $MG(t)$ cuando t tiende a infinito.

En dimensión 3, tenemos el sistema de la vorticidad:

$$(V3) \quad \begin{cases} v_t - \Delta v + \partial_i(u^i v - v^i u) = 0 & \text{en } R^3 \times R^+ \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{en } R^3 \times R^+ \\ v(x, 0) = v_0, \operatorname{div} v_0 = 0 & \text{en } R^3 \end{cases}$$

La ley de Biot-Savart permite expresar la velocidad u en términos de la vorticidad:

$$u(x, t) = K * v(x, t) = \frac{-1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{(y_1, y_2, y_3)}{|y|^3} \times v(x - y, t) dy$$

donde

$$K(x) = \frac{-1}{4\pi} \frac{(x_1, x_2, x_3)}{|x|^3} = (K^1, K^2, K^3)$$

Giga y Miyakawa [32] probaron la existencia de solución para datos iniciales de divergencia nula en el espacio de Morrey $(M^{\frac{3}{2}}(\Omega))^3$ y suficientemente pequeños. El interés de considerar datos en este espacio de Morrey estriba en que contiene medidas concentradas en curvas, como por ejemplo, filamentos o anillos de vorticidad.

Bajo ciertas restricciones adicionales sobre los datos, se tiene (véase [6, 7]) para tiempos grandes las soluciones se comportan como soluciones

autosemejantes de (V3). Basta observar que la ecuación y la norma $(M^{\frac{3}{2}}(\Omega))^3$ son invariantes por el cambio $v_\lambda = \lambda^2 v(\lambda x, \lambda^2 t)$ y proceder como en el caso $n = 2$.

De nuevo, la principal dificultad está en obtener estimaciones uniformes sobre v_λ , ∇v_λ y ver que las v_λ son uniformemente pequeñas fuera de bolas suficientemente grandes. Para probar esta última condición necesitamos imponer condiciones muy restrictivas a los datos iniciales. Estas restricciones son meramente técnicas. Cabe esperar que el resultado sobre el comportamiento asintótico siga siendo válido para datos más generales utilizando espacios de Besov y algunas ideas introducidas recientemente para el estudio de soluciones autosimilares en Navier-Stokes por Canone, Planchon y Meyer.

1.2 Ecuaciones de Navier-Stokes

Consideramos las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en R^n , $n \geq 2$:

$$(NS) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u + u^i \partial_i u + \nabla p = 0 & \text{en } R^+ \times R^n \\ u(t, x) \rightarrow 0 & |x| \rightarrow \infty, t > 0 \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{en } R^+ \times R^n \\ u(x, 0) = u_0, \operatorname{div} u_0 = 0 & \text{en } R^n \end{cases}$$

donde $u = (u^1, \dots, u^n)$ denota la velocidad del fluido y p la presión.

Conviene recordar que los resultados de existencia de solución para (NS) son básicamente de dos tipos. Por una parte se tiene existencia global para todo $t \geq 0$ de soluciones débiles $u \in L^\infty(0, \infty; L^2(R^n))$ para datos $u_0 \in L^2(R^n)$ para todo $n \geq 2$. Por otra parte, se tiene existencia de soluciones fuertes $u \in BC([0, \infty), L^q(R^n))$, $q \geq n$ si $u_0 \in L^n(R^n)$ (véase [37]). Para $n = 2$ estas soluciones coinciden con las débiles y son por tanto globales. Si $n > 3$, son globales para datos de norma L^n suficientemente pequeña. Cuando $u_0 \in L^p \cap L^n$, $1 < p < n$, se tiene además

$$\|u(t)\|_q \leq C(u_0) t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}, \quad t > 0, \quad q \geq p$$

suponiendo $\|u_0\|_n$ pequeña si $n > 2$. Las soluciones fuertes verifican la ecuación integral asociada a (NS).

En una serie de trabajos, Schonbek [49], Kajikiya-Miyakawa [38], Wiegner [50] se utilizan técnicas de Fourier para establecer que las soluciones débiles con datos L^2 se comportan en L^2 como las soluciones de la ecuación del calor con el mismo dato inicial para tiempos grandes. Para las soluciones fuertes de

Kato se puede realizar un estudio más detallado del comportamiento asintótico. Explicamos a continuación ([8, 10]) cómo obtener el primer y segundo término del desarrollo asintótico de una solución fuerte para tiempos grandes.

El punto de partida para estudiar el comportamiento de las soluciones fuertes de (NS) consiste en escribir la ecuación integral asociada:

$$(NSI) \quad u(t) = G(t) * u_0 - \int_0^t G(t-s) * u^i(s) \partial_i u(s) ds \\ - \int_0^t G(t-s) * \nabla E_n * \operatorname{div}(u^i(s) \partial_i u(s)) ds$$

Hemos expresado la presión en términos de u . Nótese que

$$-\Delta p = \operatorname{div}(u^i \partial_i u)$$

luego $p = E_n * \operatorname{div}(u^i \partial_i u)$, siendo E_n la solución fundamental del laplaciano en dimensión n . Obsérvese asimismo que el semigrupo generado por el problema lineal es precisamente el del calor. De ahí la presencia en (NSI) de convoluciones con el núcleo del calor $G(t)$. A continuación, se desarrollan los términos integrales utilizando información sobre el decaimiento de $u(t)$ y $u(t) - G(t) * u_0$.

Sabemos por [37] que las normas de $u(t)$ decaen en tiempo como las normas de la solución de la ecuación del calor con el mismo dato, $G(t) * u_0$. Gracias a ello, podemos estimar la velocidad de decaimiento de las dos integrales presentes en (NSI). Deducimos así que, en primera aproximación, $u(t)$ se comporta como $G(t) * u_0$. Más aun, obtenemos estimaciones optimales sobre la velocidad de decrecimiento de $u(t) - G(t) * u_0$:

1. Sea u la solución de (NS) con dato inicial $u_0 \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq 2$ tal que $\operatorname{div} u_0 = 0$. Entonces, para $q \geq p$,
 - i) Si $1 < p < 2$, $\|G(t) * u_0 - u(t)\|_q \leq Ct^{-\frac{2}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2}} \quad t > 0$
 - ii) Si $p = 1$, $\|G(t) * u_0 - u(t)\|_q \leq Ct^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{q}} \log t \quad t > 0$
 - iii) Si $p = 2$, $t^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|u(t)\|_q \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow \infty$
2. Si $n \geq 3$, sea u una solución global de (NS) con dato inicial $u_0 \in L^p \cap L^n(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < n$, con norma L^n pequeña y tal que $\operatorname{div} u_0 = 0$. Entonces, para $q \geq p$ se tiene

$$\|G(t) * u_0 - u(t)\|_q \leq Ct^{(-\frac{2}{p} + \frac{1}{q})\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}$$

El caso $p = 1$ requiere la utilización de espacios de Hardy. La posibilidad de utilizar espacios de Hardy en la estimación de las convoluciones en el término de presión no había sido observada hasta la fecha y es clave para obtener las estimaciones óptimas cuando $p = 1$, que son fundamentales a la hora de estudiar el segundo término.

Bajo hipótesis de integrabilidad adicionales sobre el dato inicial u_0 , podemos dar la forma del segundo término en el desarrollo asintótico de $u(t)$. Basta hallar el primer término en el desarrollo de cada una de las integrales presentes en (NSI). Ello puede hacerse gracias a las estimaciones ya establecidas y a una delicada técnica de reescalamientos. El desarrollo de $G(t) * u_0$ es conocido [26]:

$$G(t) * u_0 \sim \left(\int u_0 \right) G(t) + \left(\int x^i u_0 \right) \partial_i G(t) \dots$$

La forma precisa del desarrollo de $u(t)$ hasta el segundo orden es la siguiente:

1. Fijamos $q \geq 1$. Sea u una solución de (NS) en dimensión $n = 2$ con datos iniciales $u_0 \in (L^2 \cap L^1)(R^2, 1 + |x|)$ tales que $\operatorname{div} u_0 = 0$ y $u_0 \in L^{2r}(R^2)$ para algun r tal que $q \geq r > \frac{2q}{q+2}$. Denotamos $M = \int_{R^2} u_0(x) dx = (M^1, M^2)$ y $E_2 = \frac{1}{2\pi} \log |x|$. Entonces,

$$\frac{t^{\frac{3}{2} - \frac{1}{q}}}{\log t} \|u(t) - MG(t) + R(t)\|_q \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow \infty$$

donde

$$R(t) = \log t \left(\frac{M^i M}{2} \partial_i G(t) + \frac{M^i M^j}{2} \partial_i G(t) * \nabla \partial_j E_2 \right)$$

2. Para $n \geq 3$, sea u una solución fuerte de (NS) con datos $u_0 \in L^1(R^n, 1 + |x|) \cap L^n(R^n)$, $1 \leq p \leq n$, de norma L^n pequeña y $\operatorname{div} u_0 = 0$. Tomamos $q \geq 1$. Si $u_0 \in L^{2r}(R^n)$ para algun $q \geq r > \frac{nq}{q+n}$ entonces

$$t^{\frac{1}{2} + \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{q})} \|u(t) - MG(t) + m^i \partial_i G(t) + R(t)\|_q \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$, donde $R(t)$ viene dado por

$$\left(\int_0^\infty \int_{R^n} u^i u(\sigma, y) dy d\sigma \right) \partial_i G(t) + \left(\int_0^\infty \int_{R^n} u^i u^j(\sigma, y) dy d\sigma \right) \partial_i G(t) * \nabla \partial_j E_n$$

siendo E_n la solución fundamental de $-\Delta$ en R^n y

$$M = \int_{R^n} u_0(x) dx; \quad m_i = \int_{R^n} x^i u_0(x) dx, \quad i = 1, \dots, n$$

En estos desarrollos se aprecia la aportación de la no linealidad al perfil de las soluciones para tiempos grandes. Por otra parte, se observa que si $n \geq 3$, incluso si tomamos datos con masa y momentos nulos, la velocidad de decaimiento de la norma L^q de la solución será de orden $t^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{q})}$. Por el contrario, las soluciones del problema lineal puede decaer más rápido, incluso exponencialmente.

1.3 Unicidad de soluciones fundamentales y compacidad para no linealidades tipo $|u|^{p-1}u$

Consideramos ecuaciones de convección-difusión de la forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + a \cdot \nabla(|u|^{q-1}u) = 0 & \text{en } R^n \times R^+, n \geq 1 \\ u(z, 0) = u_0(z) & \text{en } R^n \end{cases}$$

con $u_0 \in L^1(R^n)$, $a \in R^n$ y $1 < q < 1 + \frac{1}{n}$. Ecuaciones de este tipo aparecen en el estudio de la difusión de contaminantes en ríos [34]. Se trata de determinar cual es el perfil asintótico de las soluciones para tiempos grandes. Experimentalmente se observa la formación de choques, por lo cual es interesante determinar si este tipo de ecuaciones puede generar choques con el transcurso del tiempo y cual sería la estructura de esos choques.

Por simplicidad escribimos la ecuación en la forma

$$(CD) \quad u_t - \Delta u + \partial_y(|u|^{q-1}u) = 0 \quad \text{en } R^{n-1} \times R \times R^+$$

con $u = u(x, y, t)$, $x \in R^{n-1}$, $y \in R$. Aquí, Δ denota el laplaciano en las variables x, y : $\Delta = \Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

En trabajos anteriores de Escobedo, Vazquez y Zuazua [28, 29] se estudió el caso $n = 1$ y el caso $n > 1$ con $u \geq 0$. En ambos casos las soluciones de (CD) con datos integrables tienden cuando $t \rightarrow \infty$ a la solución fundamental entrópica con masa $M = \int u_0$ de

$$(CDR) \quad f_t - \Delta_x f + \partial_y(|f|^{q-1}f) = 0 \quad \text{en } R^{n-1} \times R \times R^+$$

donde Δ_x denota el laplaciano en la variable x . La difusión en la dirección y desaparece y se forman choques en esa dirección. De hecho, la solución fundamental tiene soporte compacto en la dirección y . Esto es particularmente explícito en dimensión $n = 1$ donde toda la difusión desaparece de la ecuación y las soluciones fundamentales son las conocidas N-waves [42].

Para soluciones u de signo variable y en dimensión $n > 1$, quedaba por determinar si también aparecían choques para tiempos grandes y si la estructura

del choque variaba. Nótese que en el resultado para soluciones positivas, el perfil del choque que se forma cuando $t \rightarrow \infty$ depende únicamente de la masa $M = \int u(x, y, t) dx dy$, que es una cantidad conservada, y no del signo de u . En [9, 11] vemos que efectivamente, aunque el signo de u varíe, el perfil que se observa para tiempos grandes viene dado por la solución fundamental entrópica con masa M de (CDR). Es decir, es el mismo para todas las soluciones que tengan la misma masa.

La restricción sobre el signo en los resultados de [29] es una restricción meramente técnica. La idea de la demostración en [29] consiste en efectuar el cambio de escala

$$u_\lambda(x, y, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^{\frac{1}{2}}x, \lambda^\beta y, \lambda t), \quad \alpha = \frac{n+1}{2q}, \quad \beta = \frac{n+1+q-nq}{2q}$$

Si u es solución de (CD), u_λ es solución de

$$(CD_\lambda) \quad u_{\lambda,t} - \Delta_x u_\lambda - \lambda^{1-2\beta} \partial_{yy}^2 u_\lambda + \partial_y (|u_\lambda|^{q-1} u_\lambda) = 0 \quad \text{in } R^{n-1} \times R \times R^+$$

con datos que tienden a una delta de Dirac, $M\delta$, si $\lambda \rightarrow \infty$. En nuestro rango de q , $1 - 2\beta < 0$. Se trata de probar que u_λ tiende a la solución fundamental entrópica f de (CDR) (que es invariante por el cambio de escala) cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Al invertir el cambio se deduce que $u(t) \sim f(t)$ cuando t tiende a infinito.

En la demostración de [29] hay dos puntos clave que en principio fallan si u cambia de signo. Se necesita que la solución fundamental entrópica f de (CDR) con masa M sea única y sólo se sabe que es única si además se supone que es de signo constante. Por otra parte, se necesita una estimación uniforme sobre las derivadas de u_λ que proporcione compacidad para pasar al límite (estimación de entropía).

En [9, 11] probamos en primer lugar la unicidad de la solución fundamental entrópica con masa M de (CDR) sin restricciones sobre el signo. La idea consiste en probar que si $M \geq 0$ (resp. $M \leq 0$) entonces necesariamente la solución fundamental f con masa M es positiva (resp. negativa) y por tanto única. La dificultad principal proviene del hecho que el dato inicial tomado por la solución fundamental es una masa de Dirac, $M\delta$. Esta dificultad puede ser superada en la forma siguiente. Supongamos $M \geq 0$. Observamos que la parte positiva f^+ y la parte negativa f^- de f son subsoluciones de (CDR) que toman como dato inicial medidas positivas μ y ν respectivamente, con $M\delta = \mu - \nu$. Basta entonces probar que $f^+ \leq g$ y $f^- \leq g$ siendo g la solución de (CDR) con dato μ para concluir que $\nu = 0$, luego $f^- = 0$.

Por otra parte, obtenemos compacidad fuerte de $u_\lambda(t)$ en L^p sin necesidad de estimaciones uniformes sobre las derivadas. Basta generalizar a nuestro

caso los resultados de compacidad obtenidos por Tadmor-Perthame y Lions [41] mediante el paso a formulaciones cinéticas. Nótese que, al no ser $C^{1,\alpha}$ nuestra no linealidad, dichos resultados no se aplican directamente a nuestro problema y es necesario modificar pertinentemente sus argumentos (basados en el uso de transformadas de Fourier y desarrollos diádicos) para adaptarlos a nuestra no linealidad. Hecho esto, concluimos que las soluciones u de signo variable también se comportan como las soluciones fundamentales de (CDR) en primera aproximación.

1.4 Coeficientes variables

Nos planteamos a continuación el problema de determinar la influencia de la difusión variable sobre el perfil de las soluciones de las ecuaciones de convección-difusión para tiempos grandes. Consideramos en principio un problema con difusión asintóticamente constante, pero que puede variar arbitrariamente en acotados:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + a \cdot \nabla(|u|^{q-1}u) = 0 & \text{en } R^n \times R^+, n \geq 1 \\ u(z, 0) = u_0(z) & \text{en } R^n \end{cases}$$

con $1 \leq q \leq 1 + \frac{1}{n}$ y $a(x) = 1 + b(x) > \delta > 0$ donde b es una función regular y acotada que tiende a cero suficientemente rápido en el infinito. Duro y Zuazua [25] probaron que las soluciones con datos integrables se comportan como las soluciones de la ecuación del calor en primera aproximación. En el caso de difusión constante, la influencia de la no linealidad en el segundo término del desarrollo ha sido estudiada en [51]. En [17] estudiamos la influencia de la difusión variable en el perfil asintótico para tiempos grandes. La conclusión es que la difusión variable sólo proporciona una corrección en el segundo término del desarrollo asintótico si $q > 1 + \frac{2}{N}$.

La idea de la demostración es similar a la esbozada para Navier-Stokes. Se escribe la ecuación integral y se analizan todas las integrales que aparecen en ellas obteniendo los primeros términos del desarrollo. El análisis varía según el rango en que se tomen q y la dimensión y requiere delicadas argumentaciones utilizando la teoría de semigrupos y estimaciones óptimas sobre las soluciones fundamentales asociadas al problema lineal [43].

2 Comportamiento asintótico en ecuaciones cinéticas

Los métodos esbozados para el estudio del comportamiento asintótico para tiempos grandes de las soluciones de ecuaciones de convección-difusión pueden

ser utilizados para abordar otro tipo de ecuaciones. La idea de usar reescalamientos para obtener la primera aproximación del perfil asintótico es clásica en ecuaciones parabólicas no lineales. Por otra parte, las técnicas para el estudio de segundos términos introducidas en [10, 17] resultan ser bastante generales. En un trabajo reciente de [39] son utilizadas en ecuaciones tipo Korteweg-De Vries.

Consideramos a continuación la posibilidad de extenderlas al estudio del comportamiento asintótico en ecuaciones cinéticas, que describen la evolución de una densidad de partículas en diferentes condiciones. En estas ecuaciones aparece una nueva variable: la velocidad. Las soluciones son pues función de x, v, t . Para una introducción a este tipo de ecuaciones puede consultarse [40]. Dentro de las ecuaciones cinéticas, la ecuación de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck es (VPFP) sin duda la de estructura más parecida a las ecuaciones de convección-difusión.

Consideramos el problema de determinar el perfil asintótico de las soluciones de las ecuaciones de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Estas ecuaciones son de interés en el estudio de plasmas en los que las colisiones no pueden ser despreciadas. Si suponemos que:

- se intercambia poco momento en la colisión
- el plasma se halla en un campo autoconsistente creado por las propias partículas

no es necesario recurrir a un operador integral de colisión como en la ecuación de Boltzman (véase [22] para una recopilación de resultados sobre la ecuación de Boltzman) y basta trabajar con las ecuaciones (VPFP). Tal es el caso en el estudio de la evolución de un gas 'pesado' sumergido en un gas 'ligero' en equilibrio (p. ej. problemas de fusión controlada). Las ecuaciones (VPFP) pueden obtenerse a partir de la ecuación de Boltzman, aproximando el operador de colisión en un cierto límite.

Denotando por $f(x, v, t)$ la densidad de partículas en la posición x , instante t con velocidad v , el sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck se escribe:

$$\begin{cases} f_t - \sigma \Delta_v f + v \nabla_x f + (E(f) - \beta v) \nabla_v f - N \beta f = 0 & \text{en } R^N \times R^N \times R^+ \\ f(x, v, 0) = f_0(x, v) & \text{en } R^N \times R^N \end{cases}$$

donde $E(\rho(f)) = \varepsilon(K *_x \rho(f))$ con $\rho(f) = \int_{R^N} f(x, v, t) dv$, y $K(x) = \frac{x}{S_N |x|^N}$, S_N siendo S_N el área de la esfera en R^N . Consideramos el caso $N = 3$, $\beta = 0$. El parámetro $\varepsilon = \pm 1$ según la interacción sea electrostática o gravitatoria. En esta ecuación coexisten un término de difusión en v , un término de transporte ($v \nabla_x f$) y un término de convección en v .

Resultados de existencia y regularidad han sido establecidos entre otros por Victory- O'Dwyer [48], Rein-Weckler [47], Carrillo-Soler [20] para datos suficientemente pequeños. Posteriormente, Carrillo, Soler y Vazquez [21] probaron usando métodos de reescalamiento que las soluciones se comportan en primera aproximación como las soluciones de la ecuación libre ($E=0$) para tiempos grandes.

En [14] estudiamos la influencia de la no linealidad en el perfil de las soluciones para tiempos grandes, que no se observa en la primera aproximación. Nuestro análisis se basa en el estudio de problemas linealizados con potenciales $E(x, t)$ acotados que decaen suficientemente rápido en el infinito. Estudiamos las soluciones fundamentales de dichos problemas, estableciendo estimaciones globales en tiempo en las que se acotan las soluciones fundamentales y sus derivadas en términos de la solución fundamental $G(x, v, t; \xi, \nu, \tau)$ del problema lineal con $E = 0$. Se define la solución fundamental Γ_E asociada al potencial E como una función que satisface

$$\begin{cases} \Gamma_{E,t} - \Delta_v \Gamma_E + v \nabla_x \Gamma_E + E(x, t) \nabla_v \Gamma_E = 0 & (x, v, t) \in R^3 \times R^3 \times (\tau, T] \\ \Gamma_E(x, v, \tau; \xi, \nu, \tau) = \delta(x, v) & (x, v) \in R^3 \times R^3 \end{cases}$$

para (ξ, ν, τ) fijos. Si $E(x, t)$ es tal que:

i) $E \in L_{x,t}^\infty$

ii) $\|E(t)\|_{L_x^\infty} \leq \frac{C_\alpha}{(1+t)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ con $\alpha \geq 0$ y C_α pequeño $\alpha = 0$

entonces se tiene [15]:

$$0 \leq \Gamma_E(x, v, t; \xi, \nu, \tau) \leq C(\|E\|_{L_{xt}^\infty})G\left(\frac{x}{2}, \frac{v}{2}, t; \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2}, \tau\right)$$

$$\nabla_v \Gamma_E(x, v, t; \xi, \nu, \tau) \leq C(\|E\|_{L_{xt}^\infty})G\left(\frac{x}{2}, \frac{v}{2}, t; \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2}, \tau\right)(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}$$

para $0 < t - \tau < \infty$, $\tau \geq 0$, $x, v, \xi, \nu \in R^3$.

Gracias a estas cotas, obtenemos estimaciones optimales sobre el decaimiento de la diferencia entre las soluciones de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck y la solución de la ecuación libre con el mismo dato inicial. Hecho esto, es posible obtener precisar en desarrollo asintótico para tiempos grandes mostrando la influencia de la no linealidad como en [17].

4 Modelos de dislocaciones

Las dislocaciones son defectos en la estructura atómica de los materiales cristalinos (metales, semiconductores...), soportados a lo largo de 'curvas', que

controlan una amplia gama de propiedades de los cristales. En particular, propiedades mecánicas como la plasticidad y la velocidad de crecimiento del cristal. Se ha comprobado experimentalmente que todo cristal posee una red de dislocaciones distribuidas en él. Al aplicar una fuerza, las dislocaciones se mueven, interaccionan unas con otras y son creadas en ciertos puntos de nucleación generando complejas estructuras. Este proceso microscópico es el responsable de la deformación plástica del cristal y la variación en la resistencia del mismo que observamos a escala macroscópica.

En general, los cristales son materiales dúctiles. Es decir, si se aplica una fuerza pequeña se deforman elásticamente, de forma reversible. Si la fuerza aplicada supera un valor crítico, la deformación pasa a ser irreversible, o sea plástica. El inicio de la deformación plástica coincide con la puesta en movimiento de las dislocaciones del cristal, que permanecen ancladas hasta que la fuerza aplicada es suficientemente grande. Si seguimos aumentando la fuerza aplicada llega en momento en que el movimiento, interacción y generación de dislocaciones ha creado una compleja y densa estructura de dislocaciones en el cristal, de forma que unas dislocaciones obstaculizan el movimiento de las otras. En ese momento, la resistencia del cristal a la deformación se hace máxima (endurecimiento por trabajado). Si seguimos aumentando la fuerza aplicada, llegará un momento en que el material se fracture.

Esta teoría de la plasticidad está basada en observaciones experimentales. Sin embargo, la modelización matemática de cómo las dislocaciones presentes en la estructura atómica y su evolución controlan la deformación plástica del cristal y su resistencia ha progresado poco. Se han realizado intentos de modelizar la plasticidad mediante la mecánica de medios continuos, postulando diversas leyes de comportamiento para el régimen plástico. Sin embargo, ninguna de esas leyes de comportamiento está sólidamente fundamentada. El principal problema es que no está claro cual es la información microscópica relevante que hay que incluir en la ley de comportamiento. En vista de este panorama, se han introducido algunos modelos discretos que estudian la evolución de la posición de los átomos del cristal sujetos a interacción con los demás átomos y a una fuerza exterior. La mayoría de dichos modelos consideran la interacción de cada átomo con todos los demás por lo que son en la práctica imposibles de estudiar analíticamente y su estudio numérico es excesivamente costoso.

En colaboración con miembros del OCIAM de Oxford he realizado algunos trabajos en los que investigamos otras formas de abordar el problema. En primer lugar hemos formulado modelos discretos simples, que sólo consideran

la interacción de cada átomo con los vecinos mas próximos. Estos modelos nos han permitido estudiar numéricamente la dinámica de dislocaciones aisladas o pequeños grupos de dislocaciones. En el caso unidimensional, identificando la dislocación con ondas discretas hemos podido estimar la fuerza crítica necesaria para moverla. El tratamiento de redes de dislocaciones realistas (del orden de 10^{10} dislocaciones por cm^2) y la homogeneización de esta información discreta para obtener una descripción macroscópica están de momento fuera de nuestro alcance. Por ello, hemos investigado la posibilidad de describir la interacción de dislocaciones mediante sistemas de leyes de conservación en los que postulamos leyes de velocidad empíricas.

1 Dinámica de dislocaciones: dinámica de singularidades, ondas viajeras discretas

El primer problema que se plantea es el de determinar a partir de un modelo conveniente cual es la fuerza crítica a partir de la cual una dislocación comienza a moverse y cual es la velocidad de una dislocación en función de la fuerza externa aplicada, supuesta mayor que la fuerza crítica.

Una primera forma de intentar abordar el problema es la siguiente. Una dislocación viene a ser una región del cristal donde los desplazamientos de los átomos son demasiado grandes para aproximar el cristal por un medio continuo y utilizar las ecuaciones de la elasticidad lineal. Por tanto, puede ser vista como una singularidad en las ecuaciones de la elasticidad. Esto sugiere una analogía con otras singularidades de codimensión dos, i.e., soportadas por curvas, que aparecen en otros contextos físicos: vórtices en fluidos y vórtices en superconductores tipo II.

En diversos trabajos [45], [23] se consigue determinar la dinámica de vórtices mediante métodos asintóticos. La idea consiste en acoplar las ecuaciones de Euler (resp. London) lejos del vórtice fluido (resp. superconductor) con las ecuaciones de Navier-Stokes (resp. Ginzburg-Landau) cerca del vórtice. La condición de acoplamiento proporciona una relación que nos da la velocidad del vórtice en función del campo aplicado.

En [13] investigamos la posibilidad de aplicar estos métodos a la dinámica de dislocaciones. Mostramos que la analogía falla porque ningun modelo continuo es válido en la zona dislocada, la evolución cerca de la dislocación es intrínsecamente discreta. En vista de la imposibilidad de utilizar los métodos asintóticos usuales y dada la naturaleza discreta de la singularidad, recurrimos a simulaciones numéricas con el fin de determinar una ley para la velocidad de

la dislocación en función de la fuerza externa aplicada. Esto plantea la cuestión de cual es el modelo discreto a utilizar.

En [18] proponemos y analizamos algunos modelos discretos para la evolución de una dislocación bidimensional bajo una fuerza externa. Estudiamos primero un modelo que sólo permite movimiento en una dirección. Consideramos un retículo bidimensional infinito y denotamos por $u_{i,j}(t)$ el desplazamiento en la dirección x del átomo (i, j) . La evolución de $u_{i,j}(t)$ viene dada por

$$u'_{i,j} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + A(\sin(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \sin(u_{i,j-1} - u_{i,j}))$$

Este modelo sólo tiene en cuenta la interacción del átomo (i, j) con sus vecinos mas próximos y se reduce a la elasticidad escalar isótropa lejos de las singularidades.

Se puede generar una solución tipo dislocación en el cristal a partir del dato inicial $\theta(i, j)$, siendo $\theta(x, y) \in [0, 2\pi)$ la función ángulo. La fuerza externa aplicada entra en el modelo a través de las condiciones frontera. Si imponemos una fuerza de cizalla en la dirección x de magnitud F , las condiciones frontera para $u_{i,j}$ son $u_{i,j} \sim \theta(i, j) + F \cdot j$ cuando $|i| + |j| \rightarrow \infty$. Es posible probar analíticamente la existencia de dislocaciones estacionarias para fuerzas externas F pequeñas. Por otra parte, las simulaciones numéricas confirman que este modelo tiene soluciones tipo dislocación estacionaria para fuerzas pequeñas y sin embargo para fuerzas grandes posee soluciones tipo dislocación que se deslizan en la dirección x a una velocidad determinada.

Se puede proponer asimismo un modelo un poco mas complejo ([18]) que hace intervenir los desplazamientos $u_{i,j}$ y $v_{i,j}$ en las direcciones x e y . Dicho modelo permite el movimiento en todas direcciones y se reduce como cabía esperar a las ecuaciones de Navier lejos de la dislocación. En este caso, también se pueden generar numéricamente soluciones tipo dislocación en las que $u_{i,j} \sim u(i, j)$ y $v_{i,j} \sim v(i, j)$ lejos de la singularidad, donde

$$\begin{aligned} u &= \frac{b}{2\pi} \left(\tan^{-1}(y/x) + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2+y^2)} \right) \\ v &= -\frac{b}{2\pi} \left(\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \log(x^2 + y^2) + \frac{x^2 - y^2}{4(1-\nu)(x^2 + y^2)} \right) \end{aligned}$$

siendo ν el coeficiente de Poisson del material. Estas soluciones son estacionarias cuando la fuerza externa es pequeña y comienzan a moverse a una cierta velocidad para fuerzas mayores que un valor crítico.

Las simulaciones sugieren la identificación de las dislocaciones con ondas viajeras para fuerzas mayores que la crítica y ondas estacionarias para fuerzas

menores que la crítica. Sólo nos ha sido posible probar analíticamente el resultado para el caso estacionario. La existencia de ondas viajeras discretas bidimensionales con el comportamiento en el infinito deseado es mucho más difícil de abordar. Como paso previo en esa dirección, hemos estudiado las ondas viajeras y estacionarias en un modelo discreto unidimensional.

En [16] estudiamos la existencia de ondas estacionarias y viajeras para un modelo de Frenkel-Kontorova disipativo:

$$(FK) \quad u_{n,t} - (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = -A \operatorname{sen}(u_n) + F$$

Este modelo describe la propagación de una dislocación unidimensional, que se identifica con una onda discreta tipo 'kink' que tiende a 0 en $-\infty$ y a 2π en ∞ . Probamos que para fuerzas $F > 0$ pequeñas existen ondas estacionarias (la dislocación no se mueve) y que si F es mayor que un valor crítico $F_c > 0$ existen ondas viajeras tipo $u_n(t) = v(n - ct)$ (la dislocación se mueve) con velocidad $c = c(F)$. El perfil de la onda viajera $v(z)$ es solución de la ecuación:

$$v_z - v(z+1) + 2v(z) - v(z-1) = -A \operatorname{sen} v + f$$

Damos una estimación del valor crítico de la fuerza F_c en función de A . Nótese el contraste con el análogo continuo:

$$u_t - u_{xx} = -A \operatorname{sen}(u) + F$$

que posee soluciones tipo ondas viajeras para todo $F > 0$, o sea, $F_c = 0$. La existencia de una fuerza crítica es pues un fenómeno intrínsecamente discreto.

2 Sistemas de leyes de conservación no estrictamente hiperbólicos y mixtos

Los modelos discretos anteriormente citados permiten la simulación numérica de la interacción entre pequeños grupos de dislocaciones. Sin embargo, no está claro cómo homogeneizar esa información microscópica para investigar la interacción de grandes densidades. Cabe plantearse otra posibilidad, que consiste en usar leyes de velocidad empíricas para tratar de formular modelos continuos.

En [15] proponemos un modelo para la descripción de la interacción de dos poblaciones de dislocaciones en una geometría unidimensional. Basándonos en datos empíricos, postulamos leyes de velocidad para cada población y obtenemos un sistema de leyes de conservación que degenera en algunas regiones, pasando de ser hiperbólico a parabólico o elíptico. Por tanto, el problema de valores

iniciales deja de estar bien puesto en cuanto la solución entra en la zona elíptica. El inicio de la zona elíptica se produce en una región donde se espera el inicio de la formación de estructuras complejas e inestables.

En su forma mas simple, el modelo es el siguiente:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1((a_1 - c_1\sqrt{w_2})^+)^{\gamma_1}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x}(\omega_2((a_2 - c_2\sqrt{w_1})^+)^{\gamma_2}) = 0, \quad (4.2)$$

donde ω_1, ω_2 representan las densidades de dislocaciones tipo 1 y 2 y a_1, a_2 las componentes de la fuerza externa que actúan sobre las dislocaciones tipo 1 y 2, respectivamente. La velocidad de las dislocaciones tipo i viene dada por $v_i = ((a_i - c_i\sqrt{w_j})^+)^{\gamma_i}$ con $\gamma_i > 0$. El término $-c_i\sqrt{w_j}$ refleja la oposición de la densidad w_j al avance de la población w_i . Nótese que la velocidad es nula si la fuerza externa no es suficientemente grande. El sistema puede ser regularizado hasta cierto punto teniendo en cuenta la interacción entre dislocaciones del mismo tipo. Esto proporciona una corrección en la ley de velocidad que tiene en ciertas condiciones un efecto regularizante. El sistema 'regularizado' toma la forma:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1((a_1 - c_1\sqrt{w_2} - b_1w_{1,x})^+)^{\gamma_1}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x}(\omega_2((a_2 - c_2\sqrt{w_1} \pm b_2w_{2,x})^+)^{\gamma_2}) = 0, \quad (4.4)$$

con $b_1 > 0, b_2 < 0$. En [19] estudiamos la estructura de algunas soluciones de los modelos propuestos en [15] con el fin de comprobar hasta qué punto reproducen mecanismos de interacción observados experimentalmente. En particular, construimos varias familias de soluciones (estacionarias, ondas viajeras, ondas de rarefacción, tipo pile-up...) de interes físico. Son particularmente interesantes las soluciones tipo pile-up, que muestran como una gran acumulación de dislocaciones de un tipo forma una barrera y produce una aglomeración creciente de las otras dislocaciones en la barrera. Este fenómeno ha sido observado experimentalmente. Los modelos propuestos exhiben por tanto un mecanismo elemental de pile up que está matemáticamente ligado a la pérdida de la hiperbolicidad estricta en el sistema.

Las soluciones tipo pile-up pueden ser construidas por el método de características en el caso del sistema de leyes de conservación (4.1,4.2). Para el problema regularizado (4.3,4.4) con $\gamma_i = 1$ estas soluciones pueden ser construidas resolviendo un problema de frontera libre. Conviene resaltar que

cuando las soluciones de (4.1,4.2) presentan saltos, son una buena aproximación de la solución física solo fuera de una capa límite en torno al salto. En la región del salto, ha de considerarse el modelo regularizado con b_i pequeño, que proporciona una pequeña corrección.

Modelos de este tipo, formulados en términos de sistemas de leyes de conservación que tienen regiones elípticas o parabólicas, aparecen en otros numerosos contextos. Cabe citar entre otras las ecuaciones de recuperación de petróleo (oil-recovery), fluidos bifásicos, migración de poblaciones, las ecuaciones de gases de Van der Waals... En todos estos casos, el problema de valores iniciales está mal puesto en cuanto se cae en la región elíptica por lo que tanto el estudio numérico como el estudio analítico de tales problemas resulta enormemente complicado. Ello ha dado lugar a numerosos trabajos (véase [30] y su bibliografía) sobre el tema aunque la situación general es bastante confusa. Prácticamente, hay que hacer un estudio caso por caso teniendo en cuenta la física del problema a la hora de buscar soluciones e interpretarlas. Más tratables son los problemas estacionarios en los que hay cambio de tipo (Euler transónico, por ejemplo).

Agradecimientos

Desearía manifestar mi profundo agradecimiento a Enrike Zuazua, John Ockendon y Jon Chapman por la positiva influencia que han tenido en mi evolución científica. Parte de esta investigación ha sido subvencionada por la DGES (PB96-0663 y acción integrada con Inglaterra HB1997-0162) y la EC a través del TMR ERB-FMRXCT-960033.

Referencias

- [1] Bahri, A., Coron, J.M., On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent. The effect of the topology of the domain. *Comm. Pure and Appl. Math.* Vol 41, 1988, 253-294
- [2] Carpio, A., Comte, M., Lewandowski, R., A non existence result for an elliptic equation involving critical Sobolev exponents. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Nonlinéaire*, 9 (3), 243-261, 1992.
- [3] Carpio, A., Sharp estimates of the energy decay for solutions of second order dissipative evolution problems. *Potential Analysis*, 1, 265-289, 1992.

- [4] Carpio, A., Existence de solutions globales rétrogrades pour des équations des ondes non linéaires dissipatives. C.R.A.S. Paris, t. 316, Série I, 803-808, 1993.
- [5] Carpio, A., Existence of global solutions to some nonlinear dissipative wave equations. J. Math. Pures et Appl., 73 (5), 471-488, 1994.
- [6] Carpio, A., Comportement asymptotique des solutions des équations du tourbillon en dimensions 2 et 3. C.R.A.S. Paris, 316, S I, 1289-1294, 1993.
- [7] Carpio, A., Asymptotic behaviour of solutions to the vorticity equations in dimensions two and three. Comm. in P.D.E., 19 (5-6), 827-872, 1994.
- [8] Carpio, A., Comportement asymptotique dans les équations de Navier-Stokes. C.R.A.S. Paris, t. 319, Série I, 223-228, 1994.
- [9] Carpio, A., Unicité et comportement asymptotique pour des équations de convection diffusion scalaires. C.R.A.S. Paris, t. 319, Série I, 51-56, 1994
- [10] Carpio, A., Large time behavior for solutions of incompressible Navier-Stokes equations. SIAM J. on Math. Anal., 27 (2), 449-475, 1996
- [11] Carpio, A., Asymptotic behaviour for some convection-diffusion equations, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie IV, v XXIII (3), 551-574, 1996
- [12] Carpio, A., Boltzman-en ekuazioa. Ekaia, 4, 135-146, 1996
- [13] Carpio, A., Chapman, S.J., Howison, S., Ockendon, J.R., Dynamics of line singularities, Philosophical transactions of the Royal Society, A, 355, 2013-2024, 1997
- [14] Carpio, A., Long time behavior for solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Plank equation, Math. Meth. in the Appl. Sci., 21, 985-1014, 1998
- [15] Carpio, A., Chapman, S.J., On the modelling of instabilities in dislocation interaction, Philosophical Magazine B, 78, 2, 155-157, 1998
- [16] Carpio, A., Chapman, S.J. Hastings, S.P., Mcleod, J.B., Wave solutions for a discrete reaction-diffusion equation, European Journal of Applied Mathematics, en vías de publicación
- [17] Carpio, A., Duro, G., Asymptotic profiles for convection-diffusion equations with variable diffusion, Nonlinear Analysis T.M.A., en vías de publicación

- [18] Carpio, A., Chapman, S.J., Ockendon, J.R., Discrete models for dislocation dynamics, preprint
- [19] Carpio, A., Chapman, S.J., Velázquez, J.J.L., Pile-up solutions for some mixed hyperbolic systems modeling dislocation interaction, Proceedings of the 2nd Venice Symposium on Applied and Industrial Mathematics, en vías de publicación.
- [20] Carrillo, J.A. and Soler, J., On the initial value problem for the Vlasov-Poisson-Fokker-Plank system with initial data in L^p spaces, Math. Meth. Appl. Sci., 18, 825-839, 1995.
- [21] Carrillo, J.A., Soler, J. and Vazquez, J.L., Asymptotic behavior and selfsimilarity for the three dimensional Vlasov-Poisson-Fokker-Plank system, to appear.
- [22] Cercignani, C., The Boltzmann equation and its applications, Springer-Verlag, New York, 1988
- [23] Chapman, S.J. A mean field model of superconducting vortices in three dimensions, SIAM J. Appl. Math., 55 (5), 1259-1274 (1995).
- [24] Ding, W.Y. Positive solutions of $-\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ in contractile domains. J. Partial Diff. Eqs 2 (1989), 4, 83-88
- [25] G. Duro and E. Zuazua, Large time behavior for convection-diffusion equations in \mathbb{R}^N with asymptotically constant diffusion, C. R. Acad. Sci. Paris, t.321, Série I, (1995), 1419-1424.
- [26] J. Duoandikoetxea, E. Zuazua, Moments, Masses de Dirac et decomposition de fonctions, C.R.A.S. Paris, 315 (1992), pp. 693 - 698.
- [27] M. Escobedo and E. Zuazua, Large time behaviour for convection-diffusion equations in R^n . J. of Funct. Anal, 100, 1 (1991), 119-161
- [28] M. Escobedo, J.L. Vázquez, E. Zuazua, Asymptotic behaviour and source type solutions for a diffusion-convection equation, Arch. Rat. Mech. Anal., 124,1993, 43-65.
- [29] M. Escobedo, J.L. Vázquez, E. Zuazua, A diffusion-convection equation in several space dimensions, Indiana Math. J., 42(4), 1993, 1413-1440.

- [30] Fitt, A., Mixed systems of conservation laws in industrial mathematical modelling, *Surv. Math. Ind.*, 1996, 6, 21-53.
- [31] Giga, Y.- Kambe, T. Large time behaviour of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation. *Comm. Math. Phys.* 117 (1988), 549-568.
- [32] Giga, Y. - Miyakawa, T. Navier-Stokes flow in R^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces. *Comm. in P.D.E.* 14 (5), 577-618, (1989)
- [33] Giga, Y. - Miyakawa, T. - Osada, H. Two - dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity. Preprint
- [34] C.N. Dawson, C.J. Van Duijn, R.E. Grundy, Long time asymptotics in contaminant transport in porous media, *SIAM J. Appl. Maths.*, 56, 4, 965-993.
- [35] Haraux, A. Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains. *Mathematical Reports*, Vol 3 (1987)
- [36] Haraux, A. - Zuazua, E. Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 100,2 (1988), 191-206.
- [37] T. Kato, Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in R^n with applications to weak solutions, *Math. Z.* 187 (1984), pp. 471-480.
- [38] R. Kajikiya, T. Miyakawa, On L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in R^n , *Math. Z.* 192 (1986), pp. 135-148.
- [39] Karch, G., Large-time behavior of solutions to nonlinear wave equations: higher order asymptotics, prepublicación del Mathematical Institute, Universidad de Wrocław.
- [40] Lifschitz, E.M., Pitaevski, L.P., *Physical kinetics, Course of theoretical Physics*, Vol 10, Pergamom Press, 1981.
- [41] P.L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations, *J.A.M.S.*, 7(1), 1994, 169-191.
- [42] T.P. Liu, M. Pierre, Source-Solutions and asymptotic behavior in conservation laws, *J. Diff. Eqs.* 51, 1984, 419-441.

- [43] M. Murata, Large time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations, *Math. Journal*, 37, (1985), 151-195.
- [44] Nakao, M. Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with a nonlinear dissipative term. *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977) 336-343
- [45] Neu, JC, Vortices in complex scalar fields-Vortex dynamics of the nonlinear wave equation, *Physica D*, 1990, 43, 2-3, 385-420
- [46] Pozohaev, S. Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Dokl. Acad. Nauk. S.S.S.R.*, Vol 165, 1965, 33-36
- [47] Rein, G. and Weckler, J., Generic global classical solutions of the Vlasov-Fokker-Plank-Poisson system in three dimensions, *J. of Diff. Eqs.*, 99, 59-77, 1992.
- [48] Victory, H.D. and O'Dwyer, B.P., On classical solutions of Vlasov-Poisson-Fokker-Plank systems, *Ind. Univ. Math. J.*, 3,1, 105-155, 1990.
- [49] M.E. Schonbek, L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 88 (1985), pp. 209-222.
- [50] M. Wiegner, Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on R^n , *J. London Math. Soc.* 35 (1987), 303-313.
- [51] E. Zuazua, Weakly nonlinear large time behaviour in scalar convection-diffusion equations, *Integral & Diff. Eqs.*, 6 (1993), 6, 1481-1492

**LAS ECUACIONES DE LA
FILTRACION DE FLUIDOS
EN MEDIOS POROSOS**

JUAN LUIS VÁZQUEZ
DPTO. DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
e-mail: juanluis.vazquez@uam.es

RESUMEN

El artículo es una aproximación a los problemas matemáticos de la teoría de los flujos en medios porosos, presentada desde el punto de vista de la matemática aplicada y enfocada hacia la investigación actual. Consta de dos capítulos, uno centrado en la modelización, el otro en algunos aspectos de la teoría matemática.

Más en concreto, en el primer capítulo se considera la descripción mecánica de los flujos a través de medios porosos. Se sustituye la ley dinámica usual de Navier-Stokes por una ley de origen experimental, la llamada ley de Darcy, que tiene en cuenta la interacción con el medio a través del cual fluye el fluido. Se estudian diversas aplicaciones, se deducen los modelos adecuados y se formulan los correspondientes problemas matemáticos cerrados. Hemos considerado útil hacer un amplio elenco de los problemas que aparecen con mayor frecuencia en la literatura aplicada y en la investigación. El lector no especializado es invitado a seleccionar los modelos más de su gusto, quizá los primeros, que son conceptualmente más simples.

En el segundo capítulo se estudian algunas de las propiedades matemáticas de uno de los modelos más representativos y estudiados, la llamada “ecuación de los medios porosos”, lo que permite discutir los conceptos de solución generalizada, régimen autosemejante y frontera libre. Se presentan algunas de las líneas de investigación matemática.

Siendo el presente un campo en plena actividad, existen sin duda multitud de aspectos de interés que escapan a estas notas y a los conocimientos del autor.

El texto se ha orientado más hacia la presentación y coherencia de la teoría matemática que hacia el análisis de su efectividad y en el cálculo concreto, aspectos que en ningún modo deben ser descuidados y que el lector habituado al estilo de trabajo e intereses de la ingeniería echará en falta. En todo caso el autor agradece los comentarios y sugerencias y espera que el texto sea útil como invitación a lecturas más detalladas y profundas.

Capítulo 1:

Ecuaciones de los medios porosos

1 Introducción

La ecuación de Navier-Stokes es la ley fundamental que describe la dinámica de los fluidos viscosos más usuales, los fluidos newtonianos, y junto con las leyes de conservación de masa (y de conservación de la energía y de estado si el fluido es compresible) permite describir su movimiento a partir de unas condiciones iniciales y de contorno determinadas. Esta ley se aplica a una enorme variedad de situaciones prácticas de fluidos reales. Sin embargo, no es de aplicación inmediata para describir la dinámica de los fluidos que discurren a través de medios porosos, pues el fluido avanza por los huecos que deja la estructura (o matriz) sólida y es preciso tener en cuenta la muy compleja geometría y la resistencia ofrecida por la estructura. Los fluidos en medios porosos son de gran importancia en diversos problemas de interés industrial o social, como son la extracción de petróleo o gas, el control y distribución de las aguas subterráneas, la hidráulica de los diques, los problemas de contaminación o tratamiento de residuos y la construcción de filtros de diversos usos. Dada la gran irregularidad que ofrece la matriz sólida en muchos de los ejemplos anteriores, el análisis del flujo según las leyes clásicas de los fluidos suplementadas con la interacción fluido-estructura resulta impracticable y aún irreal. Se plantea así una nueva problemática dentro de la mecánica de fluidos, a saber, hallar un procedimiento alternativo que permita describir de forma eficaz tales flujos. Pretendemos en estas notas dar unas ideas sobre el estado de la cuestión y los progresos habidos en su vertiente matemática.

La descripción del flujo en el medio poroso, que como hemos dicho es muy complicada a escala inferior a los poros (pongamos a escalas del orden de 10^{-5} cm para fijar ideas), se torna más fácil cuando se consideran escalas grandes con respecto al tamaño de los poros, pues se da un fenómeno de promedio. Por otra parte tales flujos, o filtraciones, suceden a tan pequeñas velocidades que los términos de inercia son despreciables en comparación con los de presión y viscosos. La fuerza externa es usualmente la gravedad y se tiene en cuenta cuando el fluido es un líquido y el movimiento no es horizontal. El ingeniero francés HENRI DARCY (1803-1858), que trabajaba para el consorcio de aguas de la ciudad francesa de Dijon, propuso en 1856 una ley basada en sus experimentos

en las “fuentes públicas de la villa”, como dice la memoria. Esta ley, que describe adecuadamente la dinámica del flujo de un fluido incompresible en un medio poroso, abrió el camino al análisis racional de los flujos de las aguas subterráneas y otros fluidos que fluyen a través de medios porosos. La ley ha sido ampliada posteriormente para cubrir las diversas situaciones que aparecen en la teoría de la filtración.

2 Ley de Darcy

Supongamos pues que un fluido incompresible, por ejemplo el agua, fluye por un medio poroso. La ley propuesta por DARCY relaciona en forma lineal las dos magnitudes fundamentales del flujo, la velocidad, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, y la caída de presión, $p(\mathbf{x}, t)$ según la fórmula

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho g z), \quad (2.1)$$

hoy día llamada **ley de Darcy**. Aquí $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es la posición, z es la coordenada vertical, ∇ es el operador gradiente espacial, g es la aceleración de la gravedad, ρ es la densidad, aquí supuesta constante, μ es la *viscosidad dinámica*, una magnitud típica de cada fluido viscoso. Todas ellas son magnitudes estándar en el estudio de los fluidos viscosos. Por el contrario, k es un nuevo parámetro físico, típico del medio poroso, llamado *coeficiente de permeabilidad* del medio, en general se piensa en el suelo pero también puede ser un filtro artificial. Los coeficientes μ y k pueden ser en principio variables, pero es en muchos casos aceptable suponer un medio homogéneo y entonces ambos son constantes, que se determinan experimentalmente, lo cual preocupa poco al matemático aunque no así al ingeniero. Mientras que μ tiene dimensiones de $gr/cm \times sg$, k tiene dimensiones de área, se mide en cm^2 . El significado físico de k es un poco complicado, es una especie de área efectiva del poro, es extremadamente variable con el medio y su determinación es uno de los temas de debate en el estudio práctico de los fluidos en medios porosos. Tales conceptos vienen discutidos en detalle en textos como [BER], [Be], [BV], [Mu] ó [PK].

Suplementada por adecuadas leyes complementarias y condiciones iniciales y de contorno, la ley de Darcy permite plantear los principales problemas de filtración en los dominios de la ingeniería antes mencionados, en forma de sistemas cerrados de ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Cuando estos

problemas fueron formulados en clave matemática en la primera mitad de este siglo faltaban los métodos teóricos y prácticos para atacar tal tipo de problemas, que sólo los avances de las matemáticas a lo largo del siglo han hecho accesibles. Hablando más en general, es de señalar que los problemas de la mecánica de fluidos han sido una motivación importante en el desarrollo de diversas ramas de las matemáticas, notablemente las ecuaciones diferenciales, el análisis funcional y el cálculo numérico, y han dado además lugar a subdisciplinas con gran vigor como los problemas de frontera libre.

En cuanto a la aplicación a la mecánica de fluidos, una dilatada evidencia experimental permite afirmar que la ley de Darcy sustituye ajustadamente a la de Navier-Stokes en los medios porosos aunque sólo en circunstancias adecuadas. En particular, se aplica a flujos con bajo número de Reynolds, en que los efectos de inercia son despreciables frente a los viscosos. Como es bien sabido en mecánica de fluidos, el número de Reynolds, Re , es un número adimensional que representa una especie de inverso de la viscosidad normalizado por la densidad y la velocidad y longitud típicas del medio, $\text{Re} = U l \rho / \mu$. Continuaremos esta discusión de este tema en la sección 14.

3 El experimento de Darcy

El montaje experimental consiste en una columna vertical de sección A y longitud L rellena de un medio poroso (arena) por el que se hace pasar agua. Se mide el volumen de agua Q que atraviesa la columna por unidad de tiempo y las alturas piezométricas medidas por un manómetro en los extremos de la columna, h_1 y h_2 . El famoso resultado de DARCY se expresa en la forma

$$Q = \frac{KA(h_1 - h_2)}{L}. \quad (3.1)$$

El punto importante de la fórmula es que K es una constante, llamada *conductividad hidráulica*. La altura piezométrica es una medida de la llamada presión no hidrostática,

$$\pi(x, t) = p(x, t) + \rho g z,$$

normalizada para que tenga dimensión de longitud, $h = \pi / (\rho g)$. Utilizando estas definiciones podemos transformar (3.1) a la forma (2.1) pues

$$h_1 - h_2 = \frac{\Delta \pi}{\rho g}, \quad (\Delta = \text{incremento}). \quad (3.2)$$

Se supone que el incremento varía linealmente, con lo que el *gradiente hidráulico*

$$J = \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (3.3)$$

se identifica con $-\nabla\pi/\rho g$. Por otra parte, $Q/A = q$ es la llamada *descarga específica*, que es una forma de medir la velocidad media del fluido. Se llega así a (2.1) con

$$K = \frac{k \rho g}{\mu}. \quad (3.4)$$

Un montaje similar se realiza en una columna inclinada, cf. [Be], [BV].

El lector comprobará que K se mide en unidades de m/sg ó cm/sg . Como dijimos, k se mide en cm^2 en el sistema c.g.s. En honor al gran ingeniero francés en ingeniería hidráulica se utiliza como unidad el *darcy* = $9.87 \times 10^{-9} cm^2$.

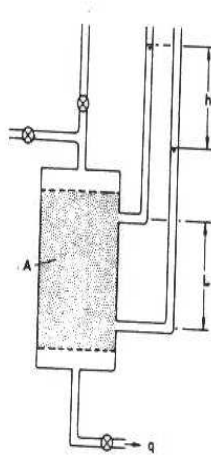


Figura 1.1. Montaje experimental para la ley de Darcy

4 Revisión de las magnitudes y ecuaciones básicas

Como es bien sabido, la mecánica de fluidos se basa en la hipótesis del continuo espacio-temporal y las magnitudes básicas: densidad, velocidad, presión, temperatura, etc., están definidas como promedios idealizados del comportamiento del fluido en un volumen elemental representativo del fluido, VER, que se asimila idealmente a una *partícula fluida*. En el estudio de los

flujos en medios porosos la escala del VER resulta demasiado fina, de modo que se sustituyen estos promedios por los promedios en un *volumen elemental representativo del medio poroso*, VERMP, que se supone mucho mayor y abarca un número suficiente de poros para que tenga sentido el nuevo promedio.

Para empezar, se introduce una nueva magnitud media local, la *porosidad* m , que se define como el cociente del volumen ocupado por los poros V_p (o volumen vacío) por el volumen total V de un VERMP tomado en torno a un punto \mathbf{x} . Es decir, m es la fracción del volumen no ocupado por la matriz sólida y disponible para el paso del fluido. Este valor ha de entenderse como un límite cuando el VERMP $\Omega(\mathbf{x})$ es pequeño dentro del orden de magnitud que escogemos. Así pues, por definición $0 < m < 1$ y depende del punto, $m = m(\mathbf{x})$. En un medio poroso compresible depende también de t . En primera aproximación podemos suponer que la porosidad es constante, lo que simplifica notablemente las matemáticas, pero esta hipótesis no es realista en muchos casos dado que los suelos son altamente heterogéneos. Para algunos medios porosos m es función de la presión media p .

En cuanto a las magnitudes “clásicas”, la densidad del fluido en el medio poroso se define como el cociente entre la masa de fluido M_p contenida en el espacio vacío $\Omega_p(\mathbf{x})$ de un VERMP con respecto al volumen V_p de ese espacio,

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{M_p}{V_p} = \frac{\int_{\Omega_p(\mathbf{x})} \rho'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'}{\int_{\Omega_p(\mathbf{x})} d\mathbf{x}'}, \quad (4.1)$$

donde indicamos con ρ' la magnitud densidad tal como es definida y utilizada en la mecánica de fluidos estándar (a un nivel de escala inferior, pues). De nuevo se supone que la cantidad del segundo miembro tiene un límite cuando $\Omega(\mathbf{x})$ es un VERMP pequeño en torno a \mathbf{x} . En cuanto a la velocidad, ésta es un promedio en el volumen que podemos definir mediante el flujo de masa a través de una superficie S . Se suele tomar como referente el área total de la superficie A y entonces se define la *velocidad de filtración* (*seepage flow velocity*) o *descarga específica* (*specific discharge*) mediante la fórmula

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}) A} \int_S \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}'(x') \cdot \mathbf{n}(x') dS(x'), \quad (4.2)$$

donde \mathbf{n} es la normal a la superficie. De nuevo la primas indican cantidades definidas al nivel de escala inferior. El hecho de que existe la cantidad \mathbf{q} función de \mathbf{x} y t en el sentido de límite para S pequeño en la escala de los VERMP es una hipótesis de la teoría idealizada, cuya justeza ha de ser comprobada

experimentalmente. También se utiliza la velocidad intrínseca \mathbf{v} que está referida al área A_p ocupada por los poros,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}) A_p} \int_S \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}'). \quad (4.3)$$

Recordemos que ambas son conceptos medios y no representan la velocidad de ninguna partícula (incluso en el sentido de partícula fluida habitual en mecánica de fluidos). Entre ambas velocidades se tiene la relación

$$\mathbf{q} = m \mathbf{v}, \quad (4.4)$$

pues se demuestra que la relación de áreas es la misma que la relación de volúmenes. En los procesos de filtración es más conveniente utilizar \mathbf{q} , el volumen de agua que atraviesa una cierta superficie total por unidad de tiempo, y en términos de \mathbf{q} se escribe la ley de Darcy. Por otra parte, \mathbf{v} es conveniente para expresar el movimiento de las fronteras libres y otros fenómenos que se pueden ver como movimiento de “partículas”. En todo caso, para porosidad constante la diferencia es matemáticamente irrelevante, pero el lector quedará prevenido de diferencias notables de notación en los textos, que hacen su lectura laboriosa. De manera similar la presión se define como

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_p(\mathbf{x})} \int_{\Omega_p(\mathbf{x})} p'(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}', \quad (4.5)$$

y del mismo modo la temperatura. Con estas definiciones la conservación de la masa se deduce en la forma habitual en la mecánica de fluidos (ver referencias) y se llega a la fórmula

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{q}) = 0, \quad (4.6)$$

con la novedad de la m . Esta ley básica admite una variante de interés práctico cuando existen fuentes o sumideros de fluido distribuidos, de intensidad $r = r(\mathbf{x}, t)$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{q}) = r. \quad (4.7)$$

A la ley de conservación de masa se añade la ley dinámica de Darcy. Esta, originalmente formulada para *fluidos incompresibles*, ha sido extendida a los fluidos compresibles en la forma

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z). \quad (4.8)$$

Esta es la forma usual con campo de fuerzas gravitatorio. Obsérvese que al ser ρ variable el último sumando toma una forma un tanto distinta de la enunciada

en (2.1). Las leyes anteriores se escriben suponiendo que el medio es homogéneo, anisótropo e indeformable, hipótesis de gran utilidad a la hora de simplificar el problema matemático pero que no siempre se ajustan a la realidad. La falta de homogeneidad se refleja mediante la dependencia de k, μ y ρ respecto a \mathbf{x} . La falta de isotropía se tiene en cuenta en la forma más general de la ley de Darcy

$$\mathbf{q} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla \Phi \quad (4.9)$$

donde la permeabilidad es ahora un tensor $\mathbf{K} = (K_{ij})$ y Φ es el *potencial hidráulico*, que se define por integración de

$$\nabla \Phi = \nabla p - \mathbf{f},$$

con \mathbf{f} un campo de fuerzas exterior. Finalmente, la deformabilidad lleva a problemas del tipo fluido-estructura que exceden el rango de estas notas. Con todo, una primera hipótesis consiste en suponer que la porosidad depende de la presión $m = m(p)$ en forma aproximadamente lineal.

En cuanto a las magnitudes termodinámicas, necesarias para cerrar el sistema de ecuaciones en los fluidos compresibles, hemos de observar que los valores medios no cumplen las leyes derivadas anteriormente, que son no lineales, salvo que las fluctuaciones de presión y temperatura respecto a los valores medios sean pequeñas en cada elemento V_p , lo cual supondremos en lo que sigue, pero puede afectar a la validez de los razonamientos en situaciones límite.

5 Significado de la permeabilidad

Los investigadores han descubierto diversas fórmulas que relacionan la permeabilidad k con la geometría de la matriz sólida.

Ejemplo ilustrativo. Es relativamente fácil calcular k en el caso (tremendamente simplificado, pero aún así ilustrativo y ajustado al fenómeno) en que el medio poroso se supone formado por tubitos horizontales puestos en paralelo en dimensión 2 ó 3. El flujo laminar correspondiente es el llamado *flujo de Poiseuille*. Veamos en detalle el cálculo en 2D en un plano horizontal. Tomemos n tubos y sea $d = 2a$ el diámetro de cada tubo. Bajo la hipótesis de no turbulencia se supone una velocidad laminar del tipo

$$\mathbf{u} = (u, 0). \quad (5.1)$$

La incompresibilidad implica que $u_x = 0$, luego $u = u(y)$. Aplicando la ley de Navier-Stokes en su componente y se obtiene $p_y = 0$, es decir la presión ha de tener la forma $p = p(x)$. Para obtener la relación entre p y u recurrimos a la componente x de las ecuaciones del impulso que dan

$$0 = -p_x + \mu u_{yy} = 0.$$

Dadas las dependencias de p y u esto lleva a la separación de variables

$$p_x = \mu u_{yy} = -c, \text{ constante.} \quad (5.2)$$

Entonces, si L es la longitud del tubo y $2a$ su anchura:

$$p_x = -c, \quad p = -cx + c_1 \quad \text{y} \quad c = \frac{p_0 - p}{L} = -\nabla p. \quad (5.3)$$

Con datos de contorno 0 para u en $y = \pm a$ queda $u_{yy} = -c/\mu$, $u(a) = u(-a) = 0$, lo que lleva a

$$u = \frac{c}{2\mu}(a^2 - y^2). \quad (5.4)$$

Se obtiene pues

$$u_{\max} = \frac{ca^2}{2\mu}, \quad u_{\min} = 0, \quad (5.5)$$

mientras que la velocidad media (a través de todos los tubos, el esquema se repite) es

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{nd} \int u(y) dy = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{c}{2\mu}(a^2 - y^2) dy \\ &= \frac{c}{2a\mu} \int_0^a (a^2 - y^2) dy = \frac{ca^2}{3\mu} = \frac{2}{3} u_{\max}. \end{aligned}$$

Con ello podemos escribir

$$\bar{u} = \frac{a^2}{3\mu} c = -\frac{d^2}{12\mu} \nabla p, \quad (5.6)$$

que es la ley de Darcy con permeabilidad

$$k = \frac{a^2}{3} = \frac{d^2}{12}. \quad (5.7)$$

Esta es una fórmula notable. La fórmula y su coeficiente aparecen en otros contextos de los fluidos viscosos.

Se invita al lector a considerar el problema en 3D, tomando tubos tridimensionales de sección cilíndrica o cuadrada y a hallar las fórmulas teóricas correspondientes de la permeabilidad.

Nota 1. En los ejemplos anteriores con geometría lineal la permeabilidad es función del área de la sección elemental o poro. Pero en geometrías curvilíneas se observa que la permeabilidad disminuye con la *tortuosidad* o enrevesamiento de las trayectorias a disposición del fluido, que es un parámetro a tener en cuenta.

Nota 2. La teoría de la *homogeneización* permite obtener leyes de Darcy para medios con estructura periódica, pasando al límite cuando el tamaño de la “célula elemental” tiende a cero (y con ello el número de células a infinito). Un trabajo pionero en esta dirección se debe a L. TARTAR, [Ta]. Ello es de utilidad en el estudio de medios artificiales, como los filtros, que tienen una estructura aceptablemente periódica. En los medios naturales, con una distribución bastante caótica de tamaños, forma y disposición de los poros, un análisis estadístico del medio es necesario y la teoría correspondiente es muy difícil y está comparativamente poco avanzada. Matemáticamente, ello se traduce en la introducción de *métodos estocásticos* junto a las citadas técnicas de homogeneización. De gran importancia es la consideración de las *fisuras*, que son direcciones privilegiadas de flujo, lo que lleva a interesantes tratamientos matemáticos.

6 Flujo incompresible en un medio poroso

En este caso comparativamente más simple se tienen las ecuaciones (con \mathbf{u} tomada en el sentido de \mathbf{q})

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla \pi, \quad (6.1)$$

donde $\pi = p + \rho g z$ es la llamada presión no hidrostática (o presión corregida). Tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas (si estamos en 3D; $n + 1$ ecuaciones e incógnitas en n dimensiones de espacio). Se tiene entonces que

$$\nabla \cdot \left(-\frac{k}{\mu} \nabla \pi \right) = 0. \quad (6.2)$$

Supongamos que k y μ son constantes. Llegamos a la ecuación

$$\Delta \pi = 0. \quad (6.3)$$

Así pues, la ecuación para la presión de un fluido incompresible en un medio poroso es la ECUACIÓN DE LAPLACE, la más clásica de las ecuaciones en derivadas

parciales. En el caso en que el medio no es homogéneo ni isotrópico, si sustituimos k/μ por $K/\mu = (a_{ij}(\mathbf{x}))$ queda

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (6.4)$$

que es un caso de ECUACIÓN ELÍPTICA que generaliza la ecuación de Laplace y cuyo estudio forma parte de los cursos avanzados de EDPs, cf. [GT]. De existir fuentes o sumideros de fluido de intensidad $r = r(\mathbf{x})$ llegamos a la ecuación más general

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \right) = r(\mathbf{x}). \quad (6.5)$$

Si las fuentes o sumideros son puntuales se representan mediante deltas de Dirac. Esta no es la única dificultad matemática de una teoría aparentemente simple, como veremos a continuación.

7 Filtración en un dique. Problema de frontera libre

El ejemplo más típico de aplicación del modelo precedente sucede cuando tratamos de describir el proceso de filtración del agua de un embalse a través de la pared del dique que lo cierra. Se trata evidentemente de un caso de filtración de un fluido incompresible (el agua) a través de un medio poroso (el cemento). Para más sencillez tomaremos una geometría simplificada, el “dique rectangular”, y suponemos un problema bidimensional en variables espaciales (x, z) , es decir ignoramos la anchura del frente del dique que suponemos tan grande que no afecta esencialmente a los cálculos. El eje x está situado horizontalmente perpendicular al dique, de forma que la semirrecta $x < 0$ corresponde al embalse, el segmento $0 < x < a$ a la pared del dique y la semirrecta $x > a$ al desagüe exterior que también puede ser otro embalse. Suponemos además un lecho inferior impermeable horizontal situado en $z = 0$ y que el dique tiene una altura $L > 0$. Por último, nos restringimos a describir el estado estacionario.

La situación es (en primera aproximación) trivial en las dos regiones (embalses) a ambos lados del dique. Dado que la filtración a través del dique es muy lenta podemos suponer que la situación fuera del dique es a efectos

prácticos estacionaria y por tanto la altura del agua es constante

$$z = H \quad \text{si } x < 0, \quad z = h \quad \text{si } x > a, \quad (7.1)$$

donde $0 < h < H \leq L$. Consecuentemente la presión viene dada por la fórmula hidrostática

$$p(x, z) + \rho gz = \rho gH + p_a \quad \text{para } x < 0, \quad 0 \leq z \leq H, \quad (7.2)$$

$$p(x, z) + \rho gz = \rho gh + p_a \quad \text{para } x > a, \quad 0 \leq z \leq h. \quad (7.3)$$

Podemos suponer que la presión atmosférica p_a es constante e incluso igualarla a cero (desplazando el origen de medición de presiones). Pasemos ahora a describir la situación en la región no trivial, el dique, para $0 < x < a$ y $0 < z < L$. Al realizar este estudio es preciso hacer una importante observación: a efectos hidrodinámicos el dique se compone de dos regiones, una región ocupada por el fluido (*región mojada*), que como resulta bastante evidente no será todo el rectángulo $R = [0, a] \times [0, L]$ sino una cierta subregión Ω , y otra *región seca*, en donde supondremos con aproximación razonable que rige la presión atmosférica, $p = p_a = 0$ (pues los poros están llenos de aire). Nuestro interés se circunscribe pues a la descripción del flujo en la región Ω . La variable a considerar es $\pi = p + \rho gz$, que como hemos visto en la sección anterior ha de satisfacer la ecuación

$$\Delta\pi = 0. \quad (7.4)$$

De acuerdo con la teoría de la ecuación de Laplace, si conocemos el dominio y damos datos de contorno suficientes podremos hallar π , y con ella p y \mathbf{u} . Ahora bien, la región Ω puede ser descrita de la forma

$$\Omega = \{(x, z) \in R : z \leq \phi(x)\}. \quad (7.5)$$

La curva $z = \phi(x)$, *frontera libre* del problema, es una incógnita del problema, lo mismo que son π , p y \mathbf{u} . Nos encontramos pues con un problema de dominio variable o, por usar la terminología usual, un *problema de frontera libre*.

Procedamos ahora al examen de las condiciones de contorno que determinen unívocamente π . En los trozos de frontera fija procedemos de la forma usual e imponemos condiciones del tipo Dirichlet o Neumann. A través de la separación de los medios aplicaremos la ley de continuidad de la presión. Así, en la pared vertical izquierda, $\Gamma_1 = \{x = 0, 0 \leq z \leq L\}$, impondremos la continuidad de la presión a través del cambio de medio, lo que implica que

$$\pi(0, z) = \rho gH \quad \text{para } 0 \leq z \leq H. \quad (7.6)$$

Esto también nos dice que $\phi(0) = H$. En la pared derecha, $\Gamma_2 = \{x = a, 0 \leq z \leq L\}$, tendremos por un razonamiento análogo

$$\pi(a, z) = \rho gh \quad \text{para } 0 \leq z \leq h. \quad (7.7)$$

Por otra parte hemos de prever la posibilidad (que se demuestra correcta) de que $\phi(a) > h$, es decir que haya una parte de pared externa mojada. En esa parte, $\Gamma_3 = \{x = a, h \leq z \leq \phi(a)\}$, la presión p es cero de forma que

$$\pi(a, z) = \rho gz \quad \text{si } h \leq z \leq \phi(a). \quad (7.8)$$

En el fondo $\Gamma_4 = \{0 \leq x \leq a, z = 0\}$ imponemos condiciones de flujo deslizando o no penetración, es decir la componente vertical de la velocidad es nula, $w = 0$, que por la ley de Darcy lleva a

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = 0 \quad \text{si } 0 \leq x \leq a, z = 0. \quad (7.9)$$

Finalmente, examinamos la frontera libre $\Gamma = \{(x, \phi(x))\}$. Dado que la presión por encima es cero tenemos por la hipótesis de continuidad de la presión

$$\pi = \rho g \phi(x). \quad (7.10)$$

CONDICIÓN EXTRA EN LA FRONTERA LIBRE. Hemos completado así un conjunto suficiente de condiciones de contorno que permite calcular π si Γ es conocida. Pero habíamos dicho que Γ es desconocida. Necesitamos pues nuevos datos que determinen Γ . Estos toman la forma de una *condición de contorno extra* sobre Γ , que en este caso es la condición de flujo tangencial: \mathbf{u} ha de fluir tangente a la curva $z = \phi(x)$, o usando Darcy,

$$\frac{\partial \pi}{\partial \nu} = 0, \quad (7.11)$$

donde ν es la normal a Γ , en otras palabras $-\pi_x \phi'(x) + \pi_z = 0$. Un problema de Laplace en que damos a la vez datos de Dirichlet y Neumann esta sobredeterminado y no tiene en general solución. El hecho crucial es que *existe un único dominio Ω en que tal casualidad se da y este dominio es el que buscamos.*

Teoría. La teoría rigurosa demuestra que el problema (7.4)-(7.11) está bien propuesto en el marco de las soluciones débiles utilizando como técnica las *desigualdades variacionales* introducidas por G. STAMPACCHIA en los años 60, cf. [KS]. La solución fue obtenida en 1972 por C. BAIOCCHI, [Ba]. Los principales

resultados matemáticos pueden consultarse en [F] o [KS]. Diversas cuestiones de unicidad en geometrías generales y para el problema de evolución fueron resueltas por nuestro colega J. CARRILLO, cf. [Ca].

8 Filtraciones en el suelo. Ecuación de Boussinesq

Modelización. Examinemos ahora la teoría de la filtración de un líquido (en el caso típico agua) a través de un estrato poroso. De nuevo impondremos hipótesis simplificadoras, a saber: 1) el estrato, de altura H , se asienta sobre un lecho impermeable horizontal que suponemos es $z = 0$, 2) ignoramos la variable transversal y y 3) la masa de agua que se filtra ocupa una región del tipo

$$\Omega = \{(x, z) \in R : z \leq h(x, t)\}. \quad (8.1)$$

Este es un modelo de evolución. Se tiene por supuesto $0 \leq h(x, t) \leq H$ y la frontera libre h es también una incógnita del problema. En estas condiciones llegamos aún a un sistema de 3 ecuaciones con incógnitas u , w y p en un dominio variable, innecesariamente complicado: ecuación para la conservación de la masa de un fluido incompresible más las dos ecuaciones de Euler para la conservación del impulso en x y z , todo ello junto con las condiciones iniciales y de contorno.

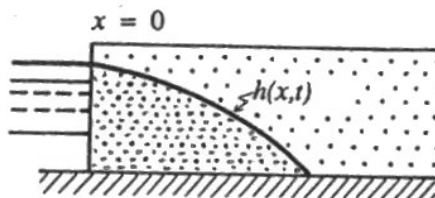


Figura 1.2. Filtración con inyección lateral

El cálculo práctico es mucho más sencillo tras unas simplificaciones que se adaptan bien a la realidad. Para ello introducimos la *hipótesis de pequeña inclinación*, es decir suponemos que h tiene pequeños gradientes, lo que se traduce en que el flujo tiene velocidad casi horizontal $\mathbf{u} \sim (u, 0)$, de forma que en la componente vertical de las ecuaciones del impulso

$$\rho \left(\frac{du_z}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_z \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g,$$

se desprecia el término inercial (el primer miembro) e integrando en z se tiene en primera aproximación $p + \rho gz = \text{constante}$. Calculamos esta constante en la superficie libre $z = h(x, t)$ en que $p = 0$ (la presión atmosférica) para obtener

$$p = \rho g(h - z). \quad (8.2)$$

En otras palabras, la presión se determina por la *aproximación hidrostática* y nos resulta un gradiente de presiones vertical en primera aproximación. El lector objetará que este método no es exacto y tendrá razón. Pero, si examina los resultados computados, habrá de admitir que la aproximación comete errores mínimos a la hora de calcular la altura $h(x, t)$, que es nuestro objetivo, y simplifica el sistema hasta hacerlo fácilmente integrable. Este difícil equilibrio es precisamente el meollo de la modelización. Reescribamos ahora la ley de conservación de masa. Tomamos una sección $S = (x, x + a) \times (0, C)$. Se tiene

$$m \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+a} \int_0^h dy dx = - \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl, \quad (8.3)$$

donde m es la porosidad del medio, fracción de volumen disponible para el paso del fluido, y \mathbf{u} es la velocidad dada por la ley de Darcy

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho gz). \quad (8.4)$$

En la superficie lateral derecha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \approx (u, 0) \cdot (1, 0) = u$ que es $-(k/\mu)p_x$, mientras en la izquierda da $-u$. Utilizando la fórmula para p y diferenciando en x se tiene

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} h dz. \quad (8.5)$$

Obtenemos así la *ecuación de Boussinesq*

$$h_t = \kappa (h^2)_{xx} \quad (8.6)$$

con la constante $\kappa = \rho g k / 2m\mu$. Esta ecuación fundamental en el estudio del flujo de aguas subterráneas fue propuesta por J. BOUSSINESQ en 1903. Es una variante no lineal de la ecuación del calor. Hemos realizado la proeza de simplificar el problema consistente en un sistema de ecuaciones planteado en un dominio variable obteniendo una sola ecuación que determina la frontera libre. A partir de h calculamos la presión p mediante (8.2) y luego la velocidad \mathbf{u} mediante la ley de Darcy.

Extensión. La ecuación de Boussinesq se generaliza a varias dimensiones de espacio como

$$h_t = \kappa \Delta(h^2). \quad (8.7)$$

En dos dimensiones representa el movimiento de una capa de agua sobre un lecho impermeable horizontal sin la hipótesis de simetría a lo largo del eje z . El lector es invitado a deducir la ecuación de filtración en este caso.

Cuando existen en el estrato entradas de agua (por recarga, natural o artificial) o salidas (por bombeo), la ecuación toma la forma

$$h_t = \kappa \Delta(h^2) + f, \quad (8.8)$$

donde la función $f(x, z, t)$ refleja estos efectos, siendo positiva la contribución de la recarga, negativa la del bombeo, $f = R - P$. En un contexto idealizado podemos suponer efectos puntuales, lo que da lugar a masas de Dirac, con la consiguiente dificultad matemática.

Notas. 1) La hipótesis de pequeña inclinación, con la consiguiente fórmula hidrostática para la presión, es atribuida al científico francés DUPUIT, [Du]. Como hemos visto implica que las líneas equipotenciales son verticales, lo que es experimentalmente correcto salvo en situaciones extremas. La *aproximación de Dupuit* es un útil fundamental en el estudio de los flujos de aguas subterráneas, pues el sistema original es de difícil análisis.

2) Nótese el curioso hecho de que hemos encontrado en un problema de filtración de fluidos el mismo tipo de ecuación del calor no lineal que se utiliza en el transporte de calor a muy altas temperaturas, [ZR], un contexto totalmente distinto. De nuevo vamos a encontrar tal modelo con exponente general a continuación en el estudio de los fluidos compresibles. Una prueba más de la versatilidad de los modelos matemáticos.

9 Fluido compresible en un medio poroso

Modelización. Utilizamos las leyes de los medios porosos para describir el flujo de un gas en un medio poroso despreciando la gravedad. Se tienen las ecuaciones

$$\begin{cases} -\partial_t(m\rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p. \end{cases} \quad (9.1)$$

Este es un sistema aún indeterminado. Lo cerramos mediante una hipótesis termodinámica, que en el caso más simple es una γ -ley para el gas:

$$p = c\rho^\gamma, \quad \gamma \geq 1. \quad (9.2)$$

Recordemos que $\gamma = 1$ para procesos isotermos y $\gamma > 1$ para procesos adiabáticos. En los gases podemos despreciar el término de gravedad. Con m , k y μ constantes queda:

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{kc}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla \rho^\gamma), \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{ck\gamma}{m\mu(\gamma+1)} \Delta(\rho^{\gamma+1}). \quad (9.4)$$

Las constantes no influyen, ya que podemos hacerlas desaparecer por cambio de escala en las variables. Así llegamos a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta(\rho^m). \quad (9.5)$$

Se tiene $m = \gamma + 1 > 1$. En el caso isoterma $\gamma = 1$ de modo que $m = 2$ y volvemos a encontrar la ecuación de Boussinesq. En el caso adiabático tenemos $\gamma \approx 1.4$ de modo que $m \approx 2.4$, aún mayor. Desde el punto de vista matemático no hay ningún inconveniente en tomar un m cualquiera mayor que 1 (algunas propiedades menos esenciales dependen de si $1 < m < 2$, $m = 2$ ó $m > 2$). En general esta ecuación con $m > 1$ recibe el nombre de *ecuación de los medios porosos*, (EMP).

Extensión. El modelo anterior puede generalizarse aún a la llamada *ecuación de filtración*

$$u_t = \Delta \Phi(u), \quad (9.6)$$

donde Φ es una función real continua y creciente. Recuérdese que la ecuación es clasificada como de tipo parabólico siempre que $\Phi'(u) > 0$. En general aparecen funciones Φ que no son estrictamente crecientes e incluso pueden tener discontinuidades de salto. Aún así se mantiene en cierto sentido el tipo parabólico ya que $\Phi'(u) \geq 0$, y se dice que la ecuación es *degenerada parabólica*.

Se propone al lector deducir una ecuación de filtración del tipo (9.6) con un término suplementario cuando en la derivación anterior: 1) no se desprecia el término de gravedad, 2) se supone que el gas tiene de ley barotrópica general, $p = p(\rho)$, y 3) se supone que μ es función de ρ .

Teoría. El segundo capítulo del presente trabajo está dedicado a exponer los principales resultados y características del análisis matemático de esta ecuación, cuyo caso $m = 2$ es la ecuación de Boussinesq de la sección precedente.

10 Filtración de dos fluidos inmiscibles. Ecuaciones utilizadas en la extracción de petróleo

Los problemas en medios porosos tienen una gran variedad de aplicaciones y dan lugar a diversos tipos de problemas matemáticos. Veamos a continuación un modelo multifase de interés en la ingeniería, a saber, el flujo de agua y aceite en los sedimentos petrolíferos. Más en general, el modelo se aplica al flujo de mezclas de dos fluidos inmiscibles, uno que moja y otro que no, a través de un medio poroso.

Modelización. La situación se puede describir por medio del *esquema de Muskat y Leverett* (propuesto por M. MUSKAT y M.C. LEVERETT en los años 30), que se basa en las leyes físicas siguientes:

(i) La ley de conservación de masa para las dos fases, que se escribe

$$\partial_t(m \rho_1 s_1) + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0, \quad \partial_t(m \rho_2 s_2) + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) = 0, \quad (10.1)$$

donde los índices 1 y 2 corresponden respectivamente al agua y al aceite y la nueva variable s_i es la *saturación* de la fase i , $i = 1, 2$, que se define como el volumen relativo ocupado por cada fase dentro del volumen de los poros. Se tiene pues que

$$s_1 + s_2 = 1, \quad (10.2)$$

de modo que podemos tomar $s = s_1$ como incógnita y despejar $s_2 = 1 - s$. Las \mathbf{u}_i son las descargas específicas (las \mathbf{q}_i de la Sección 1.4) y m es la porosidad. Además si suponemos los fluidos aproximadamente incompresibles podemos cancelar las densidades ρ_1, ρ_2 de las ecuaciones, que quedan así para m constante

$$m \partial_t s + \operatorname{div}(\mathbf{u}_1) = 0, \quad m \partial_t(1 - s) + \operatorname{div}(\mathbf{u}_2) = 0. \quad (10.3)$$

(ii) Una ley de Darcy generalizada

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{K}{\mu_1} f_1(\nabla p_1 + \rho_1 g \nabla z), \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{K}{\mu_2} f_2(\nabla p_2 + \rho_2 g \nabla z), \quad (10.4)$$

donde μ_i es la *viscosidad dinámica*, p_i la *presión*, K la *permeabilidad absoluta* del medio poroso, f_i la *permeabilidad relativa*.

(iii) La relación de *capilaridad* entre las presiones

$$p_2 - p_1 = p_c, \quad p_c = \gamma \sqrt{\frac{m}{K}} J = p_0 J, \quad (10.5)$$

donde γ es la *tensión interfacial* y J es la *presión capilar* adimensional. La capilaridad es un fenómeno importante en la teoría de los fluidos en medios porosos que tiene aquí su primera aparición.

Suponemos que el medio es homogéneo y que todos los parámetros son constantes. En el modelo clásico de MUSKAT y LEVERETT de fluidos bifásicos, cf. [BER], se supone que tales funciones son universales, es decir que son funciones idénticas de la saturación s para todos los procesos en el mismo medio poroso.

$$f_1 = f_1(s), \quad f_2 = f_2(s), \quad J = J(s). \quad (10.6)$$

Tales funciones universales pueden entonces ser halladas mediante experimentos adecuados, dado que no existe una teoría que deduzca tales funciones de los principios fundamentales de la física. Este es un paso fundamental en la modelización que se da con cierta frecuencia en la ingeniería. Cuando se adopta tal aproximación al problema es pues de crucial importancia disponer de la suficiente evidencia experimental sobre las *leyes constitutivas* postuladas. En este caso el lector puede consultar tal evidencia en la literatura, cf. [Be], [BER]. Una vez conocidas, el sistema de ecuaciones queda cerrado y permite en principio hallar las velocidades, presiones y saturación. Por supuesto necesitamos algunos datos iniciales y de contorno. Así se pide la condición inicial para la saturación del agua

$$s(\mathbf{x}, 0) = s_0(\mathbf{x}) \quad (10.7)$$

junto con condiciones de contorno para la saturación y una de las presiones o componentes normales de las velocidades de filtración

Transformación matemática. Ecuaciones medias. Para simplificar los cálculos despreciamos los efectos de gravedad. De las ecuaciones (10.3)-(10.5) se obtiene un sistema de ecuaciones para un *fluido ficticio medio* que se mueve con velocidad

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2. \quad (10.8)$$

La presión media es definida como

$$P = p_1 F(s) + p_2(1 - F(s)) - \int_s^1 p_c(s) F'(s) ds, \quad (10.9)$$

con

$$F(s) = \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu f_2(s)}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (10.10)$$

en vez de la elección en principio más natural, $\hat{p} = p_1 s + p_2(1 - s)$. La expresión (10.9) es complicada pero resulta ser la elección conveniente para continuar el cálculo. La *función de flujo fraccional* $F(s)$ es monótona no decreciente y tiene una forma característica en S con un punto de inflexión, y derivadas con cero múltiple en $s = s_*$ y $s = s^*$, $0 \leq s_* < s^* \leq 1$, $F(s_*) = 0$, $F(s^*) = 1$. Entonces se tiene que

$$p_1 = P + \int_s^1 p_c(s) F'(s) ds - p_c(s)(1 - F(s)),$$

$$p_2 = P + \int_s^1 p_c(s) F'(s) ds + p_c(s) F(s).$$

Llegamos así a las ecuaciones para las variables medias. De (10.3) se sigue que \mathbf{u} es incompresible

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (10.11)$$

De (10.4), (10.5) y (10.9) se deriva una “ley media de Darcy”

$$\mathbf{u} = -K \phi(s) \nabla P, \quad \phi(s) = \frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2}. \quad (10.12)$$

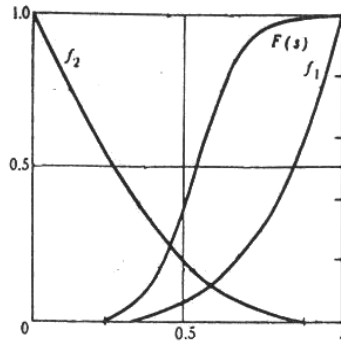


Figura 1.3. Funciones de permeabilidad relativa y función de Buckley-Leverett típicas

A ello se añade la ley de evolución para la saturación que toma la forma

$$\partial_t(m s) + \operatorname{div}(F(s)\mathbf{u}) = \frac{Kp_0}{\mu_2} \Delta \Phi(s), \quad (10.13)$$

especie de ecuación del calor no lineal donde la no linealidad

$$\Phi(s) = - \int_0^s F(\xi) f_2(\xi) J'(\xi) d\xi \quad (10.14)$$

es una función monótona no decreciente, idénticamente igual a cero para $0 \leq s \leq s_*$, que tiene múltiples derivadas nulas en $s = s_*$ y $s = s^*$. De este sistema podemos eliminar \mathbf{u} del modo siguiente. De (10.11) y (10.12) se deduce que

$$\operatorname{div}(K\phi(s)\nabla P) = 0. \quad (10.15)$$

Por otra parte, de (10.12) y (10.13) se tiene que

$$\partial_t(m s) = \operatorname{div}\left[\frac{K f_1}{\mu_1} \nabla P\right] + \frac{Kp_0}{\mu_2} \Delta \Phi(s). \quad (10.16)$$

Queda pues reducido el problema a resolver el sistema (10.15), (10.16) para P y s , denominado *sistema saturación-presión*, problema matemático formidable que combina ecuaciones de tipo elíptico y parabólico degenerados.

Situación límite. Normalizando la función Φ y pasando a variables adimensionales, de modo que

$$\varphi(s) = \frac{\Phi(s)}{\Phi(s^*)}, \quad \mathbf{u} = \frac{L}{T} \mathbf{V}, \quad \theta = \frac{t}{T}, \quad \xi = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad (10.17)$$

reducimos el sistema (10.11), (10.13) a la forma

$$m \frac{\partial s}{\partial \theta} + \mathbf{V} \cdot \nabla F(s) = \varepsilon \Delta \varphi(s). \quad (10.18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (10.19)$$

donde los operadores ∇ y Δ son expresados via variables adimensionales y el parámetro adimensional ε está determinado como

$$\varepsilon = \frac{Kp_0 T}{\mu_2 L^2} \Phi(s^*). \quad (10.20)$$

Las estimaciones muestran que ε es un parámetro pequeño lo que da lugar a capas límite. En el resto del dominio tendremos en el límite $\varepsilon = 0$ una ecuación hiperbólica de primer orden del tipo

$$m \frac{\partial s}{\partial \theta} + \mathbf{V} \cdot \nabla F(s) = 0, \quad (10.21)$$

como las encontradas en la cinética de gases. Se puede ver entonces (10.15) como una ecuación regularizada de (10.21) por viscosidad.

Caso de velocidad media nula. En circunstancias especiales se puede suponer que la velocidad media es nula, como en los flujos que proceden por *embebimiento capilar*. Entonces la ecuación (10.16) queda en la forma

$$\frac{\partial(m s)}{\partial t} = \frac{K p_0}{\mu_2} \Delta \Phi(s), \quad (10.22)$$

que es otra forma de la *ecuación de filtración* aparecida en la sección anterior.

REFERENCIAS: [BER], [CJ], [EW1], [GMT].

11 Ecuaciones del medio no saturado

Queremos ahora analizar un tipo de flujo bifásico en que podemos simplificar notablemente el planteamiento matemático dada la diferencia de comportamiento de los dos medios. Se trata de un problema que se origina en el estudio del flujo de aguas subterráneas, a saber, la filtración de aguas en el medio no saturado. El flujo de agua en los acuíferos se suele distribuir en primera aproximación en dos zonas diferenciadas, una inferior llamada *zona saturada* en que el medio poroso está completamente ocupado por el agua y de cuya descripción nos hemos ocupado, y una superior llamada la *zona no saturada* en que coexisten el aire y el agua. Esta última es una zona de gran importancia para las ciencias aplicadas porque en ella suceden fenómenos físicos, químicos y biológicos de gran interés para la vida.

Modelización. Se desea describir una filtración no estacionaria considerando al agua como incompresible. Despreciamos los posibles efectos energéticos debidos a diferencias de temperatura. La coexistencia de ambas fases da lugar a fenómenos de diferencia de presión en las interfases entre ambos medios, la

presión capilar, de modo que, como ya hemos visto,

$$p_{aire} - p_{agua} = p_c \quad (11.1)$$

y $p_c > 0$ depende de la curvaturas del menisco formado. Se sigue de ello que la presión intersticial es menor que la atmosférica. A la hora de describir el medio se introduce la variable θ , contenido de agua del medio, que es el tanto por ciento de agua en cada volumen elemental representativo

$$\theta = \frac{\text{Volumen de agua en un VERMP}}{\text{Volumen total del VERMP}} \quad (11.2)$$

y se relaciona con la saturación de agua por la fórmula

$$s = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (11.3)$$

con θ_s contenido de humedad del medio saturado y θ_r humedad en saturación irreductible. A efectos matemáticos la diferencia es inesencial. Evidentemente, en el medio no saturado $0 < \theta < 1$. De acuerdo con las hipótesis fundamentales del medio continuo de que hablamos en la Sección 4 suponemos idealmente que θ es una función continua definida en todo el medio no saturado. Veamos ahora el sistema de ecuaciones que rigen los flujos en el medio no saturado. Se tiene la ley de continuidad

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = r, \quad (11.4)$$

donde r es un posible término de fuente o sumidero. Tenemos además una ley de Darcy

$$\mathbf{q} = -K(\theta)\nabla H, \quad H = -\Phi + z, \quad (11.5)$$

donde $K(\theta)$ es la *conductividad hidráulica*, H es el *potencial total*, que es suma del *potencial capilar de succión* $-\Phi$ y del *potencial gravitacional*. El sistema se cierra con una ley de dependencia entre Φ y s llamada *curva de retención*,

$$s = F(\Phi), \quad (11.6)$$

derivada del estudio de la influencia de las presiones capilares, que junto con (11.3) permite relacionar θ y Φ . Así se llega a la *ecuación de Richards*

$$\frac{\partial \theta(\Phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\theta(\Phi)) \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial z} K(\theta(\Phi)) + r, \quad (11.7)$$

que es una generalización de la ecuación de filtración (9.6), la cual se obtiene cuando se desprecia el término convectivo de gravedad, el término fuente y escribimos Φ en función de θ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\theta) \nabla \Phi(\theta)) = \nabla \cdot (D(\theta) \nabla \theta) = \Delta F(\theta), \quad (11.8)$$

con $D(\theta) = K(\theta)\Phi'(\theta)$ y $F'(\theta) = D(\theta)$. La formulación más detallada tiene en cuenta los flujos individuales de la fase líquida y la gaseosa y la deformación de la matriz sólida. Con respecto al tratamiento de los flujos bifásicos que se ha expuesto en la sección precedente la ecuación de Richards puede verse como un límite cuando suponemos que el aire está a presión constante (atmosférica), $p_1 = 0$.

El concepto de potencial capilar para medios no saturados fue introducido por BUCKINGHAM, físico americano, en 1907. La definición del potencial total como suma del potencial capilar y del gravitacional se debe a L. RICHARDS, 1931, quien escribió el sistema de ecuaciones.

REFERENCIAS: [Be], [G], [R], [Sm].

12 Transporte de contaminantes

Veamos a continuación un sistema simple que describe el transporte de un contaminante disuelto en agua que fluye a través de un medio poroso (como el suelo) en régimen saturado. En condiciones estacionarias tenemos las ecuaciones de conservación de masa y de Darcy para el flujo de agua

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = r, \quad \mathbf{u} = -\frac{K}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z), \quad (12.1)$$

donde las notaciones son como en secciones precedentes, con r una fuente o sumidero de fluido. El transporte de contaminante disuelto en el agua está gobernado por una ecuación de difusión que escribimos en términos de la variable c , concentración de contaminante:

$$\frac{\partial(\theta c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} c) - \nabla \cdot (\theta \mathbf{D} \nabla c) + \beta \theta c = F(c). \quad (12.2)$$

Aquí $\theta = m \rho$ con m la porosidad, \mathbf{D} es el tensor de dispersión, β es la velocidad de reacción y F es un término fuente/sumidero. El sistema se resuelve añadiendo condiciones iniciales y de contorno adecuadas.

Para más detalles ver [Ew2], también [BV]. Estas referencias discuten los métodos numéricos empleados en la práctica.

13 Sistemas con interacción flujo-energía

Como es de rigor, en la mecánica de fluidos compresible las ecuaciones dinámicas han de ser acopladas con las leyes termodinámicas para obtener un sistema completo de ecuaciones que describa los flujos cuando la variación de temperaturas y presiones implica que existe una interacción no despreciable entre el transporte de masa y el flujo de energía. Planteamos a continuación un modelo que describe tal interacción. Tomamos la ley de conservación de masa usual

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (13.1)$$

y la ley de Darcy

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla P, \quad (13.2)$$

y les añadimos la ley de conservación de la energía

$$(\rho C_p) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (13.3)$$

donde $T(x, t)$ es el campo de temperaturas; C_p es el calor específico a presión constante y λ es la conductividad térmica y ambos pueden ser funciones de T . Finalmente, el sistema se cierra mediante la ley de estado

$$P = \rho RT, \quad (13.4)$$

donde R es la constante de los gases. Estos modelos son de utilidad en la industria aeronáutica y espacial para describir el flujo compresible con transferencia de calor en un medio poroso sometido a presurización y despresurización. Se supone por mor de la simplicidad que los materiales son isotrópicos, homogéneos y no deformables y que los gases son ideales.

Existen asimismo modelos incompresibles en que la ley de conservación (13.1) se escribe $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y el acoplamiento entre la ecuación de la energía y la ley de Darcy sucede a través de la dependencia de los parámetros, especialmente μ , respecto a la temperatura, quedando por ejemplo en forma normalizada

$$\mu(T) \mathbf{u} = -K(\nabla p - \text{Ra} \rho(T) \mathbf{e}_z), \quad (13.5)$$

donde Ra es el número de Rayleigh de la filtración y \mathbf{e}_z es el vector unitario vertical.

REFERENCIA: [BPB].

14 Límites de validez de la ley de Darcy

La ley de Darcy es una ley experimental y su deducción racional sucede bajo hipótesis de gran simplificación. Siendo sus aplicaciones muy variadas es natural que los estudiosos de los fluidos se pregunten por sus límites de validez. Fue O. REYNOLDS (1883) quien primero observó que el hecho de que el flujo proceda en forma ordenada, es decir en forma laminar, depende de la velocidad, más precisamente de los valores relativos de la velocidad, la viscosidad y el tamaño medio de los granos, cantidades que se combinan para dar un número de Reynolds adaptado al flujo en un conducto poroso según la fórmula

$$\text{Re} = \frac{a\rho u}{\mu}, \quad (14.1)$$

siendo a el tamaño medio de los granos y $u = |\mathbf{u}|$. En la realidad se observan fuertes desviaciones respecto a la dependencia lineal de \mathbf{q} respecto a $\nabla\pi$ para valores de Re desde 100 en adelante, que se suelen explicar por la aparición de un régimen turbulento. Se han propuesto entonces fórmulas del tipo

$$\nabla\pi = -\frac{\mu}{k} f(\text{Re}, m) \mathbf{u} \quad (14.2)$$

en que $f \sim c$ para $\text{Re} \sim 0$ mientras $f \sim u$ para $\text{Re} \rightarrow \infty$ (ley cuadrática del flujo turbulento). Un ejemplo es la llamada ley de FORCHHEIMER

$$-\frac{k}{\mu} \nabla p = \mathbf{u} + \frac{\beta k^{1/2} \rho}{\mu} u \mathbf{u}. \quad (14.3)$$

De hecho las anomalías empiezan para Re del orden de 10 en adelante, zona de transición entre el flujo laminar y el turbulento. Por el contrario, para Re menores el flujo es laminar, las fuerzas viscosas predominan y la ley de Darcy describe perfectamente al flujo. Por último, en el extremo inferior del rango de números de Reynolds, para $\text{Re} \sim 0$, vuelven a presentarse anomalías en forma de un *gradiente hidráulico mínimo* por debajo del cual el flujo es prácticamente nulo. La gráfica de la correspondencia $\nabla\pi \mapsto \mathbf{u}$ tiene un tramo horizontal $0 \leq \nabla\pi \leq a$ con $\mathbf{u} = 0$.

REFERENCIAS: [BER], [Be], [Fl], [V1].

15 Nota cultural

Siendo Darcy un nombre poco común, resulta curioso que exista otro científico muy famoso de nombre análogo (con distinta grafía). Se trata de D'ARCY

WENTWORTH THOMPSON, cuyo libro *On Growth and Form*, 1917, [DWT] es una piedra angular de la morfogénesis, estudio de las formas naturales y su origen. Al contrario de nuestro Darcy de Dijon, D.W.T., escocés, fue académico, profesor de la Univ. de St Andrews. La teoría de la filtración y la morfogénesis son áreas de la ciencia en principio alejadas, pero ambas nos pueden servir de ejemplo de la amplitud de intereses de la matemática actual. Estas disciplinas estuvieron en su origen bastante lejos del mundo del análisis matemático y han venido a ser al final del siglo XX objeto de activo interés de la matemática y el cálculo científico. Hace sólo 30 años no existían aún los métodos matemáticos necesarios para proceder al estudio eficiente de estos problemas.

Referencias del capítulo

Estas referencias, seleccionadas de una extensa bibliografía, recogen el material utilizado para confeccionar el presente texto.

TEXTOS SOBRE LOS FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

- [BER] G.I. BARENBLATT, V.M. ENTOV, V.M. RYZHIK, “Flow of fluids through natural rocks”, Kluwer Academic Publ. (1990).
- [Be] J. BEAR, “Dynamics of Fluids in Porous Media”, Dover, New York, 1972.
- [BV] J. BEAR, A. VERRUIJT, “Modeling ground-water flow and pollution”, D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, 1987.
- [CJ] G. CHAVENT, J. JAFFRE, “Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. Single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media”, Studies in Contemporary Mathematics and its Appl. **17**, North-Holland Publ. Co., 1986.
- [Ew1] R. EWING, “The mathematics of reservoir simulation”, Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1983.
- [GMT] G. GAGNEUX, M. MADAUNE-TORT, “Analyse mathématique des modèles non linéaires de l’ingénierie pétrolière”, Springer Vlg, Berlin, 1996.
- [Gr] R. A. GREENKORN, “Flow Phenomena in Porous Media”, Marcel Dekker, New York, 1983.
- [He] R. HELMIG, “Multiphase flow and transport processes in the subsurface”, Springer, New York, 1996.

- [Le] T. C. LEE, "Applied mathematics in Hydrogeology", Lewis Pub., Boca Raton, Fa, 1999.
- [Mu] M. MUSKAT, "The flow of homogeneous fluids through porous media", McGraw-Hill, New York, 1939.
- [Pc] D. W. PEACEMAN, "Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation", Elsevier, New York, 1977.
- [PK] P. YA. POLUBARINOVA-KOCHINA, "Theory of Ground Water Movement", Princeton Univ. Press, Princeton, 1962.
- [Sh] M. SAHIMI, "Flow and transport in porous media and fractured rock", VCH, Weinheim, New York, 1995.
- [W] M. F. WHEELER, "Environmental studies", IMA Volumes in Maths and its Applications, Springer, New York, 1996
- [XS] XIAO SHUTIE, editor, "Flow and transport in porous media", World Scientific, Singapore, 1992.

ALGUNOS ARTÍCULOS SOBRE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

- [BGPV] G.I. BARENBLATT, J. GARCIA-AZORERO, A. DE PABLO, J.L. VAZQUEZ, *The mathematical model for two-phase non-equilibrium flows in porous media*, in "Mathematical modelling of flow through porous media", A. Bourgeat, C. Carasso, S. Luckhaus, A. Mikelic eds., World Scientific, 1995, pages 59-74.
- [BGPV2] G.I. BARENBLATT, J. GARCIA-AZORERO, A. DE PABLO, J.L. VAZQUEZ, *Mathematical model of the non-equilibrium water-oil displacement in porous strata*, *Applicable Analysis*, **65** (1997), 19-45.
- [BVa] G.I. BARENBLATT, J.L. VAZQUEZ, *On a new free boundary problem for unsteady flows in porous media*, *European Jnl. Appl. Math.*, **9** (1998), 37-54.
- [BPB] A. BOUHOUC, M. PRAT, S. BORIES, *Transient compressible flow and heat transfer within a heterogeneous porous medium*, *Journal Thermophys. Heat Transfer* **9** (1995), pp. 144-150.
- [Ew2] R. EWING, *Computational Sciences in Environmental Applications*, en "Computational Science for the XXI Century", M.O. Bristeau et al. eds., John Wiley 1997. Pp. 250-259.
- [FG] P. FABRIE, TH. GALLOUET, *Modelling wells in porous medium flows*, aparecerá.

- [Fl] V.A. FLORIN, *Earth compaction and seepage with variable porosity, taking into account the influence of bound water*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Otdel. Tekhn. Nauk, No. bf 11 (1951) pp. 1625-1649 (in Russian).
- [G] B. GILDING, *Qualitative mathematical analysis of the Richards equation*, Transport in Porous Media, **5** (1991), 651–666.
- [Sm] F.J. SAMPER, *Flujo de agua y transporte de masa en el medio no saturado: estado del arte*, en “Curso Internacional de hidrología subterránea”, F. Anguita et al. eds., CIMNE, Barcelona, 1991.
- [V1] J.L. VAZQUEZ, *The free boundary problem for the heat equation with fixed gradient condition*, en “Free boundary problems, theory and applications”, Pitman Research Notes in Mathematics Series **363** (Actas de Zakopane Congress '95), M. Niezgodka and P. Strzelecki eds., Longman, 1996.

SOBRE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

- [CM] A.J. CHORIN, J.E. MARSDEN, “A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics”, Springer-Verlag, 1980
- [LL] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, “Mecánica de Fluidos”, Reverté, Barcelona, 1991.
- [Li] A. LIÑÁN MARTÍNEZ, “Mecánica de fluidos”, Publicaciones ETSI Aeronáuticos, Un. Politécnica de Madrid, 1967.
- [PL] P.L. LIONS, “Introduction to Mathematical Fluid Mechanics”, 2 volúmenes, Oxford Univ. Press, 1995 y 1998.
- [St] V.L. STREETER, “Handbook of Fluid Dynamics”, McGraw-Hill, New York, 1982.
- [T] R. TEMAM, “Navier-Stokes equations”, North-Holland, New York, 1979.
- [V2] J.L. VAZQUEZ, “Lecciones de Mecánica de Fluidos”, Notas de Curso, Univ. Autónoma de Madrid, 1997.
- [ZR] YA. B. ZEL'DOVICH, YU. P. RAIZER, “Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena”, vol. II, Academic Press, New York, 1966.

SOBRE LA HOMOGENEIZACIÓN

- [Ho] U. HORNUNG, *Applications of the homogeization method to flow and transport in porous media*, in [XS], páginas 167–222.
- [Ta] L. TARTAR, *Incompresible fluid flow in a porous medium - convergence of the homogenization process*, en “Non-Homogeneous Media and Vibration

Theory”, E. Sánchez-Palencia editor, Lecture Notes in Physics **127** Springer, Berlin, 1980. Páginas 368–377.

SOBRE EL PROBLEMA DEL DIQUE

[B] C. BAIOCCHI, *Su un problema a frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, Ann. mat. Pura Appl., **92** (1972), pp. 107-127.

[Ca] J. CARRILLO, *An Introduction to Free Boundary Problems*, en “Current Trends in Applied Mathematics”, M.A. Herrero y E. Zuazua eds., Editorial Univ. Complutense, 1996.

[F] A. FRIEDMAN, “Variational Principles and Free Boundary Problems”, Wiley Interscience, New York, 1982.

[KS] D. KINDERLEHER, G. STAMPACCHIA, “An Introduction to Variational Inequalities and their Applications”, Academic Press, New York, 1980.

SOBRE LA TEORÍA DE ECUACIONES

[GT] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, “Elliptic Partial Differential Equations of Second Order”, Springer-Verlag, New York, 1983.

[LSU] O.A. LADYZHENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL’CEVA, “Linear and quasilinear equations of parabolic type”, Izd. Nauka, Moscow, 1967.

REFERENCIAS HISTÓRICAS

[Dr] H. DARCY, “Les fontaines publiques de la ville de Dijon”, V. Dalmont, Paris, 1856, pp. 305-401.

[DT] D’ARCY W. THOMPSON, “On Growth and Form”, Cambridge Univ. Press, 1917. En español: “Crecimiento y forma”, H. Blume ed., Madrid, 1980.

[Du] J. DUPUIT, “Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables”, Dunod, Paris.

[R] L. RICHARDS, *Capillary conduction of liquids in porous media*, Physics **1** (1931), pp. 318-333.

Capítulo 2: Estudio Matemático de la EMP

Dedicamos este capítulo al estudio matemático de la EMP

$$u_t = \Delta(u^m), \quad m > 1, \quad (0.4)$$

como modelo del que existe una extensa teoría matemática, que admite interesantes comparaciones con la bien conocida teoría de ecuación del calor clásica y donde aparecen en forma muy ilustrativa algunos de los conceptos matemáticos más interesantes y novedosos de la problemática de fluidos en medios porosos, como las soluciones generalizadas, las fronteras libres y la relevancia de los regímenes autosemejantes como límites asintóticos.

1 Primeras ideas sobre el análisis matemático.

Tomemos como paradigma el caso más simple, el exponente $m = 2$, en dimensión espacial $n = 1$, para tratar de mostrar los problemas y características más importantes. Podemos en este caso volver al problema de Boussinesq y tratar de hallar la solución u (altura de la frontera libre, y a partir de ella velocidad y presión). Tras añadir datos iniciales y de contorno convenientes para u , es de esperar que exista entonces una solución única. De hecho, la ecuación entra a primera vista dentro de la clasificación usual de las EDPs como ecuación parabólica por su semejanza con la ecuación clásica del calor, $u_t = u_{xx}$, y cumple de hecho la condición de parabolicidad en todos los puntos en que u es positiva, lo que nos da la esperanza de utilizar la teoría de *ecuaciones parabólicas cuasilineales* desarrollada en la segunda parte de este siglo, cf. el texto clásico [LSU]. Lamentablemente, deja de ser parabólica en los puntos en que $u = 0$, como el lector observará escribiéndola en la forma equivalente

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (1.1)$$

Ello tiene consecuencias no desdeñables. Una de ellas es que no tiene en general soluciones clásicas, aunque veremos que sí las tiene *generalizadas*. En realidad la fórmula (1.1) indica que la ecuación *degenera* en una ecuación de primer orden. El hecho de que la ecuación degenerada es (salvo constantes) $u_t = (u_x)^2$, una ecuación bien conocida de primer orden que se puede integrar por características,

explica la sorprendente *propiedad de propagación finita*, que se enuncia como sigue:

“Si el dato inicial $h(x,0)$ tiene soporte compacto también tiene soporte compacto la solución, $h(x,t)$, como función de x para todo $t > 0$ fijo”.

Este soporte crece con el tiempo. Se puede definir en consecuencia una *interfaz* o *frontera libre* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, que separa los conjuntos $\{u > 0\}$ (hasta donde se extiende la masa de agua) y $\{u = 0\}$ (la región seca). Digamos que tal propiedad es sorprendente en una ecuación en principio parabólica (pues es falsa para la ecuación del calor, modelo de tales ecuaciones), pero es bien natural para el problema físico que tratamos. En realidad la propiedad de velocidad de propagación infinita de la ecuación clásica del calor es físicamente un contratiempo en un modelo por otra parte tan bello y eficaz.

El método de análisis que adoptamos es el siguiente: un primer nivel elemental de estudio, previo a la construcción de una teoría general, consiste en obtener un número suficiente de soluciones explícitas o casi explícitas. Para ello se recurre a soluciones de formas especiales. He aquí los principales tipos particulares de solución a investigar:

(A) Funciones de una sola variable: $u = u(t)$, $u = u(x)$. Estas últimas se denominan *soluciones estacionarias*.

(B) Tipo *separación de variables*: $u = X(x)T(t)$.

(C) Tipo *ondas viajeras*: $u = f(x - ct)$, $x \in \mathbb{R}$.

(D) Tipo *soluciones autosemejantes*: $u = t^{-\alpha} f(xt^{-\beta})$.

Posteriormente se selecciona el tipo de problema inicial y/o de contorno que interesa, se introduce un concepto de solución generalizada motivado por nuestra experiencia con las soluciones especiales y se establece la existencia y unicidad de la solución, así como su estabilidad. Por último se analizan las propiedades específicas de tales soluciones, especialmente aquellas que tienen un significado de interés para las aplicaciones.

1 Ondas viajeras. Propiedad de propagación finita

Dejando al lector que investigue la existencia de soluciones de los dos primeros tipos, veamos con algún detalle la curiosa problemática planteada por las soluciones en forma de onda viajera

$$u = f(\eta), \quad \eta = x_1 - ct \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Este tipo de solución representa un onda que se desplaza en el tiempo paralelamente a sí misma a lo largo de un eje coordenado, aquí el x_1 . El parámetro c es la velocidad de la onda. Podemos suponer que $c \neq 0$, pues para $c = 0$ hallamos estados estacionarios que son más bien triviales como habrá comprobado el lector. Además podemos reducir el caso $c < 0$ al $c > 0$ por una simetría en la solución (sustituyendo $u(x, t)$ por $u(-x, t)$ se haya otra solución de la ecuación que se desplaza en sentido opuesto). Por último señalemos que las ondas viajeras son uni-dimensionales, es decir se toma como variable espacial uno de los ejes coordenados, por ejemplo el x_1 . Es evidente que mediante una rotación podemos hallar una onda que camine en cualquier dirección \mathbf{n} del espacio \mathbb{R}^n . Entonces valdría la fórmula (1.1) con $\eta = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct$.

Poniendo pues $c > 0$ fijo y sustituyendo la forma (1.1) en la ecuación $u_t = \Delta u^m$ se llega a

$$(f^m)'' + cf' = 0, \quad (1.2)$$

donde las primas indican derivadas respecto a η . Integrando una vez se tiene

$$(f^m)' + cf = K, \quad (1.3)$$

con constante de integración $K \in \mathbb{R}$. Estamos interesados en hallar un onda que avance contra una región vacía, es decir que para $\eta \gg 0$ queremos que $f = f' = 0$. Esta condición de contorno parece imponer la condición $K = 0$ con lo que (1.3) se reduce a

$$mf^{m-2}f' + c = 0, \quad (1.4)$$

que se puede integrar para obtener

$$\frac{m}{m-1}f^{m-1} = -c\eta + K_1. \quad (1.5)$$

• *Problemas inesperados. Fracaso del marco clásico.* Aparentemente hemos tenido completo éxito en la tarea de integrar la ecuación, pero este éxito se ve empañado inmediatamente cuando observamos que la fórmula (1.5) es incapaz de cumplir nuestra condición de contorno en $\eta = +\infty$. Más aún, nuestra solución se hace inevitablemente negativa para todo η grande, lo cual va contra la física del problema. Un matemático *conservador* se verá tentado de arrojar todo el cálculo por la borda. Por el contrario, una de las ideas motrices de la matemática aplicada es la idea de que no debemos abandonar sin más un buen cálculo, pues las dificultades encontradas son la puerta que nos abre el camino a un nuevo contexto en que podemos salvar lo obtenido y resolver en forma novedosa y útil el problema planteado. Abordaremos tal incursión en lo desconocido guiados por

la combinación de la experiencia matemática y la evidencia que proviene de las aplicaciones que se tienen en mente. Vemos a continuación como se materializa esta tarea en el caso presente.

La vía de solución es relativamente fácil (una vez hallada). Se denomina *estrategia del problema límite*: existe un cálculo próximo al nuestro que tiene sentido, realicemos este nuevo cálculo y pasemos al límite. Pasar al límite en modelos aproximados es, junto con la integración por partes, uno de los recursos clave de la matemática aplicada. En concreto tomamos como condición de contorno en (1.3)

$$f(\infty) = \varepsilon, \quad f'(\infty) = 0, \quad (1.6)$$

con lo que obtenemos para la constante K el valor $K = \varepsilon c > 0$. Entonces escribimos (1.3) como

$$f' = c \frac{\varepsilon - f}{m f^{m-1}} \quad (1.7)$$

que es una E.D.O. de variables separadas y se puede integrar fácilmente, al menos gráficamente. Para $m = 2$ la integración es explícita y da

$$-c\eta + K_1 = 2 \int \frac{f df}{f - \varepsilon} = 2f + 2\varepsilon \log(f - \varepsilon). \quad (1.8)$$

Podemos poner $K_1 = 0$ sin pérdida de generalidad. Dibuje el lector la gráfica para convencerse de que hemos obtenido una onda que une los niveles $f = \infty$ para $\eta = -\infty$ con $f = \varepsilon$ para $\eta = \infty$. Podemos pues pasar el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. El resultado es sorprendente pues no obtenemos (1.5) sino

$$2f = (-c\eta)_+ = \max\{-c\eta, 0\}. \quad (1.9)$$

Es evidente que este límite tiene sentido físico. Tiene el inconveniente de no ser una solución de la ecuación (0.4) en el sentido clásico, pues tiene derivada discontinua en la línea $\eta = 0$. Nosotros sostenemos que es una *buena solución* y para justificar esta pretensión introduciremos en la sección 3 un concepto de “solución generalizada” o “solución débil” que se aplica en un contexto general y permite aceptar en particular la fórmula (1.9). En general para todo $m > 1$ la solución límite es

$$\frac{m}{m-1} f^{m-1} = (c(-\eta) + K_1)_+, \quad (1.10)$$

lo cual es un poquito más difícil de demostrar pero no imposible si se utiliza el plano de fase adecuadamente. Es de señalar que la función $(m/(m-1))f^{m-1}$ coincide en la derivación del modelo de gases en medios porosos (sección 9)

con la presión y la función $-mf^{m-2}f'$ con la velocidad. Así pues, las ondas viajeras son *frentes de velocidad constante* c cuando $u > 0$ y tienen velocidad nula en la parte vacía (donde el valor asignado por nosotros a la velocidad es en realidad irrelevante). Ello recuerda, y con razón, las soluciones discontinuas de la dinámica de gases, cf. [CM], [LL].

Analizada la solución geoméricamente, se observa que estamos en presencia de un fenómeno de propagación a velocidad finita y coexisten dos regiones, la ocupada por el fluido y la vacía, separadas por una *frontera libre* sobre la cual la solución no es regular. Todas estas propiedades son contrarias a lo que sucede en la ecuación del calor lineal en que no aparece ninguna frontera libre que separe una región ocupada de una vacía. De hecho todo el espacio está más o menos ocupado por las soluciones de la ecuación lineal, lo que impide visualizar con nitidez los frentes de propagación que son de gran interés para el investigador atento a la aplicación.

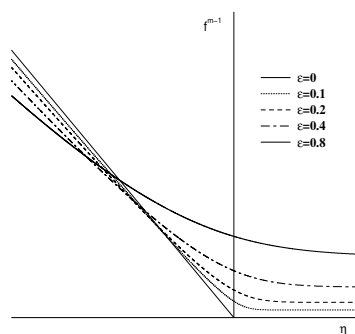


Figura 2.1. Ondas viajeras con $\varepsilon > 0$ y su límite

2 Soluciones autosemejantes. Solución fundamental de Barenblatt

Este tipo de soluciones es de estudio menos trivial. Tienen aún mayor importancia en la teoría general, en realidad la autosemejanza es una propiedad de importancia capital en la mecánica de fluidos. Ser autosemejantes quiere decir que se pueden escribir como soluciones constantes en el tiempo tras un

cambio de escala (o *zoom*), como sigue:

$$u' = f(x') \quad \text{con} \quad u' = ut^\alpha, \quad x' = xt^{-\beta}. \quad (2.1)$$

Los exponentes α y β se llaman *exponentes de semejanza*. La función f se llama el *perfil*. Hay diversos exponentes α y β para los que existen soluciones, pero queremos buscar la *solución fundamental*, algo parecido a la solución fundamental de la ecuación del calor lineal, que es, como todos saben:

$$U(x, t) = ct^{-n/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \quad (2.2)$$

Vemos que esta fórmula es autosemejante y tiene exponentes de semejanza: $\alpha = n/2, \beta = 1/2$. Para la solución de la EMP los pasos para buscar la solución son:

- Tomar u autosemejante: $U(x, t) = t^{-\alpha} f(\eta)$, con $\eta = xt^{-\beta}$ y f función radial.

- Sustituir esta forma en la ecuación. Dado que

$$U_t = -\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) + t^{-\alpha} \nabla f(\eta) \cdot xt^{-\beta-1} (-\beta) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) - \beta t^{-\alpha-1} \nabla f(\eta) \cdot \eta,$$

y

$$\Delta(U^m) = t^{-\alpha m} \Delta_x(f^m)(xt^{-\beta}) = t^{-\alpha m} t^{-2\beta} \Delta_\eta(f^m)(\eta),$$

la ecuación $U_t = \Delta U^m$ equivale a

$$t^{-\alpha-1} (-\alpha f(\eta) - \beta \eta \cdot \nabla f(\eta)) = t^{-\alpha m-2\beta} \Delta f^m(\eta). \quad (2.3)$$

- Eliminar la dependencia del tiempo, para lo que es preciso imponer una 1ª relación de exponentes, a saber

$$\alpha(m-1) + 2\beta = 1, \quad (2.4)$$

lo que permite despejar un exponente (por ejemplo α) en función del otro. Para el perfil f nos queda una ecuación elíptica no lineal:

$$\Delta f^m + \beta \eta \cdot \nabla f + \alpha f = 0, \quad (2.5)$$

que depende aún del parámetro libre (β ó α , uno de los dos).

- Es preciso determinar aún cual es el valor adecuado del exponente libre. Para ello volvamos a la ecuación del calor clásica, en que $m = 1$ y la relación anterior da

$$\beta = 1/2, \quad \eta = x/\sqrt{t}. \quad (2.6)$$

Vimos más arriba que la solución fundamental corresponde a $\alpha = n/2$. ¿Cómo se obtiene esta segunda relación? Observamos primero que en el caso lineal la solución es la gaussiana, que es la única solución no negativa de la ecuación del calor *autosemejante* tal que $u \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Una propiedad más prometedora es la siguiente: satisface una ley de variación de la energía como sigue:

$$\frac{d}{dt} \int_B u \, dx = \int_B u_t \, dx = \int_B \Delta u \, dx = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} dS \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

cuando $r \rightarrow \infty$, donde $B = B_r(0)$ es la bola de radio r . Entonces, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \, dx = 0.$$

Esta es una ley de conservación, que quiere decir que la energía (llamada también masa) es un *invariante del movimiento*:

$$\int u(x, t) \, dx = C. \quad (2.8)$$

Copiamos la misma idea para la EMP:

$$\frac{d}{dt} \int_B u \, dx = \int_B u_t \, dx = \int_B \Delta u^m \, dx = \int_{\partial B} \frac{\partial u^m}{\partial n} dS \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

cuando $r \rightarrow \infty$. Lo aplicamos a la solución autosemejante y queda:

$$\int U(x, t) \, dx = \int t^{-\alpha} f(xt^{-\beta}) \, dx = t^{-\alpha} t^{\beta n} \int f(\eta) \, d\eta = \text{const}(t), \quad (2.10)$$

lo que implica que necesariamente que $\alpha = \beta n$. Se obtienen en resumen las condiciones:

$$\alpha(m-1) + 2\beta = 1, \quad \alpha = \beta n, \quad (2.11)$$

que determinan los exponentes:

$$\beta = \frac{1}{n(m-1) + 2}, \quad \alpha = \frac{n}{n(m-1) + 2}, \quad (2.12)$$

y la ecuación del *perfil* f es siempre (2.5), un problema elíptico no lineal.

• Ahora hemos de calcular f resolviendo este problema con datos cero en el infinito. Se tiene:

$$\frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-1} (f^m)')' + \beta r f' + n\beta f = 0,$$

es decir,

$$(r^{n-1} (f^m)')' + \beta r^n f' + n\beta r^{n-1} f = 0,$$

y finalmente,

$$(r^{n-1}(f^m)' + \beta r^n f)' = 0.$$

Esto se llama un cálculo afortunado, pues integrando llegamos a:

$$r^{n-1}(f^m)' + \beta(r^n f) = C. \quad (2.13)$$

Dado que queremos $f \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$ tomamos $C = 0$, llegando a

$$(f^m)' + \beta r f = 0, \quad m f^{m-2} f' = -\beta r, \quad (2.14)$$

luego

$$\frac{m}{m-1} f^{m-1} = -\frac{\beta}{2} r^2 + C, \quad f^{m-1} = A - \frac{\beta(m-1)}{2m} r^2. \quad (2.15)$$

• *Problemas de nuevo.* Observamos que f^{m-1} es una parábola hacia abajo, lo que nos crea una cierta angustia porque estábamos pensando en soluciones *no negativas*. Estamos en la situación que ya hemos afrontado en el estudio de las ondas viajeras. Históricamente, este ejemplo fue estudiado antes. Así pues, el mundo no se hundirá y buscaremos una salida no estándar. Revisemos la situación: gracias a la motivación física hemos detectado que algo iba mal; recurriendo al análisis aproximado o al cálculo numérico (que permite integrar la ecuación un poco a las bravas, por diferencias finitas por ejemplo, a partir de unos datos iniciales adecuados del tipo campana de Gauss con soporte finito) se observa un resultado de la evolución a largo plazo que coincide con cortar la parábola al nivel $u = 0$ y quedarnos con la parte positiva. El precio que pagamos es el perder el sentido de solución clásica. En la sección siguiente veremos qué es una solución “generalizada” y comprobaremos que la parábola cortada es una solución generalizada.

Dando por buena esta propuesta por el momento nuestra función queda

$$f = (A - b|\eta|^2)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad b = \beta(m-1)/(2m). \quad (2.16)$$

Observamos que f^{m-1} no es C^1 en el punto $|\eta| = r_0$ en que se anula, lo que implica que la solución no es clásica. Por otra parte, $f \rightarrow 0$ cuando $\eta \rightarrow \infty$, más aún la solución tiene soporte compacto. La solución completa de $u_t = \Delta u^m$ queda:

$$U(x, t) = t^{-\beta n} \left(A - \frac{bx^2}{t^{2\beta}} \right)_+^{1/m-1} \quad (2.17)$$

con los valores de β y b antedichos.

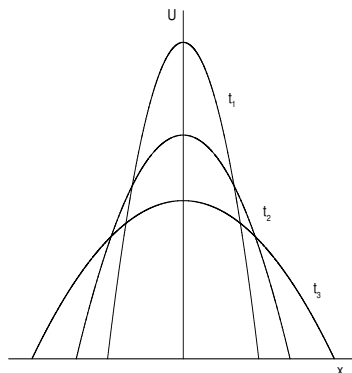


Figura 2.2. Solución fundamental para varios valores de t

Como hemos dicho estas soluciones tienen masa constante en el tiempo:

$$M = \int_0^\infty U dx = \int_0^\infty f(\eta) d\eta = A^{\frac{1}{m-1} + \frac{n}{2}} \int_0^\infty (1 - bs^2)^{\frac{1}{m-1}} ds, \quad (2.18)$$

de donde se deduce la relación entre A y la masa M

$$CA^{\frac{n}{2} + \frac{1}{m-1}} = M. \quad (2.19)$$

Obsérvese además que la masa inicial es una delta de Dirac,

$$\lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) = M\delta(x), \quad (2.20)$$

de forma que nuestra solución, denominada en adelante como $U(x, t; M)$, describe la evolución de una distribución de masa M concentrada en el instante inicial en un punto (el origen de coordenadas). Por ello recibe el nombre usual en la literatura de *solución de tipo fuente* con preferencia al de *solución fundamental* propuesto por nosotros. Recibe también el nombre de *solución de Barenblatt* en honor al gran científico ruso.

NOTA HISTÓRICA. Estas soluciones fueron halladas alrededor de 1950 en Moscú por YA. ZEL'DOVICH y A. KOMPANEETS [ZK] y por G. BARENBLATT [B] independientemente. Este realizó un estudio general y las soluciones suelen ir asociadas a su nombre. La motivación de Zeldóvich era un problema de física del plasma, ¡nada que ver con los medios porosos!

3 Concepto de solución generalizada

Habr  algunos a quienes preocupe este salto adelante, nada más lógico. Les recordaremos que sin pagar un precio la respuesta al problema de construir una solución especial será: “no hay solución”, una manera de confesar nuestra incapacidad para comprender el problema. Pero el problema tiene perfecto sentido en la aplicación práctica de estos modelos de la física de fluidos, se trata de la evolución de un frente de onda o de una masa puntual y la evidencia analítica aproximada, numérica y experimental apuntan a que las configuraciones halladas son correctas. La propuesta que se ha hecho es pues novedosa: admitir soluciones no clásicas, admitir en particular que las parábolas cortadas son una solución no-clásica admisible físicamente. Tal propuesta abre un marco conceptual perfectamente razonable y admitido hoy día por la comunidad científica, a condición de enmarcarse en un contexto general. Por ello buscamos una teoría más amplia que nos proporcione soluciones para una extensa clase de datos iniciales y de contorno. Siguiendo a S BOLEV se estudian soluciones en el sentido de las distribuciones, que estando definidas por ejemplo en $Q = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, \infty)\}$, verifican las igualdades siguientes

$$\int \int u \varphi_t dx dt + \int \int u^m \Delta \varphi dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q) \quad (3.1)$$

correspondientes a verificar la ecuación en sentido débil contra el conjunto de las *funciones test*. Dado que el concepto de distribución es muy amplio y no siempre compatible con las no linealidades presentes, las soluciones se eligen dentro de un espacio funcional adecuado.

Olga OLEINIK (Moscu , 1958) [OKC] y sus colaboradores demuestran que existe solución única generalizada del tipo débil que es una función continua no negativa y acotada para el problema de Cauchy en una dimensión de espacio, con datos iniciales $u_0(x)$ continuos, acotados, no negativos y tales que $(u_0^m)_x$ es acotado. Tal resultado ha sido mejorado por estudios sucesivos y se puede enunciar así un resultado óptimo

Teorema 3.1 *Para toda función no negativa $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^\gamma} \int_{|x| \leq R} u_0(x) dx = 0, \quad \gamma = n + \frac{2}{m-1}, \quad (3.2)$$

existe una única función no negativa $u \in C([0, \infty) : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$ tal que para todo $t > 0$ $(1 + |x|^2)^{-1/(m-1)} u(x, t)$ es acotado, que la ecuación se verifica en el

sentido de las distribuciones en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ y que

$$u(\cdot, t) \rightarrow u_0 \quad \text{en } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \quad (3.3)$$

Resultados aún más generales incluyen el caso en que el límite (3.2) es finito no nulo y entonces la solución existe solamente durante un tiempo finito, y el caso en que el dato es una medida de Borel y no una función, siempre bajo una condición análoga a (3.2), y el resultado de existencia y la propiedades son análogas. Además, la solución es una función continua de las variables (x, t) para $t > 0$. En el caso en que el dato es integrable entonces la solución está en el espacio natural $u \in C([0, \infty) : L^1(\mathbb{R}^n))$ y es continua y acotada para $t \geq \tau > 0$. Estos resultados están expuestos en [A].

Es fácil ver que toda solución clásica sería también generalizada en el sentido anterior y que las soluciones fundamentales son generalizadas para $t \geq \tau > 0$ (¡obsérvese que para $t \rightarrow 0$ se hacen no acotadas!). Compruébese también que las ondas viajeras son auténticas soluciones débiles.

Un interesante resultado señala a las soluciones fundamentales de Barenblatt como los modelos asintóticos de todas las soluciones generalizadas con datos integrables, lo que justifica el esfuerzo que les hemos dedicado.

Teorema 3.2 *Sea $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $u_0 \geq 0$ y $\int u_0(x) ds = M > 0$. Entonces para todo $p \in [1, \infty]$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha_p} \|u(x, t) - U(x, t; M)\|_p \rightarrow 0, \quad \alpha_p = \frac{n(p-1)}{p(n(m-1)+2)}. \quad (3.4)$$

La demostración, debida esencialmente a KAMIN y FRIEDMAN, puede verse completa en esta forma en [V5]. El resultado es válido incluso para soluciones de signo cualquiera, cf. [KV]. Para $p = \infty$ obtenemos convergencia en la norma uniforme con exponente $\alpha = n/(n(m-1)+2)$. La velocidad de convergencia óptima (para clases de datos algo más restringidas) ha sido estudiada recientemente por diversos autores, cf. [CT]. Por supuesto, también se plantea el problema de comportamiento asintótico para dominios acotados, cf. [AP], [V5], o en dominios exteriores, cf. [QV].

4 La frontera libre

Un resultado importante establecido también por OLEINIK y colaboradores es la *propiedad de propagación finita*, mencionada en secciones anteriores.

Problemas matemáticos fundamentales son entonces el determinar las forma y regularidad de estas fronteras libres y su comportamiento cuando avanza el tiempo. Resultados clásicos sobre la primera cuestión se deben a Luis A. CAFFARELLI y colaboradores.

En cuanto a la cuestión asintótica se tiene que en el problema en todo el espacio una solución con soporte inicial compacto tiende a ocupar para $t \rightarrow \infty$ un dominio de tipo esférico cuyo radio se puede estimar como

$$R(t) \sim ct^\sigma, \quad (4.1)$$

con un exponente de expansión dado por $\sigma = 1/(n(m-1)+2) < 1/2$ que decrece con m . La constante $c > 0$ depende solo de la masa inicial $M = \int u(x, 0) dx$. En particular vemos que el soporte se simetriza. De hecho la solución se parece cada vez más a la solución fundamental de Barenblatt también en cuanto al soporte, cf. [V5]. En dimensión espacial $n = 1$ tenemos información más precisa.

Teorema 4.1 *Sea $u_0 \geq 0$ una distribución de masa no negativa de soporte compacto en \mathbb{R} y sean $M = \int u_0(x) dx > 0$ la masa total y*

$$x_0 = \frac{1}{M} \int x u_0(x) dx \quad (4.2)$$

el centro de masas, los dos invariantes del movimiento. Entonces para todo $t \geq 1$ la solución $u(\cdot, t)$ es positiva en el intervalo comprendido entre las dos fronteras libres $s_\pm(t)$ y se tiene el desarrollo

$$s_\pm(t) = x_0 \pm c(m) M^{\frac{m-1}{m+1}} t^{\frac{1}{m+1}} + O(t^{-\frac{m}{m+1}}), \quad (4.3)$$

en que los coeficientes son óptimos.

Este resultado está esencialmente probado en [V3]. Un resultado análogo en precisión es desconocido aún en varias dimensiones espaciales.

Nota final. Las teorías de regularidad de la solución generalizada y de la interfaz o frontera libre han sido objeto de investigación de los especialistas hasta el día presente. Gran parte de las cuestiones básicas han sido resueltas (¡pero no todas!). Entre los aspectos más llamativos están las *fronteras metaestables*, que se mueven solamente tras un cierto *tiempo de espera*, y la regularidad analítica de las interfaces de soluciones con soporte compacto en una dimensión espacial, resultado que no es conocido en varias dimensiones. La ecuación (0.4) y sus generalizaciones han sido estudiadas por numerosos investigadores

españoles, siendo en particular un tema popular en las universidades madrileñas, debiéndose los primeros trabajos a I. DÍAZ, que estudió la propiedad de soporte compacto, cf. [D], a M. HERRERO, que estudió la difusión rápida, cf. [H], y al autor. El lector puede consultar versiones parciales del estado de la cuestión sobre esta ecuación en [A], [K] y [V4].

El presente relato no contiene información sobre un aspecto crucial de la investigación desde su punto de vista aplicado, a saber, la implementación numérica, de la que existe hoy día amplia experiencia y progreso teórico, en el marco del estudio de los problemas llamados de difusión no lineal y cambio de fase. La presencia de una frontera libre proporciona la posibilidad de utilizar métodos del tipo *front tracking*. La dificultad numérica de la EMP no es considerada importante en comparación con otros problemas del área objeto de este estudio, pero la determinación de la frontera libre en contextos pluridimensionales, los problemas con tiempo de espera o con enfoque y los problemas asintóticos ofrecen interesantes tests para los códigos numéricos. Dejamos este tema para otros escritores más expertos y terminamos estas notas con una invitación al lector curioso e interesado en este tema en forma de una serie de propuestas que mezclan los cálculos explícitos con las conclusiones basadas en la interpretación del modelo. De hecho estos ejercicios abren líneas de pesquisa que han sido desarrolladas por los investigadores en los últimos decenios.

Una nueva solución especial. (i) Se demuestra que para todo $T > 0$ la función

$$u(x, t) = \left(\frac{cx^2}{T-t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (4.4)$$

es una solución débil de la ecuación de los medios porosos en el intervalo temporal $0 \leq t < T$ si se escoge adecuadamente la constante $c = c(m, n)$.

(ii) Se demuestra que en $n = 1$ también la función definida por esta fórmula para $x \leq 0$ y como nula para $x > 0$ es una solución, con una frontera libre estacionaria $x = 0$ mientras la solución existe.

(iii) Obsérvese el comportamiento de tales soluciones cuando $t \nearrow T$. Se trata del fenómeno de *explosión* o *blow-up*.

Casos límite. Se puede estudiar el límite de la ecuación (0.4) cuando $m \rightarrow 1$ cuando $m \rightarrow \infty$ (a) formalmente en la ecuación, (b) a través de las ondas viajeras, (c) a través de las demás soluciones explícitas. De ahí se deducen conclusiones acerca de una teoría general para muy gran m o para $m \sim 1$.

Difusión rápida. Es posible considerar procesos de filtración regidos por la ecuación (0.4) con $m < 1$. He aquí algunas cuestiones básicas: estudiar para que valores de m se tiene aún una teoría similar, investigando la existencia de soluciones fundamentales del tipo Barenblatt. Explicar por que se habla de *ecuación de difusión rápida*. Hallar las ondas viajeras. Señalar con precisión en base a estas exploraciones los exponentes críticos m_c para los que la teoría cualitativa sufre una alteración esencial. [Respuesta: $m = 0$ y $m = (n - 2)/n$, situaciones distintas para $n = 1, 2$ o 3].

Ecuación de la presión. Sea

$$\pi = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$$

la presión normalizada en el modelo de filtración de gases, sección 9. Se obtiene la llamada *ecuación de la presión*

$$\pi_t = (m-1)\pi\pi_{xx} + (\pi_x)^2.$$

Tomando el límite formal $m \rightarrow 1$ se llega a una ecuación tipo Burgers. Compruébese el límite sobre las soluciones explícitas. Para más detalles ver [AV], [LSV].

Referencias sobre la EMP y temas relacionados

- [A] D. G. ARONSON, *The porous medium equation*, in “Nonlinear Diffusion Problems”, Lecture Notes in Math. **1224**, A. Fasano y M. Primicerio eds., Springer Verlag, New York, 1986, pp. 12-46.
- [AP] D.G. ARONSON, L.A. PELETIER, *Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains*, J. Diff. Eqns. **39** (1981), pp. 378-412.
- [AV] D. G. ARONSON, J. L. VAZQUEZ, *The porous medium equation as a finite-speed approximation to a Hamilton-Jacobi equation*. Annales Inst. Henri Poincaré, Journal d’Analyse Non Linéaire **4** (1987), 203-230.
- [B] G. I. BARENBLATT, *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium*, Prikl. Mat. Mekh. **16** (1952), pp. 67-78 (en ruso).
- [B2] G. I. BARENBLATT, “Dimensional Analysis”, Gordon and Breach. New York, 1987.

- [CT] J. A. CARRILLO, G. TOSCANI, *Asymptotic L^1 -decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity*, aparecerá.
- [D] J.I. DÍAZ, “Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries”, Pitman Res. Notes in Maths, **106**.
- [HP] M.A. HERRERO, M. PIERRE, *The Cauchy Problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), pp. 145-158.
- [K] A.S. KALASHNIKOV, Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations, *Russian Math. Surveys* **42** (1987), pp. 169–222.
- [KV] S. KAMIN, J.L. VAZQUEZ, *Asymptotic behaviour of the solutions of the porous medium equation with changing sign*, SIAM Jour. Math. Anal. **22** (1991), pp. 34–45.
- [LSV] P. L. LIONS, P. E. SOUGANIDIS, J. L. VAZQUEZ, *The relation between the porous medium equation and the eikonal equations in several space dimensions*. Revista Matemática Iberoamericana **3** (1987), 275-310.
- [OKC] O. OLEĬNIK, S. A. KALASHNIKOV, Y. L. CZHOU, *The Cauchy problem and boundary-value problems for equations of the type of unsteady filtration*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **22** (1958), pp. 667-704 (en ruso).
- [QV] F. QUIRÓS, J. L. VAZQUEZ, *Asymptotic behaviour of the porous media equation in an exterior domain*, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, aparecerá.
- [V3] J. L. VAZQUEZ, *Asymptotic behaviour and propagation properties of the one-dimensional flow of a gas in a porous medium*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), pp. 507-527.
- [V4] J. L. VAZQUEZ, *An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation*, en “Shape Optimization and Free Boundaries”, M. C. Delfour ed., Math. and Phys. Sciences, Series C, vol. 380, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, Leiden; 1992. Pp. 347-389.
- [V5] J. L. VAZQUEZ, I. *Asymptotic behaviour for the Porous Medium Equation in the whole space*, II. *Asymptotic behaviour for the PME in a bounded domain. The Dirichlet problem*. Notas de Curso de Doctorado, Univ. Autónoma de Madrid, 1997.
- <http://www.adi.uam.es/~jvazquez>.
- [ZK] YA. B. ZEL'DOVICH, A. S. KOMPANEETS, *On the theory of heat transfer with heat dependent thermal conductivity*, en “Collection of Papers Dedicated to the 70th Birthday of Acad. A. F. Ioffe”, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1950; pp. 61-71 (en ruso).

• **Alicia Delibes**

La Matemática difusa

(páginas 87 - 94)

• **José Luis Andrés Yebra**

*Sobre las Matemáticas en
la Enseñanza Secundaria*

(páginas 95 - 97)

La Matemática Difusa

David Blunkett, ministro británico de Educación y Empleo, acaba de anunciar (The Times 12- I- 99) una inversión de 55 millones de libras para reforzar el aprendizaje del cálculo elemental en las escuelas utilizando las tablas de multiplicar y otros métodos tradicionales de enseñanza.

¿Qué es lo que está pasando con la enseñanza de las matemáticas para que un país superdesarrollado y con un sistema educativo de primera fila tenga que invertir más de 13.000 millones de pesetas para que los niños aprendan las tablas de multiplicar?

Si queremos acercarnos a una explicación que nos haga comprensible esta paradójica situación, se nos hace imprescindible conocer y analizar la historia y la evolución de las corrientes pedagógicas que han predominado en el Reino Unido a lo largo del último tercio de siglo.

En 1967, el *Central Advisory Council for Education*, conocido como *Comité Plowden* por el nombre de su presidenta, Lady Plowden, una antigua magistrada, urgió a todos los centros de Primaria británicos a adoptar un sistema de educación “progresista”.

Las teorías educativas del Comité se veían reforzadas por los estudios del matemático y psicólogo suizo, Jean Piaget, que sostenía la inutilidad de esforzarse en que un niño diera un paso determinado cuando no estaba suficientemente maduro para darlo él solo. Estos estudios, llevados al extremo, conducían a dejar el aprendizaje al libre albedrío del niño.

Por otra parte, en el aspecto sociológico, el comité fue influenciado por uno de sus miembros, Michael Young, que defendía que el exceso de conocimientos era un artificio inventado para que determinados grupos sociales aventajaran a otros.

En Gran Bretaña, al final de la enseñanza primaria se realizaba el examen llamado “11+”, que decidía el paso de los niños a las *Grammar Schools* o en caso de no superarlo, su ingreso en las *Secondary Technical Schools* o en las *Secondary Modern Schools*, de carácter menos académico. Gran parte de la sociedad británica criticaba esta situación que hacía depender de un solo examen y a una edad demasiado temprana, el futuro académico de los escolares. El Comité se hizo eco de estas protestas y con el argumento de que era mucho más sencillo para los ricos aprobar este examen, tomó la decisión de suprimirlo. Así

nacieron las llamadas *Comprehensive Schools*, en las que se ingresaba a los 11 años y en las que se ofrecía la misma enseñanza para todos los alumnos hasta los 16 años.

El *Comité Plowden* desaprobaba las lecciones llamadas magistrales que se impartían al conjunto de la clase. También rechazaba la formación de grupos de distintos niveles de rendimiento académico. Propugnaba el fin de la memorización y preconizaba el aprendizaje a través del descubrimiento.

Los cambios culturales y sociales de aquellos años 60 y los efectos prácticos de las directrices marcadas por el *Comité Plowden* hicieron que en los 70 el progresismo, como ideología y como modelo pedagógico, se hubiera convertido en ortodoxia.

Fue entonces cuando se dejaron oír las primeras voces de protesta. Se publicaron informes que alertaban sobre un empeoramiento en los resultados académicos. Este descenso de nivel se achacaba a la supresión de los exámenes “11+”. Además se culpaba a los métodos progresistas de la creciente indisciplina en las aulas.

En 1987, en un intento de frenar esta situación, el gobierno de Margaret Thatcher publicó una nueva Ley de Educación que establecía nuevos planes de estudio y exámenes de evaluación (*Key Stage*) para los escolares a los 7, 11 y 14 años.

La decisión del gobierno de llevar a cabo sus reformas se vio reforzada por un estudio, publicado en 1991, en el que se revelaba que un proyecto para mejorar los resultados académicos en la ciudad de Leeds y que había costado 26 millones de dólares se había saldado con un descenso de dichos resultados.

El autor del estudio y profesor de la Universidad de Warwick, Robin Alexander, el responsable de los planes de estudio, Chris Woodhead y el inspector de institutos de Bachillerato, Jim Rose, constituyeron un grupo de estudio al que se apodó *de los Tres Hombres Sabios*. El gobierno les encargó un informe urgente sobre los resultados de los distintos métodos didácticos que estaban en vigor. Su informe determinó que los resultados académicos habían descendido en los últimos años a causa de unos *dogmas más que cuestionables* que imperaban entre los profesores.

Todos esos informes y la extendida convicción en la sociedad británica de que su sistema escolar no estaba dando los resultados necesarios han influido de manera capital en el gran giro que el partido laborista de Tony Blair ha dado a la política educativa y en el nombramiento de David Blunkett como Ministro de Educación en 1997.

Hasta aquí, la historia del sistema educativo británico en los últimos años. Pero contemplar esta historia no es suficiente para comprender la razón por la que los escolares ingleses no son capaces de multiplicar.

Necesitamos saber cómo las corrientes pedagógicas impulsadas desde los años sesenta se han ido concretando en una forma determinada de enseñar matemáticas, y por qué se ha llegado a la dramática situación que intenta ahora corregir el gobierno de Tony Blair.

La extensión de las corrientes pedagógicas progresistas promovida por el *Comité Plowden* coincidió con la introducción de la llamada Matemática Moderna en las enseñanzas Primaria y Secundaria.

Esta reforma de la enseñanza de las matemáticas, que hizo furor en los países avanzados durante la década de los sesenta y que se introdujo en España con la Ley General de Educación de 1970, pretendía acelerar y aumentar la preparación matemática de los jóvenes.

El complicado edificio del álgebra clásica con sus castillos de operaciones con polinomios en los que aparecen todo tipo de exponentes fue sustituido por la teoría de conjuntos, por el estudio de las estructuras algebraicas y por el de las correspondencias y transformaciones, con la idea de que, familiarizándose con estos conceptos en edades tempranas la formación del futuro matemático sería más sencilla.

El fracaso de esa llamada Matemática Moderna se debió, entre otras razones, a la excesiva abstracción de la teoría de conjuntos y a la falta de preparación del profesorado que se vio forzado a explicar lo que en muchos casos no comprendía.

En Estados Unidos la Matemática Moderna había sido promovida desde los primeros años sesenta por el *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* y bautizada allí con el nombre de *The New Math*.

Pero en 1973, el conocido matemático norteamericano, Morris Kline publicó su libro *Why Johnny cant' add: The Failure of the New Math*¹ y dio el golpe de gracia a esa moda que, por otra parte, estaba ya siendo seriamente criticada aunque se había implantado en casi todos los sistemas educativos americanos y europeos.

La introducción de la llamada Matemática Moderna en las Enseñanzas Primaria y Secundaria empieza a saldarse ya en los años setenta con un fracaso indiscutible. Pero la experiencia de su implantación, que había sido tan radical, dejó en herencia un progresismo pedagógico que busca métodos nuevos para conseguir que las dificultades inherentes a las Matemáticas desaparezcan y éstas

¹Editado en España en 1976 con el título "el fracaso de la Matemática Moderna"

queden al alcance de la mayoría de la población escolar. El último grito en la materia ha sido un nuevo movimiento, con cuna en California, que se conoce con los nombres de *The New New Math* ², o *Fuzzy* ³ *Math*, entre otros.

En un artículo aparecido en *The New York Review* el 24 de septiembre de 1998, el famoso matemático Martin Gardner llama la atención sobre el fervoroso apoyo que el *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* está dando a este nuevo movimiento y dice:

Recientemente el NCTM, demostrando haber aprendido poco del fracaso de la Matemática Moderna, ha emprendido otro movimiento de reforma que promueve nombres como The New New Math, Fuzzy Math, Standards Math y Rain Forest Math. Como sucedió en el caso anterior, este movimiento está creando agitación entre profesores y padres, especialmente en California donde se ha iniciado. Se ha estimado que en la educación primaria la mitad de los alumnos de Estados Unidos está aprendiendo con maestros preparados en la llamada matemática Fuzzy. La nueva moda está muy influida por el multiculturalismo, el ecologismo y el feminismo.

Entre las características de la metodología propia de esta Novísima Matemática se pueden señalar:

- La utilización de una jerga peculiar, poco inteligible, en la que abundan los trabalenguas formados por tópicos propios de la llamada corrección política, tales como “Multiculturalismo”, “igualdad de sexos” (*Equity-Gender*), “Etnomatemática” ...
- La sustitución de las explicaciones del profesor por actividades de los alumnos con el objeto de que descubran las cosas por sí mismos.
- El abandono total de la memorización como método de aprendizaje.
- La eliminación de las demostraciones rigurosas.
- La formación de pequeños grupos en los que el profesor apenas interviene y se limita a actuar como guía silencioso (técnica empleada por los psicólogos en las terapias de grupo).
- El planteamiento de problemas que se toman de aquí o de allá, evitando el orden sistemático. Los alumnos deben buscar respuestas; no se les debe decir cómo hacerlo. Lo importante es intentarlo, no el resultado.

²Podríamos traducirla por Novísima Matemática

³*Fuzzy Set* es un tipo especial de conjuntos que en matemáticas se ha traducido por “conjuntos difusos” o también “conjuntos borrosos”

- El fomento del uso de calculadoras y de todo tipo de materiales.
- La utilización de extensísimos libros de texto llenos de fotografías y dibujos en color, pero en los que es difícil reconocer el contenido matemático.

Una evaluación de los estudiantes de 13 y 14 años, realizada por la IEA (*The International Association for the Evaluation of Educational Achievement*) en 1995 en la que participaron 45 países de todo el mundo y que ha sido conocida con el nombre de TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study*) provocó una gran conmoción y revuelo en la sociedad americana ya que Estados Unidos obtuvo unos resultados muy inferiores a la media internacional y apareció clasificado entre los últimos puestos.

La polémica sobre el sistema de enseñanza de las matemáticas está en plena efervescencia. En el estado de California, cuna de la Novísima Matemática, la primavera del año pasado los once miembros del Departamento de Educación recomendaron, con 10 votos a favor y una abstención, un amplio regreso a los aspectos básicos tradicionales en la enseñanza de las matemáticas, fijaron la edad para aprender las tablas y restringieron el uso de la calculadora, pidiendo a los maestros que no se utilizara antes de los 12 años.

Los defensores de la Novísima Matemática han reaccionado calificando la decisión del Departamento de producto de la nostalgia y de contribución al desastre del país.

Pero como, con toda sensatez, añade Martin Gardner en el artículo al que antes me he referido:

El conflicto es amargo y está lejos de resolverse. Pueden pasar muchos años antes de que se sepa con claridad cómo seleccionar los aspectos válidos de la Novísima Matemática, al mismo tiempo que se conservan aspectos importantes de los viejos métodos de enseñanza.

Los ejemplos de Gran Bretaña y Estados Unidos nos muestran cómo sus comunidades educativas están debatiendo apasionadamente este asunto y cómo, en muchos casos, se llega a pronunciar el mismo eslogan: “Recuperemos las tablas de multiplicar”.

Mientras tanto, ¿qué ha sucedido en España?

Las corrientes pedagógicas progresistas, nos llegaron alrededor de los años 70. El hecho de que surgieran en el seno de la lucha antifranquista dio un carácter más trascendental a lo que, fuera de nuestro país, había sido sólo una nueva tendencia pedagógica. La escuela progresista se convirtió, en la España de los años posteriores a la muerte de Franco, en la única escuela de pedigrí genuinamente democrático.

La Ley General de Educación de 1970 escolarizó a todos los niños en un mismo sistema hasta los 14 años. La renovación de los planes de estudio que se produjo al abrigo de esa Ley incorporó la Matemática Moderna tanto a la enseñanza primaria como a la secundaria.

Cuando los socialistas llegan al poder, las teorías de Piaget, Young, Freire, etc. ya habían arraigado en el mundo escolar español. Entonces, los pedagogos que se instalan en el Ministerio de Educación vuelven sus ojos a la *Comprehensive School* británica y, fascinados por lo que tiene de igualitaria, deciden implantarla por ley en España. De ahí nace la L.O.G.S.E., que escolariza a los jóvenes hasta los 16 años dentro de un sistema igual para todos.

En el marco de esta Ley los encargados de elaborar el “currículo” de matemáticas, enterrada hace tiempo la Matemática Moderna, parecen haber fijado su atención en esa Novísima Matemática anglosajona y en ella haber inspirado sus decretos y su “hiperprogresista” metodología.

Así, los representantes de nuestra Novísima Matemática, como los de la americana *New New Math* redactaron un “currículo” en una jerga muy particular, de la que puede ser muestra este trozo que transcribo directamente del “currículo” oficial:

Las matemáticas han de ser presentadas a alumnos y alumnas como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo, y que, con seguridad continuarán evolucionando en el futuro. En esa presentación han de quedar resaltados los aspectos inductivos y constructivos del conocimiento matemático, y no sólo los aspectos deductivos de la organización formalizada que le caracteriza como producto final. En el aprendizaje de los propios alumnos hay que reforzar el uso del razonamiento empírico inductivo en paralelo con el uso del razonamiento deductivo y de la abstracción.” (Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, B.O.E. del 13-IX-91)

Tranquilícese el inocente lector, este presuntuoso lenguaje no oculta secretos para él desconocidos de la Ciencia Matemática, es sencillamente parte de la jerga tontivana que, si en un principio arrancó nuestra sonrisa, empieza ya a helarnos la inteligencia.

Los actuales defensores de esta Novísima Matemática no quieren ni oír hablar de que el Ministerio de Educación elabore ninguna norma que modifique uno solo de los aspectos del “currículo” que lograron establecer y la única reforma que aceptan y propugnan es un incremento del gasto público para seguir

experimentando su modernísima metodología.

Ante la crítica que, desde muchos ámbitos se hace, en el sentido de que en la L.O.G.S.E. los contenidos que deben explicar los profesores y aprender los alumnos están poco definidos, expresan su convencimiento de que lo importante no es lo que se enseña, sino la forma de hacerlo, ya que de ahí nacerá la actitud que el alumno tome hacia las matemáticas y niegan la facultad de las administraciones educativas para fijar esos contenidos con una mayor precisión.

El “currículo” oficial encomienda a los profesores la tarea de elaborar sus programas y fijar los contenidos, atendiendo a las características de cada centro. Pero esta previsión no se cumple y son las editoriales las que están definiendo dichos programas. Algunas, temiendo no acertar con una sola línea expositiva, han sacado al mercado dos textos con tratamiento y ordenación de la materia muy diferente. Otras, después de editar los textos de cada curso han modificado sus contenidos y sacado nuevas ediciones. Se puede asegurar que entre editoriales, profesores y padres reina un absoluto desconcierto.

Cuando el equipo de Esperanza Aguirre pidió la colaboración de los estamentos matemáticos para poner un poco de orden en esta caótica situación, los “fundamentalistas” de la L.O.G.S.E. negaron que existieran otras necesidades que aquellas que pudieran resolverse con un aumento del presupuesto.

Además tachan de nostálgicos, elitistas e insolidarios a los que proponen una revisión crítica de la actual situación en las aulas, y pretenden seguir controlando para siempre, con la que llaman su renovación permanente, todo el aparato educativo.

Es importante abandonar posturas sectarias para reconducir con sentido común la situación y aprovechar la experiencia de americanos y británicos para evitar a la sociedad un gasto de tiempo y dinero que puede resultar totalmente inútil.

La escolarización en un sistema único hasta los dieciséis años plantea a los educadores la doble tarea de elaborar un programa al alcance del ciudadano medio sin descuidar la formación del futuro científico. No parece evidente que el programa que mejor puede cumplir ambos objetivos es aquel que está más vacío de contenidos.

Por un lado, existe un “cuerpo matemático básico”, que todo ciudadano ha de conocer. Es pues, obligación de los profesionales de la enseñanza de las matemáticas definir sus contornos y contenidos y articular una programación que garantice el acceso de los estudiantes a ellos.

Y por otra parte, no podemos aceptar que un afán desmedido de igualitarismo nos haga descuidar la formación de los futuros científicos, economistas o ingenieros que necesita nuestra sociedad. Tanto más cuanto que en los últimos años se viene constatando en nuestras Universidades una creciente preocupación por el descenso de nivel que presentan los estudiantes cuando comienzan su carrera universitaria.

Los llamados modernos métodos pedagógicos están basados en la ingenua creencia de que si se presentan las matemáticas de forma divertida se despertará entre toda la población juvenil una intensa fascinación por la belleza de esta ciencia. Hay muchos jóvenes de 15, 16 ó 17 años que se aburren profundamente en la escuela, ya se les enseñe matemáticas o conocimiento del medio, no son permeables a ningún tipo de motivación en el aula, viven pendientes de su fin de semana callejero. Sería absurdo pensar que una presentación menos rigurosa de las matemáticas pueda atraer a ese sector juvenil.

Es responsabilidad de todos los implicados en la tarea de enseñar buscar y seleccionar con prudencia lo que de bueno tiene la moderna pedagogía y no cerrar las puertas de la didáctica matemática a ciertos usos tradicionales que han demostrado su eficacia durante siglos.

Existen contenidos matemáticos que todos los ciudadanos deben conocer, que les van a ser necesarios para desenvolverse en su trabajo por poco cualificado que éste sea. No les privemos de ellos en un afán desmedido de experimentación metodológica.

Busquemos, al mismo tiempo, la forma de despertar en nuestros futuros universitarios el interés por esta Ciencia haciendo atractivo su aprendizaje pero sin disimular sus dificultades y permanezcamos vigilantes para, en ningún caso, frenar el desarrollo de sus aptitudes naturales.

Alicia Delibes
a.delibes@educ.mec.es

Sobre las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria

Dentro del debate abierto sobre la reforma de la enseñanza secundaria, y en particular en nuestro entorno sobre la formación matemática preuniversitaria, deseo ocuparme únicamente de uno de los aspectos que considero decisivo en su problemática: la desafortunada homogeneización de los programas de Matemáticas en las distintas modalidades del bachillerato.

Muchos educadores, y en particular la mayoría de los dedicados a la Didáctica de las Matemáticas, en su loable intento de hacerlas accesibles a un gran número de personas, establecen el principio de que todo el mundo puede hacer matemáticas. Quizá sea cierto, pero es imprescindible añadir que unos más que otros. Nunca se podrá evitar que existan niños de seis años que multiplican mentalmente números de tres cifras, mientras que otros no podrán conseguir lo mismo a lo largo de sus vidas por más esfuerzos que hagamos. Ni que cuando expliquemos algo en una clase o fuera de ella, incluso algo que no requiere conocimientos previos, haya personas que se aburren con la profusión de argumentos porque ya lo han entendido, mientras que otros no lo pueden entender, sencillamente, porque queda fuera de su alcance.

¿Es algo genético? Probablemente. Mientras que unas personas son capaces de jugar con los ojos vendados y simultáneamente decenas de partidas de ajedrez, otros son incapaces de aprender las reglas del juego. En otros campos, como la música o el dibujo, la existencia de importantes diferencias innatas se acepta sin discusión, pero en matemáticas no se quiere reconocer. La consecuencia de que algunos, con la mejor voluntad e intenciones, sostengan que todo el mundo puede hacer matemáticas es que otros intentan homogeneizar su enseñanza: los actuales programas de bachillerato son idénticos para los futuros matemáticos e ingenieros que para los cirujanos, los geólogos o los ecólogos (modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud) e incluso para los que desean hacer un Ciclo Superior de Formación Profesional (modalidad de Tecnología). Mientras a unos se les está causando un grave déficit de formación, a otros se les está exigiendo por encima de sus posibilidades y de sus necesidades venideras. La adecuación a la diversidad del alumnado -uno de los principales objetivos de la reforma- también debería considerar esta diferencia.

¿No sería posible adaptar mejor los requerimientos de matemáticas en el

bachillerato a las capacidades y necesidades de los alumnos? En el dominio de las artes esta situación ha tenido una respuesta adecuada con la creación de una modalidad del bachillerato. ¿No se podría crear una Modalidad de Ciencias y Tecnología, destinada exclusivamente a aquellos que desean seguir estudios de Matemáticas, Física o Ingenierías? Esta nueva modalidad podría y debería proporcionar una sólida formación matemática, mientras que esta formación se reduce en lo que queda de las actuales modalidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología. No sólo se conseguiría mejorar la formación matemática de aquellos para quienes es imprescindible, sino también que las Matemáticas dejasen de ser una odiosa barrera para aquellos que apenas van a necesitarlas y que -aunque sea políticamente incorrecto decirlo, es necesario hacerlo- difícilmente pueden pasar de un cierto nivel.

De hecho no estoy proponiendo nada original, sino algo análogo a lo que ya ocurre en Francia con el Bachillerato Científico (Bac S). Transcribo la frase de motivación de este bachillerato: para responder al objetivo nacional de formación de un gran número de ingenieros, investigadores, profesores y técnicos con una formación científica sólida (...), ofreciendo a los alumnos una formación matemática de calidad. Ellos lo tienen así de claro: hay un colectivo -que identifican nítidamente- que requiere una formación matemática de calidad. Resultado: 6 ó 7 horas semanales de clases de matemáticas a este colectivo en cada uno de los dos últimos años de bachillerato y muchas menos, y naturalmente con otro programa mucho más light, a los demás. Aquí, al mezclarlos, lo light es para todos. Y luego vienen los fracasos en esos estudios.

Hay dos recelos a esta idea que hay que desmontar. El primero es que un bachillerato de este tipo, con fuertes exigencias en Matemáticas (y en Física) ahuyentaría a los alumnos, lo que es totalmente falso como muestra la experiencia francesa. Allí es el bachillerato más solicitado y no permiten cursarlo a los alumnos que no han demostrado previamente una cierta aptitud o predisposición a las Matemáticas y a la Física. En otras palabras, en el momento de inicio de lo que aquí serían los dos años de bachillerato, a muchos alumnos les dicen: tú puedes continuar pero sólo si lo haces en otro tipo de bachillerato y no en el Bac S.

El segundo recelo, que parece consecuencia del anterior, es que tal bachillerato sería elitista. También es radicalmente falso. A lo sumo nuestros titulados pueden estar en mejores condiciones de pasar a integrar la clase media, pero nada más. ¿Desde cuándo son una élite los matemáticos, los físicos o los ingenieros? ¿A cuántos vemos aparecer en televisión o en los periódicos? ¿A

cuántos de estos conoce la gente por ser famosos, ricos o poderosos? A lo sumo alguna persona culta podrá citar a algún arquitecto. Entre todas las Escuelas de Ingeniería sacan cada año más ingenieros que todas las Facultades de Derecho y Medicina juntas, y a lo único a lo que pueden aspirar aquellos es a un lugar de trabajo en el que utilizarán más la cabeza que las manos y en el que a veces podrán o tendrán que llevar corbata. Nada más.

Sin embargo, con otros muchos estudios que apenas requieren matemáticas se puede llegar muy lejos. A aquellos a los que en un cierto momento se cierra un camino, lo que hay que poder decirles es que tienen abiertos otros muchos. Ahora eso no es así porque todos tienen que pasar por el mismo tubo en el que aparecen las matemáticas como obstáculo. Luego nos extrañamos de que Catedráticos de Universidad de Derecho o Historia no sepan sumar $1/3$ más $1/6$, en vez de verlo como la señal de que no les ha hecho ninguna falta. ¿Por qué han de tener la misma facilidad que nosotros para ver ese cálculo como trivial? Y lo peor es que quizás otros, tan válidos como ellos para esos menesteres, se han quedado en el camino por culpa de las matemáticas que les han exigido superar.

JOSÉ LUIS ANDRÉS YEBRA
matjlay@eupbl.upc.es

**QUALITATIVE THEORY OF
DYNAMICAL SYSTEMS**

Qualitative Theory of Dynamical Systems publica artículos de gran calidad sobre la teoría, los métodos y las aplicaciones de los sistemas dinámicos, tanto discretos como continuos (ecuaciones diferenciales ordinarias). Los artículos sometidos a esta revista serán revisados e informados con cuidado. Deben ser matemáticamente correctos, originales, no triviales y de interés para un número considerable de lectores.

Qualitative Theory of Dynamical Systems es la revista del *Seminari de Sistemes Dinàmics de la Universitat de Lleida*. Dos números son editados al año, constituyendo un único volumen. Los gastos de suscripción para el año 1999 son de 100 Euros (institucional) y 50 Euros (personal). Para más información, puede consultarse el Web. La correspondencia con los editores puede ser por correo electrónico.

EDITORES JEFES:

JAVIER CHAVARRIGA, Departament de Matemàtica, Universitat de Lleida, chava@eup.udl.es

JAUME LLIBRE, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, jllibre@mat.uab.es

<http://www.udl.es/dept/matematica/ssd/qtlds>

Si desea suscribirse consulte nuestra página web, o bien realice un ingreso de 100 euros (institucional) o 50 euros (particular) en el siguiente número de cuenta de "La Caixa": 2100-2464-61-0200002678, indicando explícitamente en la orden de pago: *suscripción a Qualitative Theory of Dynamical Systems*, así como sus datos institucionales o personales para el envío de la revista, junto con el NIF (institucional) o DNI (personal).

Nombre	RSME-2000 Congreso de la Real Sociedad Matemática Española, Año 2000
Lugar	Madrid, Spain
Fecha	27, 28 y 29 de enero del 2000
Organiza	Real Sociedad Matemática Española
Colaboran	Ministerio de Educación y Ciencia Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) Universidad Autónoma de Madrid (UAM) Universidad de Alcalá Consejo Superior de Investigaciones Científicas Universidad Rey Juan Carlos Universidad Carlos III Universidad Complutense de Madrid Universidad Politécnica de Madrid Renfe Iberia
Información	Dr. Carlos Andradás, RSME-2000 Departamento de Álgebra, Facultad de Matemáticas Universidad Complutense 28040 Madrid (Spain)
e-mail	rsme_2000@mat.ucm.es
Página Web	http://www.mat.ucm.es/rsme2000/ http://rsme.uned.es/rsme2000.html

Nombre	HYP-2000 Eighth International Conference on Hyperbolic Problems. Theory, Numerics, Applications
Lugar	Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany
Fecha	28 de Febrero al 3 de Marzo del 2000
Información	HYP-2000 c/o Institut fuer Analysis und Numerik Otto-von-Guericke-Universitaet Magdeburg PSF 4120 D-39016 Magdeburg, (Germany) Fax: To HYP-2000 at +49-391-67-18073
e-mail	hyp2000@mathematik.uni-magdeburg.de
Página Web	http://rubens.math.uni-magdeburg.de/hyp2000

Nombre	NO LINEAL 2000 Las fronteras de la ciencia no lineal para el próximo milenio A satellite Activity of the Third European Congress of Mathematics (3ECM)
Lugar	Palacio de los Condes de Valparaíso Almagro (Ciudad Real), Spain
Fecha	31 mayo al 3 de junio del 2000
Organiza	Dpto. de Matemáticas E.T.S. Ingenieros Industriales Universidad de Castilla-La Mancha
Patrocina	Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) Universidad de Castilla-La Mancha
Información	NO LINEAL 2000 Secretaría del Dpto. Matemáticas E.T.S. de Ingenieros Industriales Universidad de Castilla-La Mancha Avda. de Camilo José Cela, 3 13071 CIUDAD REAL (Spain)
E-mail	nolineal@ind-cr.uclm.es
Página Web	http://www.uclm.es/cursos/nolineal

Nombre	MTNS 2000 14th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems
Lugar	Perpignan, France
Fecha	19-23 de Junio del 2000
Organiza	Laboratoire de Théorie des Systèmes, University of Perpignan Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, Cachan
Colaboran	Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA) European Nonlinear Control Network Ecole Polytechnique de Zielona Gora Mairie de Perpignan Conseil Général des Pyrénées Orientales Region Languedoc Rousillon
Información	MTNS 2000 Secretariat Systems Theory Laboratory University of Perpignan 52, Avenue de Villeneuve F-66860 Perpignan Cedex FRANCE Teléfono: +33 4 68 66 17 61 Fax: +33 68 66 17 60
E-mail	eljai@univ-perp.fr fliess@cmla.ens-cachan.fr
Página Web	http://www.univ-perp.fr/mtns2000/

Nombre	3º CONGRESO EUROPEO DE MATEMÁTICAS (3ECM)
Lugar	Barcelona, Spain
Fecha	10-14 de Julio del 2000
Organiza	Sociedad Catalana de Matemáticas (SCM) bajo los auspicios de la Sociedad Matemática Europea (EMS)
Patrocinadores	Generalitat de Catalunya, Comissionat per a Universitats i Recerca, Departament d'Ensenyament Ministerio de Educación y Cultura, S.E.U.I.D. Fundación Catalana per a la Recerca Ayuntamiento de Barcelona Institut d'Estudis Catalans Universidad de Barcelona Universidad Autònoma de Barcelona Universidad Politècnica de Catalunya Instituto de Estadística de Catalunya Unión Matemática Internacional (IMU) Real Sociedad Matemática Española (RSME) Sociedad Española de Matemática Aplicada Fundación Retevisión Fundación "la Caixa", Museo de la Ciencia Bolsa de Barcelona Puerto de Barcelona Fundación Caixa Catalunya Fundación Banc Sabadell Fundación Caixa de Sabadell Fundación Caixa de Manresa Login Control Spriger-Verlag
Información	Secretaría del Congreso Societat Catalana de Matemàtiques Institut d'Estudis Catalans Carrer del Carme, 47 E-08001 Barcelona
E-mail	3ecm@iec.es
Página Web	http://www.iec.es/3ecm/ http://www.si.upc.es/3ecm/

Nombre	WAVES 2000 Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation
Lugar	Santiago de Compostela, Spain
Fecha	10-14 de Julio del 2000
Organiza	Universidad de Santiago de Compostela (Spain) Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA)
Colabora	Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)
Información	Secretariat of the Conference Waves2000 Relations Exterieures INRIA Rocquencourt Domaine de Voluceau - BP 105 78153 Le Chesnay Cedex - France Fax: +33 1 39 635638
e-mail	symposia@inria.fr
Página Web	http://www.usc.es/waves2000

Nombre	I COLLOQUIUM ON LIE THEORY AND APPLICATIONS A satellite Activity of the Third European Congress of Mathematics (3ECM)
Lugar	Vigo, Spain
Fecha	17-22 de Julio del 2000
Organiza	Dpto. Matemática Aplicada de la Universidad de Vigo
Colabora	Universidad de Vigo Xunta de Galicia Ministerio de Educación y Cultura Real Sociedad Matemática Española (RSME) Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) European Mathematical Society (EMS)
Información	Secretaría del Congreso Dpto. Matemática Aplicada, E.T.S.I. de Telecomunicación Universidad de Vigo 36280 VIGO (Spain) Teléfono: +34 986 812142 +34 986 812445 Fax: +34 986 812116 +34 986 812401
E-mail	clieta@dma.uvigo.es
Página Web	http://www.dma.uvigo.es/clieta/index

Nombre	E.C.I.T. 2000 European Conference on Iteration Theory
Lugar	Murcia , Spain
Fecha	4-9 de Septiembre del 2000
Información	Secretaría del Congreso ECIT-2000 Facultad de Matemáticas Campus de Espinardo 30100 Murcia, Spain Teléfono: +34 968 364176 Fax: +34 968 364182
E-mail	balibrea@fcu.um.es

Nombre	IX ESCUELA DE OTOÑO HISPANO-FRANCESA SOBRE SIMULACIÓN EN FÍSICA E INGENIERÍA
Lugar	Laredo (Cantabria) , Spain
Fecha	18-22 de Septiembre del 2000
Organiza	Dres. Michel Bernadou, Eduardo Casas Rentería
Cursos	Métodos Numéricos en Mecánica de Fluidos
(5 horas)	(Dr. Ramón Codina Rovira, Univ. Politécnica de Cataluña) Les Méthodes Ondelettes: de l'Analyse à la Simulation (Prof. Albert Cohen, Université Pierre et Marie Curie) Modelisation Numérique des Structures Élastiques ou Viscoélastiques en Grandes Deformations. (Prof. Patrick Le Tallec, Université Paris Dauphine) Métodos de Elementos de Contorno (Dr. F. Javier Sayas González, Universidad de Zaragoza)
Información	IX Escuela de Otoño Hispano-Francesa Secretaría "Cursos de Verano de Laredo" Plaza de la Universidad C/ Sevilla, 6 39001 Santander, (Cantabria)
E-mail	ehf2000@macc.unican.es

Nombre	INTERNATIONAL CONGRESS ON DIFFERENTIAL GEOMETRY In Memory of Alfred Gray (1939-1998)
Lugar	Bilbao , Spain
Fecha	18-23 de Septiembre del 2000
Organiza	Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea
Colaboran	Universidad del País Vasco Bilbao Iniciativas Turísticas
Información	Dres. R. Ibáñez y M. Macho-Stadler Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias Universidad del País Vasco Apartado 644, 48080 Bilbao, Spain Teléfono: +34 94 6015358 +34 94 6015352 +34 94 6012517 Fax: +34 94 6012516
E-mail	Gray@lg.ehu.es
Página Web	http://www.ehu.es/Gray

Nombre	ECCOMAS 2000 European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering
Incorpora	VI INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL PLASTICITY (COMPLAS VI)
Lugar	Barcelona, Spain
Fecha	11-14 de Septiembre del 2000
Organiza	Sociedad Española de Métodos Numéricos en la Ingeniería (SEMNI)
Colabora	Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA)
Cooperan	International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, Spain
Colaboran	Autoritat Portuaria de Barcelona Commision of European Communities (EC) Comisió Interdepartamental de Recerca i Innovació Tecnològica (CIRIT), (Generalitat de Catalunya) Dirección General de Investigación Científica y Técnica, (Ministerio de Educación y Ciencia, Spain) Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Barcelona, Spain Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)
Información	Secretaría del Congreso Sociedad Española de Métodos Numéricos (SEMNI) Edificio C-1, Campus Norte (UPC) C/ Gran Capitán s/n, 08034 - BARCELONA (Spain) Teléfono: +34 93 4016487 Fax: +34 93 4016517
E-mail	eccomacs2000@etseccpb.upc.es
Página Web	http://www.cimne.upc.es/eccomas

Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control.

F.H. Clarke - R.J. Stern - Gert Sabidussi, Ed.

Kluwer Acad. Publ., 1999. 624 págs. ISBN 0-7923-5665-9 y 0-7923-5666-7

Este libro recoge desarrollos muy recientes -aplicados y teóricos- tanto en análisis no lineal como en no regular. El rango de los temas tratados varía desde el análisis teórico (por ej. cálculo no regular infinitesimal) hasta muy aplicado (por ejemplo, técnicas de estabilización en control, control estocástico, retroalimentación o “feedback” no lineal, optimización no regular). Las contribuciones, escritas por autores muy conocidos en el área, son claras y autocontenidas.

Está dirigido a licenciados, ingenieros e investigadores que necesiten una introducción a la teoría no lineal, especialmente a los investigadores en teoría de control y optimización.

Computational Partial Differential Equations. Numerical Methods and Diffpack Programming.

H.P. Langtangen.

Springer Verlag, 1999. XXIII, 684 páginas. ISBN 3-540-65274-4

Este texto está recomendado a estudiantes e investigadores en ciencias de la computación que necesiten desarrollar códigos computacionales para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

La exposición está enfocada al cálculo numérico y al “software” de modelos matemáticos en mecánica de sólidos y fluidos. El libro enseña el método de los elementos finitos y la base del método de las diferencias finitas desde un punto de vista computacional, haciendo especial hincapié en el desarrollo de programas computacionales, usando la librería numérica Diffpack. Diffpack está explicada con todo detalle para problemas que incluyen ecuaciones modelos de matemática aplicada, transferencia de calor, elasticidad y flujos de fluidos viscosos. Todos los programas-ejemplos, así como la librería Diffpack para su uso con este libro, están disponibles en internet.

Functional Analysis and Differential Equations in Abstract Spaces.

S.D. Zaidman

CRC Press LLC (Chapman and Hall), 1999. ISBN 1-584-88011-2

Este volumen proporciona un tratamiento elemental de este tema clásico pero presentado de forma unificada. El autor ofrece el análisis funcional conectado con secciones especializadas en ecuaciones diferenciales creando así un texto autocontenido que incluye muchos de los conocimientos necesarios de análisis funcional, con sus demostraciones totalmente completas. Comenzando con el análisis funcional básico -espacios de Hilbert y de Banach y los operadores lineales- el Dr. Zaidman presenta después algunos resultados sobre el problema de Cauchy abstracto, en forma implícita o explícita y los semigrupos de operadores asociados, soluciones débiles y ultradébiles, la unicidad del problema de Cauchy, la unicidad de soluciones ultradébiles acotadas y el buen planteamiento del problema de Cauchy ultradébil. A continuación presenta algunos resultados sobre soluciones casiperiódicas y un resultado asintótico para inecuaciones diferenciales en forma ultradébil. Concebido para inspirar interés en este campo elegante y en gran crecimiento de las matemáticas, este volumen presenta el material en un nivel relativamente elemental —requiriendo un mínimo de conocimientos y habilidad— pero con profundidad suficiente para entender varios aspectos particulares de las ecuaciones diferenciales operacionales. Muchos resultados de investigación aparecen aquí por primera vez en un libro y algunos otros son de hecho publicados por primera vez.

Los investigadores en teoría de ecuaciones diferenciales en espacios abstractos, semigrupos de operadores, ecuaciones de evolución, así como los investigadores en matemática física y mecánica cuántica, encontrarán este trabajo claro y accesible.

RESÚMENES DE TESIS DOCTORALES

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE SISTEMAS ESTACIONARIOS DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES CON DIFUSIÓN LINEAL Y NO LINEAL

Doctorando: Antonio Suárez Fernández.

Director/es: Manuel Delgado Delgado.

Defensa: 5 de Julio de 1.999. Universidad de Sevilla.

Calificación: Sobresaliente cum Laude.

Resumen: La Memoria se estructura en tres bloques temáticos: el primero de ellos, y más extenso, está dedicado al estudio de ecuaciones y sistemas en derivadas parciales elípticos con difusión no lineal relativos a modelos biológicos. El segundo trata del modelo simbiótico de Volterra-Lotka con difusión lineal y el tercero al estudio de ecuaciones cuasilineales.

En el primer bloque se estudian con detalles los sistemas estacionarios de reacción-difusión de Volterra-Lotka con difusión no lineal que modelan la interacción entre dos especies de las tres formas clásicas: competición, depredador-presa y simbiosis. Debido a la difusión no lineal aparecen los llamados “núcleos muertos”, es decir, subconjuntos del hábitat de las especies donde alguna de ellas no pueden vivir. También se obtienen resultados de existencia, no existencia y unicidad de las soluciones positivas de dichos sistemas.

En el segundo bloque se estudia el modelo simbiótico de Volterra-Lotka de difusión lineal. Este modelo ha recibido mucha menor atención que los de competición y depredador-presa debido sobre todo a la falta de cotas a priori para altas dimensiones espaciales. Resultados de existencia, no existencia, unicidad y multiplicidad de soluciones positivas son dadas.

Para la obtención de los resultados de estos dos bloques se usan métodos del Análisis no Lineal como son el de sub-supersolución, bifurcación local y global, reducción de Lyapunov-Schmidt y técnicas algebraicas de la teoría de singularidades.

El último bloque está dedicado a la aplicación del método de sub-supersolución a las ecuaciones cuasilineales.

PROBLEMAS DE FRONTERA PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DISCONTINUAS

Doctorando: Rodrigo López Pouso.

Director/es: Alberto Cabada (Universidad de Santiago) y Eduardo Liz (Universidad de Vigo).

Defensa: 5 de Julio de 1999. Universidad de Santiago de Compostela..

Calificación: Sobresaliente cum Laude.

Resumen: Esta tesis está dedicada al estudio de cierto tipo de ecuaciones diferenciales que tienen la particularidad de que pueden presentar discontinuidades. Dichas ecuaciones están sujetas a distintos tipos de condiciones en la frontera. Es de resaltar el interés de dichos problemas, no sólo teórico sino también aplicado, en especial en el estudio de distintos sistemas dinámicos no necesariamente continuos en su evolución. El primer capítulo está dedicado a introducir y recordar una serie de resultados conocidos que serán usados a lo largo de la memoria. El segundo capítulo trata distintos aspectos de las ecuaciones diferenciales discontinuas de primer orden, abordando en primer lugar la existencia de solución para problemas de valor inicial. A continuación se desarrolla el método de las subsoluciones y sobresoluciones (cuando las mismas están ordenadas) y el método monótono. Se prueban resultados que generalizan dicho método monótono y se aborda la cuestión de la existencia de solución cuando la subsolución y la sobresolución no están ordenadas. También en este capítulo se consideran sistemas de ecuaciones diferenciales así como problemas de frontera de tipo no lineal. El tercer, y último, capítulo se dedica al estudio de las ecuaciones de segundo orden y, especialmente, la versión unidimensional del p -Laplaciano. Se consideran por separado los casos en los que la subsolución y la sobresolución están en el orden habitual y en el inverso. Se obtienen resultados diversos para el problema de Neumann y el problema periódico.

ECUACIONES DIFERENCIALES CON CONDICIONES DE CONTORNO NO-SEPARADAS: GENERACIÓN DE SEMIGRUPOS ANALÍTICOS

Doctorando: José María Gallardo Molina.

Director/es: Xavier Mora Giné.

Defensa: 14 de julio de 1999, Universitat Autònoma de Barcelona.

Calificación: Sobresaliente cum Laude.

Resumen: El objetivo de esta memoria es el estudiar la generación de semigrupos analíticos de operadores por determinados operadores diferenciales de segundo orden con condiciones de contorno generales. Concretamente, en el primer capítulo consideramos el operador diferencial formal $l(u) = u'' + p(x)u' + q(x)u$ en el intervalo (a, b) , junto con condiciones de contorno *no-separadas* de la forma:

$$B_1(u) \equiv a_1u(a) + b_1u'(a) + c_1u(b) + d_1u'(b) = 0,$$

$$B_2(u) \equiv a_2u(a) + b_2u'(a) + c_2u(b) + d_2u'(b) = 0.$$

Probamos que, para condiciones de contorno *Birkhoff-regulares*, el operador diferencial $Lu = l(u)$, $D(L) = \{u \in W^{2,p}(a, b) : B_1(u) = B_2(u) = 0\}$, es el generador de un semigrupo analítico en $L^p(a, b)$, para $1 \leq p \leq \infty$. Este resultado se obtiene probando una cota de la forma $\|(\lambda I - L)^{-1}\| \leq M/|\lambda|$, donde λ varía en un sector adecuado del plano complejo.

En el segundo capítulo consideramos el caso en que una de las condiciones de contorno sea *integral*:

$$B_1(u) \equiv a_0u(a) + b_0u'(a) + c_0u(b) + d_0u'(b) = 0,$$

$$B_2(u) \equiv \int_a^b R(t)u(t) dt + \int_a^b S(t)u'(t) dt = 0,$$

donde R y S son funciones continuas. Aplicando la técnica desarrollada en el primer capítulo, obtenemos que el operador asociado genera un semigrupo analítico en $L^1(a, b)$, para un determinado tipo de condiciones de contorno *regulares*. En el tercer capítulo se obtienen resultados análogos para el caso de dos condiciones de contorno integrales.

Por último, dedicamos un capítulo al estudio de una generalización n -dimensional de los problemas anteriores. Si Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^n y Γ es su frontera, consideramos el problema

$$\begin{aligned} l(u) &= f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= Ru & \text{en } \Gamma, \end{aligned}$$

donde $l(u)$ es un operador elíptico de segundo orden y R es un operador lineal sobre $H^{1/2}(\Gamma)$, definido negativo y acotado en norma $L^2(\Gamma)$. Probamos que el operador asociado es el generador de un semigrupo analítico de operadores sobre $L^2(\Omega)$.

Rectificación: La Tesis Doctoral de Francisco Roca Rodríguez, titulada MÉTODOS TOPOLÓGICOS Y VARIACIONALES EN EL ESTUDIO DE PROBLEMAS DE CONTORNO RESONANTES CON NO LINEALIDADES PERIÓDICAS, obtuvo la calificación de *Sobresaliente cum Laude (por unanimidad)*. En el Anuario 99 aparecía erróneamente la calificación de "Apto cum Laude".

DIRECCIÓN PARA
SUGERENCIAS Y COMENTARIOS

Atenderemos gustosamente cualquier tipo de sugerencia o comentario sobre el Boletín y el Anuario de SēMA. Una forma rápida y conveniente para hacernos llegar tales sugerencias es el correo electrónico. Por eso indicamos una vez más nuestra dirección de “e-mail”:

boletin_sema@uco.es